ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 8, с. 1296–1308

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5+517.927

О РЕШЕНИЯХ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1)]

© 2023 г. О. В. Басков[1], Д. К. Потапов[1,*]

[1] 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9,
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

**e-mail: d.potapov@spbu.ru*

Поступила в редакцию 25.02.2023 г.
Переработанный вариант 15.03.2023 г.
Принята к публикации 30.03.2023 г.

Рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью. Устанавливаются теоремы о числе решений для исследуемой задачи. Полученные решения иллюстрируются графиками. Описывается процесс численного решения изучаемой краевой задачи. Библ. 13. Фиг. 9.

Ключевые слова: краевая задача, обыкновенное дифференциальное уравнение, разрывная правая часть, аналитическое решение, численное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923080021, **EDN:** IIAYWK

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На протяжении ряда лет дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями привлекают внимание многих исследователей. Такие уравнения представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений. Последние десять лет проблема существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными правыми частями изучалась в [1–12]. Настоящая работа является продолжением этих исследований.

Рассмотрим модельную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с параметром и разрывной правой частью, в которой решения выписываются в явном виде. А именно,

$$-u'' = \lambda g(x,u(x)), \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Здесь λ – положительный параметр, правая часть

$$g(x,u) = \begin{cases} a, & \text{если} \quad u \leqslant 1, \\ b, & \text{если} \quad u > 1, \end{cases}$$

имеет разрыв первого рода вдоль линии $u = 1$, a и b – вещественные числа.

Отметим, что если $u(x)$ – решение задачи (1), (2), то $v(x) = u(1 - x)$ также является решением этой задачи. Действительно, имеем

$$-v''(x) = -u''(1 - x) = \lambda g(1 - x, u(1 - x)) = \lambda g(x, v(x))$$

(последнее равенство справедливо в силу вида правой части), а также

$$v(0) = u(1) = 0, \quad v(1) = u(0) = 0.$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 23-21-00069, https://rscf.ru/project/23-21-00069/).

Таким образом, решения краевой задачи (1), (2) либо симметричны относительно прямой $x = 1/2$ (т.е. $u(x) = u(1-x)$), либо имеются парные решения, получаемые отражением относительно данной прямой.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В зависимости от параметра λ решим искомую задачу аналитически при различных значениях a и b. Имеем нижеследующие теоремы 1–4 о числе решений краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. *Пусть* $0 < a < b$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет одно решение при* $\lambda \in \left(0, 8(2b-a)/b^2\right) \cup \left(8/a, +\infty\right)$, *три решения при* $\lambda \in \left(8(2b-a)/b^2, 8/a\right)$ *и два решения при* $\lambda = 8(2b-a)/b^2$ *или* $\lambda = 8/a$.

Доказательство. Сначала установим вид решения. Будем искать решение задачи (1), (2) через задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = t$.

Пока $u(x) \leqslant 1$, уравнение (1) дает $-u'' = \lambda a$, и

$$u(x) = tx - \frac{1}{2}\lambda a x^2. \tag{3}$$

Если $t \leqslant 0$, то $u(1) = t - (1/2)\lambda a < 0$, и решений, удовлетворяющих условию $u(1) = 0$, нет. Поэтому $t > 0$.

Функция (3) достигает максимума при $x = t/(\lambda a)$, равного $u\left(t/(\lambda a)\right) = t^2/(2\lambda a)$. Если $t \leqslant \sqrt{2\lambda a}$, то этот максимум не превосходит единицы, а значит, решение $u(x) \leqslant 1$ при всех $x \in [0,1]$. Таким образом, возможно существование решения в виде параболы (3).

Рассмотрим теперь случай $t > \sqrt{2\lambda a}$. Тогда существует x_1 такое, что $u(x_1) = 1$. Подставляя (3), получим квадратное уравнение $(1/2)\lambda a x_1^2 - t x_1 + 1 = 0$ с решениями $x_1 = (t \pm \sqrt{t^2 - 2\lambda a})/(\lambda a)$. Однако следует учесть, что после перехода решения через линию $u = 1$ правая часть $g(x,u)$ меняет значение, и решение перестает описываться формулой (3). Так что рассматривать следует лишь $x_1 = (t - \sqrt{t^2 - 2\lambda a})/(\lambda a)$. Из (3) найдем $u'(x_1) = t - \lambda a x_1 = \sqrt{t^2 - 2\lambda a} > 0$.

Пока $u(x) > 1$, уравнение (1) имеет вид $-u'' = \lambda b$, и решение описывается формулой

$$u(x) = u(x_1) + u'(x_1)(x - x_1) - \frac{1}{2}\lambda b (x - x_1)^2. \tag{4}$$

Поскольку мы ищем решения, удовлетворяющие условию $u(1) = 0$, то должна найтись точка $x_2 \in (x_1, 1)$, при которой решение вновь пересечет линию, на которой правая часть терпит разрыв, т.е. $u(x_2) = 1$. Полагая $x = x_2$ в (4) и учитывая $u(x_1) = u(x_2) = 1$, $x_2 > x_1$, находим $x_2 - x_1 = 2u'(x_1)/(\lambda b)$. А тогда $u'(x_2) = u'(x_1) - \lambda b(x_2 - x_1) = -u'(x_1) = -\sqrt{t^2 - 2\lambda a} < 0$.

Наконец, при $x \geqslant x_2$ вновь $u < 1$, и решение дается формулой

$$u(x) = u(x_2) + u'(x_2)(x - x_2) - \frac{1}{2}\lambda a (x - x_2)^2. \tag{5}$$

В силу $u(x_2) = 1$, $u'(x_2) < 0$ получим, что $u(x) \leqslant 1$ при $x \geqslant x_2$, так что больше решение не пересечет линию $u = 1$. Таким образом, возможно существование решения в виде объединения трех парабол (3)–(5).

Перейдем теперь к нахождению самих решений. Рассмотрим решения вида (3). Ограничение $u(1) = 0$ приводит к значению $t = (1/2)\lambda a$, так что решение описывается уравнением $u(x) = (1/2)\lambda a x(1 - x)$. Оно достигает максимума при $x = 1/2$, равного $u(1/2) = (1/8)\lambda a$. Условие $t \leqslant \sqrt{2\lambda a}$ равносильно условию $u(1/2) \leqslant 1$, откуда можно получить значения параметра, при которых это решение существует: $\lambda \leqslant 8/a$.

Рассмотрим теперь решения, состоящие из трех парабол. Положим

$$u'(x) = \begin{cases} -\lambda ax + t, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\lambda bx + r, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ -\lambda ax + s, & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Такой выбор $u'(x)$ удовлетворяет уравнению (1), если $u(x) > 1 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$. Обозначим $u'(1/2) = c$. Тогда $r = (1/2)\lambda b + c$. В точке $x = x_1$ должно быть выполнено равенство $-\lambda ax_1 + t = -\lambda bx_1 + r$, откуда $t = r - \lambda(b-a)x_1 = (1/2)\lambda b - \lambda(b-a)x_1 + c$. По аналогии, в точке $x = x_2$ должно быть $-\lambda bx_2 + r = -\lambda ax_2 + s$, откуда $s = (1/2)\lambda b - \lambda(b-a)x_2 + c$. Итак, учет непрерывности $u'(x)$ привел к выражению

$$u'(x) = \begin{cases} -\lambda ax - \lambda(b-a)x_1 + \dfrac{1}{2}\lambda b + c, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\lambda b\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ -\lambda ax - \lambda(b-a)x_2 + \dfrac{1}{2}\lambda b + c, & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Проинтегрируем его с учетом ограничений (2). Имеем

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\lambda ax^2 - \lambda(b-a)x_1x + \dfrac{1}{2}\lambda bx + cx, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\dfrac{1}{2}\lambda b\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + c\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + d, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \dfrac{1}{2}\lambda a(1 - x^2) + \lambda(b-a)x_2(1-x) - \dfrac{1}{2}\lambda b(1-x) - c(1-x), & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Учтем, что $u(x_1) = u(x_2)$:

$$-\frac{1}{2}\lambda b\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + c\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + d = -\frac{1}{2}\lambda b\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + c\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + d,$$

откуда

$$-\frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 1) = c(x_2 - x_1),$$

и в силу $x_2 > x_1$ получаем $c = -(1/2)\lambda b(x_1 + x_2 - 1)$.

Теперь учтем непрерывность $u(x)$. При $x = x_1$ потребуем

$$-\frac{1}{2}\lambda ax_1^2 - \lambda(b-a)x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda bx_1 + cx_1 = -\frac{1}{2}\lambda b\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + c\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + d,$$

откуда

$$d = \frac{1}{8}\lambda b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\lambda(b-a)x_1^2.$$

При $x = x_2$ должно выполняться

$$-\frac{1}{2}\lambda b\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + c\left(x_2 - \frac{1}{2}\right) + d = \frac{1}{2}\lambda a + \frac{1}{2}\lambda ax_2^2 - \lambda bx_2^2 - \lambda ax_2 - \frac{1}{2}\lambda b + \frac{3}{2}\lambda bx_2 - c + cx_2,$$

откуда

$$d = \frac{1}{2}\lambda a - \frac{3}{8}\lambda b - \frac{1}{2}c + \lambda(b-a)x_2 - \frac{1}{2}\lambda(b-a)x_2^2.$$

Приравнивая выражения для d, находим

$$\frac{1}{8}\lambda b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\lambda(b-a)x_1^2 = \frac{1}{2}\lambda a - \frac{3}{8}\lambda b - \frac{1}{2}c + \lambda(b-a)x_2 - \frac{1}{2}\lambda(b-a)x_2^2,$$

откуда

$$c = \frac{1}{2}\lambda(b-a)x_1^2 - \frac{1}{2}\lambda(b-a)(1-x_2)^2.$$

Приравнивание выражений для c дает

$$-\frac{1}{2}\lambda b(x_1 + x_2 - 1) = \frac{1}{2}\lambda(b-a)(x_1 - x_2 + 1)(x_1 + x_2 - 1),$$

и либо $x_1 + x_2 = 1$, либо $-(1/2)\lambda b = (1/2)\lambda(b-a)(x_1 - x_2 + 1)$, откуда $x_2 - x_1 = (2b-a)/(b-a) > 1$, что невозможно в силу $0 < x_1 < x_2 < 1$. Таким образом, $x_2 = 1 - x_1$. Отсюда следует $c = 0$.

Наконец, учтем требование $u(x_1) = 1$. Тогда $(1/2)\lambda a x_1^2 - \lambda b x_1^2 + (1/2)\lambda b x_1 = 1$, откуда

$$(2b-a)x_1^2 - bx_1 + \frac{2}{\lambda} = 0,$$

$$x_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (8/\lambda)(2b-a)}}{2(2b-a)}. \tag{6}$$

Эти корни имеются в случае $b^2 - (8/\lambda)(2b-a) \geqslant 0$ или $\lambda \geqslant 8(2b-a)/b^2$. Однако следует еще убедиться в выполнении условия $0 < x_1 < x_2 < 1$. Положительность x_1 очевидна. В силу $x_2 = 1 - x_1$ остается проверить, что $x_1 < 1/2$. Это условие приводит к неравенству

$$\pm\sqrt{b^2 - \frac{8}{\lambda}(2b-a)} < b - a,$$

справедливому для нижнего знака в силу условия $a < b$. Для верхнего знака получаем $b^2 - (8/\lambda)(2b-a) < b^2 - a(2b-a)$, откуда $\lambda < 8/a$. Отметим, что в силу положительности a ограничения на λ совместны: $8(2b-a)/b^2 < 8/a$.

Таким образом, при $0 < \lambda < 8(2b-a)/b^2$ задача (1), (2) имеет единственное решение

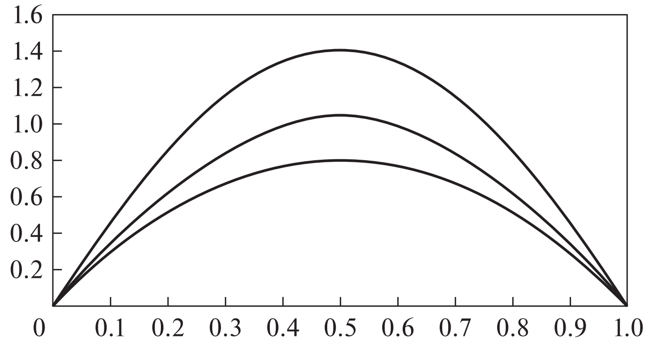
$$u(x) = \frac{1}{2}\lambda a x(1-x). \tag{7}$$

При $\lambda = 8(2b-a)/b^2$ помимо решения (7) появляется решение

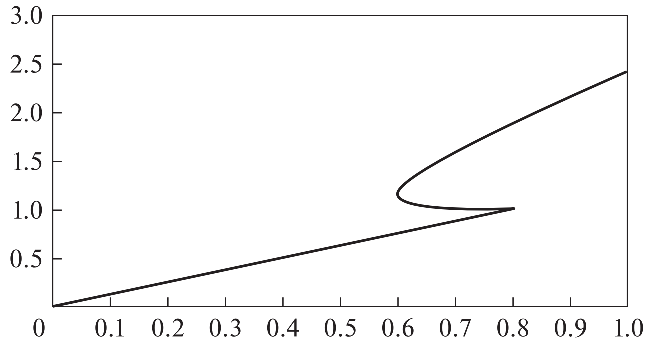
$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{b^2}x\left(b^2 - a(2b-a)x\right), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{b}{2(2b-a)}, \\ \dfrac{4(2b-a)}{b}x(1-x) - \dfrac{b-a}{2b-a}, & \dfrac{b}{2(2b-a)} \leqslant x \leqslant \dfrac{3b-2a}{2(2b-a)}, \\ \dfrac{4}{b^2}(1-x)\left((b-a)^2 + a(2b-a)x\right), & 1 - \dfrac{b}{2(2b-a)} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

При $8(2b-a)/b^2 < \lambda < 8/a$ существуют три решения, одно из которых дается формулой (7), а два других имеют вид

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\lambda x\left(b - 2(b-a)x_1 - ax\right), & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \dfrac{1}{2}\lambda b x(1-x) - \dfrac{1}{2}\lambda(b-a)x_1^2, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \dfrac{1}{2}\lambda(1-x)\left(b - a - 2(b-a)x_1 + ax\right), & x_2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$



Фиг. 1. Графики решений $u(x)$ при $a = 1$, $b = 2$, $\lambda = 6.4$.



Фиг. 2. Зависимость $u(0.5)$ от λ при $a = 1$, $b = 2$.

где $x_2 = 1 - x_1$, а x_1 дается выражением (6). При $\lambda = 8/a$ остаются два решения $u(x) = 4x(1 - x)$ и

$$u(x) = \begin{cases} 4x\left(\dfrac{2b^2}{a(2b-a)} - 1 - x\right), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a}{2(2b-a)}, \\ \dfrac{4b}{a}x(1-x) - \dfrac{a(b-a)}{2b-a}, & \dfrac{a}{2(2b-a)} \leqslant x \leqslant \dfrac{4b-3a}{2(2b-a)}, \\ 4(1-x)\left(\dfrac{2(b-a)^2}{a(2b-a)} + x\right), & 1 - \dfrac{a}{2(2b-a)} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Наконец, при $\lambda > 8/a$ остается единственное решение (8), в котором $x_2 = 1 - x_1$ и

$$x_1 = \frac{b - \sqrt{b^2 - (8/\lambda)(2b-a)}}{2(2b-a)}.$$

Теорема 1 доказана.

Проиллюстрируем полученный результат. На фиг. 1 изображены графики трех решений краевой задачи (1), (2) при $a = 1$, $b = 2$, $\lambda = 6.4$. Нижний график соответствует решению, не проходящему через точки разрыва правой части, а два верхних графика проходят через область $u > 1$.

Каждое решение задачи (1), (2) при $a > 0$ достигает своего максимума при $x = 1/2$. На фиг. 2 изображена зависимость максимального значения $u(0.5)$ от параметра λ. По этому графику легко проследить изменение количества решений.

Теорема 2. *Пусть $a = 0 < b$. Тогда задача* (1), (2) *имеет одно решение при $\lambda \in (0, 16/b)$, два решения при $\lambda = 16/b$ и три решения при $\lambda \in (16/b, +\infty)$.*

Доказательство. Сначала заметим, что при $u \leqslant 1$ уравнение (1) принимает вид $u'' = 0$, и его решениями являются линейные функции. Существует единственная линейная функция, удовлетворяющая условиям (2): $u = 0$. Это тривиальное решение, существующее при всех значениях параметра $\lambda > 0$.

Теперь будем искать решения, пересекающие линию $u = 1$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = t$. В начале $u < 1$, уравнение (1) имеет вид $u'' = 0$, и решение $u(x) = tx$. Очевидно, что при $t \leqslant 0$ решение не достигнет значения $u = 1$. Так что $t > 0$. Потребуем существование $x_1 \in (0,1)$ такого, что $u(x_1) = 1$. Тогда $t = 1/x_1$.

При $u > 1$ уравнение (1) приобретает вид $-u'' = \lambda b$, так что $u'(x) = u'(x_1) - \lambda b(x - x_1) = 1/x_1 - \lambda b(x - x_1)$, а

$$u(x) = 1 + \frac{1}{x_1}(x - x_1) - \frac{1}{2}\lambda b(x - x_1)^2. \tag{9}$$

Чтобы удовлетворить ограничению $u(1) = 0$, решение снова должно пересечь прямую $u = 1$, поэтому существует $x_2 \in (x_1,1)$ такое, что $u(x_2) = 1$. Подстановка $x = x_2$ в (9) с учетом $x_2 > x_1$ дает

$$x_2 - x_1 = \frac{2}{\lambda b x_1}. \tag{10}$$

Отсюда $u'(x_2) = -u'(x_1) = -1/x_1$.

Далее $u < 1$ и $u'(x)$ сохраняет свое значение, так что больше решение не примет значения $u = 1$. Таким образом, решение должно иметь вид

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x_1}, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\dfrac{1}{2}\lambda b x^2 + cx + d, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \dfrac{1 - x}{x_1}, & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Из условия непрерывности производной $u'(x_1) = 1/x_1 = -\lambda b x_1 + c$ находим $c = 1/x_1 + \lambda b x_1$. Из условия $u(x_1) = 1$ находим $d = 1 + (1/2)\lambda b x_1^2 - c x_1 = -(1/2)\lambda b x_1^2$. Далее, условие $u(x_2) = 1$ дает $(1 - x_2)/x_1 = 1$ или $x_1 = 1 - x_2$. С учетом (10) получаем $1 - 2x_1 = 2/(\lambda b x_1)$ или $2x_1^2 - x_1 + 2/(\lambda b) = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16/(\lambda b)}}{4}. \tag{11}$$

Данное решение возможно при значениях параметра $\lambda \geqslant 16/b$. Отметим, что по этой формуле справедливы неравенства $0 < x_1 < 1/2$ и $0 < x_1 < x_2 < 1$.

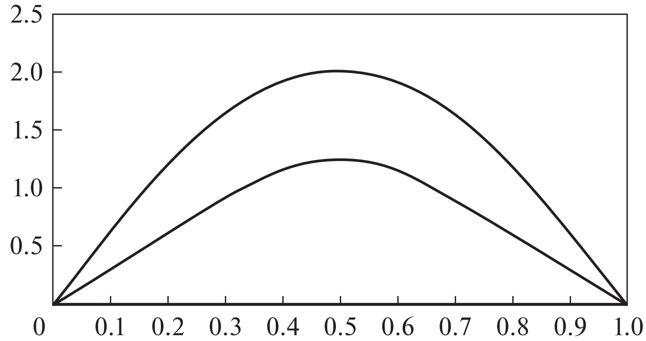
Таким образом, при $0 < \lambda < 16/b$ существует лишь тривиальное решение $u = 0$. При $\lambda = 16/b$ помимо тривиального появляется еще решение

$$u(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ 8x(1 - x) - \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{4}, \\ 4(1 - x), & \dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

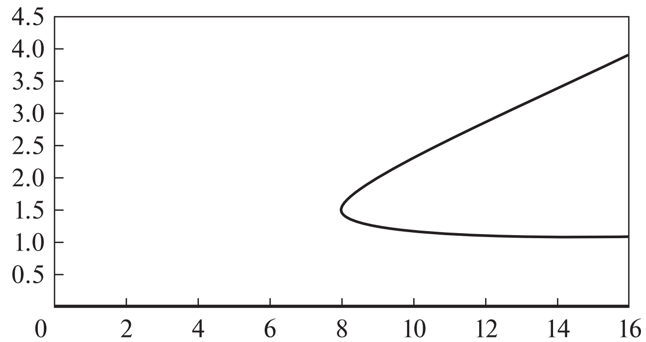
Наконец, при $\lambda > 16/b$ имеем три решения, одно из которых тривиальное $u = 0$, а два других даются формулой

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x_1}, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \dfrac{1}{2}\lambda b x(1 - x) - \dfrac{1}{2}\lambda b x_1^2, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ \dfrac{1 - x}{x_1}, & x_2 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

в которой $x_2 = 1 - x_1$, а два значения x_1 находятся из (11). Теорема 2 доказана.



Фиг. 3. Графики решений $u(x)$ при $a = 0$, $b = 2$, $\lambda = 9$.



Фиг. 4. Зависимость $u(0.5)$ от λ при $a = 0$, $b = 2$.

Также проиллюстрируем полученные решения. На фиг. 3 изображены графики трех решений задачи (1), (2) при $a = 0$, $b = 2$, $\lambda = 9$. Нетривиальные решения достигают максимума при $x = 1/2$. На фиг. 4 изображена зависимость значений $u(0.5)$ от параметра λ, по которой можно проследить изменение количества решений.

Теорема 3. *Пусть* $a < 0 < b$. *Тогда существует счетное множество бифуркационных значений параметра* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *таких, что при* $\lambda \in (0, \lambda_1)$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение, при* $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ *существует* $2k+1$ *решение, при* $\lambda = \lambda_k$ *имеется* $2k$ *решений в случае нечетного* k *и* $2k-1$ *решение в случае четного* k. *Здесь* $\lambda_{2k-1} = -8(k^2(b-a)^2 - b^2)/(ab^2)$, $\lambda_{2k} = -8k^2(b-a)^2/(ab^2)$, $k \geqslant 1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $u \leqslant 1$. Уравнение (1) имеет вид $-u'' = \lambda a$, его решение $u(x) = (1/2)\lambda a x(1-x)$ удовлетворяет условиям (2) и притом $u \leqslant 0$. Таким образом, это решение существует при всех $\lambda > 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда решение пересекает линию $u = 1$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ — все точки, при которых $u(x) = 1$, $u'(x) \neq 0$. Этих точек четное количество, поскольку для того, чтобы выполнить условия (2), решение должно перейти между областями $u \leqslant 1$ и $u > 1$ четное число раз.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = t$. Тогда при $0 < x < x_1$ будем иметь $u'(x) = t - \lambda a x$, так что $u'(x_1) = t - \lambda a x_1$. При этом $\int_0^{x_1} u'(x)dx = u(x_1) - u(0) = 1$, так что $t x_1 - (1/2)\lambda a x_1 = 1$, откуда $t = 1/x_1 + (1/2)\lambda a x_1$, а $u'(x_1) = 1/x_1 - (1/2)\lambda a x_1$.

При $x_{2i+1} < x < x_{2i+2}$ будем иметь $u'(x) = u'(x_{2i+1}) - \lambda b(x - x_{2i+1})$, причем в силу условий $u(x_{2i+2}) = u(x_{2i+1}) = 1$ должно выполняться равенство $\int_{x_{2i+1}}^{x_{2i+2}} u'(x)dx = 0$, откуда $u'(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i+1}) -$

$-(1/2)\lambda b(x_{2i+2}-x_{2i+1})^2=0$, и в силу неравенства $x_{2i+1}<x_{2i+2}$ имеем $x_{2i+2}-x_{2i+1}=2u'(x_{2i+1})/(\lambda b)$. При этом $u'(x_{2i+2})=u'(x_{2i+1})-\lambda b(x_{2i+2}-x_{2i+1})=-u'(x_{2i+1})$.

При $x_{2i}<x<x_{2i+1}$ будем иметь $u'(x)=u'(x_{2i})-\lambda a(x-x_{2i})$. Аналогично, $\int_{x_{2i}}^{x_{2i+1}}u'(x)dx=0$, откуда $x_{2i+1}-x_{2i}=2u'(x_{2i})/(\lambda a)$, и $u'(x_{2i+1})=-u'(x_{2i})$.

Таким образом, в точках $x_1,x_2,\ldots,x_{2k}$ значения производной имеют чередующиеся знаки и одинаковы по абсолютной величине: $u'(x_{2i+1})=u'(x_1)$, $u'(x_{2i})=-u'(x_1)$.

Наконец, рассмотрим промежуток $x_{2k}<x<1$. Здесь $u'(x)=u'(x_{2k})-\lambda a(x-x_{2k})$, и в силу условий $u(x_{2k})=1$, $u(1)=0$ должно выполняться равенство $\int_{x_{2k}}^{1}u'(x)dx=-1$ или $u'(x_{2k})(1-x_{2k})-(1/2)\lambda a(1-x_{2k})^2=-1$. Отсюда $u'(x_{2k})=-1/(1-x_{2k})+(1/2)\lambda a(1-x_{2k})$.

Из равенства $u'(x_{2k})=-u'(x_1)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{x_1}-\frac{1}{2}\lambda a x_1=\frac{1}{1-x_{2k}}-\frac{1}{2}\lambda a(1-x_{2k})$$

или

$$\frac{1-x_{2k}-x_1}{x_1(1-x_{2k})}=-\frac{1}{2}\lambda a(1-x_1-x_{2k}).$$

Отсюда либо $x_{2k}=1-x_1$, либо $x_1(1-x_{2k})=2/(\lambda a)$.

Теперь вспомним, что

$$x_{2i+1}-x_{2i}=\frac{2u'(x_{2i})}{\lambda a}=-\frac{2u'(x_1)}{\lambda a},\quad x_{2i+2}-x_{2i+1}=\frac{2u'(x_{2i+1})}{\lambda b}=\frac{2u'(x_1)}{\lambda b}.$$

Тогда $1=x_1+(x_2-x_1)+\cdots+(x_{2k}-x_{2k-1})+(1-x_{2k})=x_1+2cu'(x_1)/\lambda+1-x_{2k}$, где $c=k/b-(k-1)/a$. Отсюда $x_{2k}-x_1=2cu'(x_1)/\lambda=2c/(\lambda x_1)-acx_1$.

Если $x_{2k}=1-x_1$, то $1-2x_1=2c/(\lambda x_1)-acx_1$, $(2-ac)x_1^2-x_1+2c/\lambda=0$ и

$$x_1=\frac{1\pm\sqrt{1-(8c/\lambda)(2-ac)}}{2(2-ac)}.\tag{12}$$

Данное решение возможно при условии

$$1-\frac{8c}{\lambda}(2-ac)\geqslant 0\quad\text{или}\quad\lambda\geqslant 8c(2-ac)=-\frac{8(k^2(b-a)^2-b^2)}{ab^2},\quad k\geqslant 1.$$

Если $x_1(1-x_{2k})=-2/(\lambda a)$, то

$$1+\frac{2}{\lambda a x_1}-x_1=\frac{2c}{\lambda x_1}-acx_1,\quad (1-ac)x_1^2-x_1-\frac{2(1-ac)}{\lambda a}=0,$$

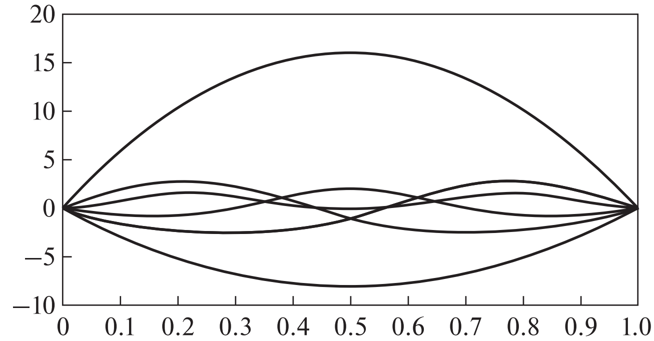
$$x_1=\frac{1\pm\sqrt{1+8/(\lambda a)(1-ac)^2}}{2(1-ac)}.\tag{13}$$

Данное решение существует при условии

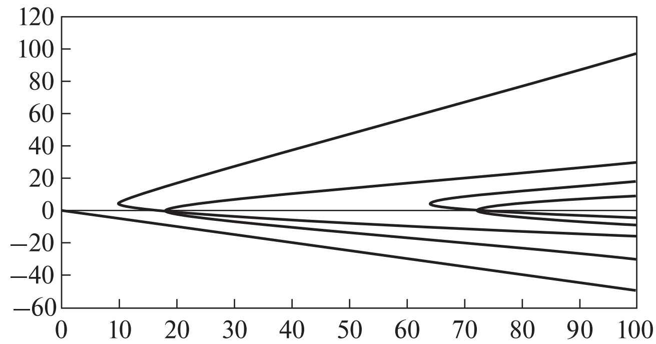
$$1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2\geqslant 0,\quad \lambda\geqslant-\frac{8}{a}(1-ac)^2=-\frac{8k^2(b-a)^2}{ab^2},\quad k\geqslant 1.$$

Следует выяснить, могут ли формулы (12) и (13) давать одинаковые значения x_1. Это важно для количества решений, поскольку каждому x_1 однозначно соответствует свое значение $u'(0)$ и, таким образом, свое решение задачи $u(x)$. Равенство

$$\frac{1\pm\sqrt{1-(8c/\lambda)(2-ac)}}{2(2-ac)}=\frac{1\pm\sqrt{1+(8/(\lambda a))(1-ac)^2}}{2(1-ac)}$$



Фиг. 5. Графики решений $u(x)$ при $a = -1$, $b = 2$, $\lambda = 64$.



Фиг. 6. Зависимость $u'(0)$ от λ при $a = -1$, $b = 2$.

равносильно

$$\pm(1-ac)\sqrt{1-\frac{8c}{\lambda}(2-ac)} = 1 \pm (2-ac)\sqrt{1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2},$$

откуда следует

$$-\frac{8c}{\lambda}(1-ac)^2(2-ac) = \pm 2(2-ac)\sqrt{1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2} + 2(2-ac) + \frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2(2-ac)^2,$$

$$-\frac{4c}{\lambda}(1-ac)^2 = \pm\sqrt{1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2} + 1 + \frac{4}{\lambda a}(1-ac)^2(2-ac),$$

$$-1-\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2 = \pm\sqrt{1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2},$$

$$1+\frac{16}{\lambda a}(1-ac)^2 + \frac{64}{\lambda^2 a^2}(1-ac)^4 = 1+\frac{8}{\lambda a}(1-ac)^2,$$

$$\lambda = -\frac{8}{a}(1-ac)^2.$$

При таком значении $1-(8c/\lambda)(2-ac) = 1/(1-ac)^2$, и при выборе верхнего знака в формуле (12) получим $x_1 = (1+1/(1-ac))/(2(2-ac)) = 1/(2(1-ac))$, что совпадает с формулой (13). Поскольку решение однозначно определяется значением $u'(0)$, которое выражено через x_1, при $\lambda = -(8/a)(1-ac)^2$ решение, задаваемое формулой (13), совпадает с решением, вытекающим из формулы (12). Интересно также отметить, что при этом значении параметра $u'(0) = 1/x_1 + (1/2)\lambda a x_1 = 0$. Теорема 3 доказана.

Проиллюстрируем полученный результат. На фиг. 5 изображены шесть решений задачи (1), (2) при $a = -1$, $b = 2$, $\lambda = 64$. В данном случае значение $u(0.5)$ не обязательно является точкой максимума решений, и отследить количество решений по этому значению не удается. Для этой цели на фиг. 6 приведен график зависимости $u'(0)$ от λ.

Теорема 4. *Пусть* $0 < b \leqslant a$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение при всех значениях параметра* $\lambda \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Случай $a = b$ очевиден, поскольку правая часть непрерывна, и единственное решение $u(x) = (1/2)\lambda a x(1 - x)$.

Рассмотрим случай $a > b$. Сначала будем искать решения, лежащие в области $u \leqslant 1$. Они имеют вид (7) и удовлетворяют условию $u \leqslant 1$ при $\lambda \leqslant 8/a$.

Теперь предположим, что решение заходит в область $u > 1$, другими словами, существует точка $x_1 \in (0,1)$ такая, что $u(x_1) = 1$, $u'(x_1) > 0$. Тогда из-за краевого условия $u(1) = 0$ должна найтись точка $x_2 \in (x_1, 1)$ такая, что $u(x_2) = 1$, $u'(x_2) < 0$. Затем, в силу отрицательности второй производной, $u'(x)$ убывает и остается отрицательной, так что решение больше не примет значение $u = 1$. Поэтому оно состоит из трех парабол.

Положим

$$u'(x) = \begin{cases} -\lambda a(x - x_1) + s, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\lambda b(x - x_1) + s, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ -\lambda a(x - x_2) - \lambda b(x_2 - x_1) + s, & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Здесь уже учтено требование непрерывности $u'(x)$. Интегрирование с учетом начального условия $u(0) = 0$ и непрерывности решения приводит к выражению

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{2} a x^2 + \lambda a x_1 x + s x, & 0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ -\dfrac{\lambda}{2} b(x - x_1)^2 + s x + \dfrac{\lambda}{2} a x_1^2, & x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ -\dfrac{\lambda}{2} a(x - x_2)^2 - \dfrac{\lambda}{2} b(x_2 - x_1)(2x - x_1 - x_2) + s x + \dfrac{\lambda}{2} a x_1^2, & x_2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Учет краевого условия $u(1) = 0$ позволяет выразить

$$s = \frac{1}{2}\lambda a(1 - x_1 - x_2)(1 + x_1 - x_2) + \frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1)(2 - x_1 - x_2).$$

В силу равенства $u(x_1) = u(x_2)$ имеем

$$s x_1 + \frac{1}{2}\lambda a x_1^2 = -\frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1)^2 + s x_2 + \frac{1}{2}\lambda a x_1^2,$$

$$s(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1)^2,$$

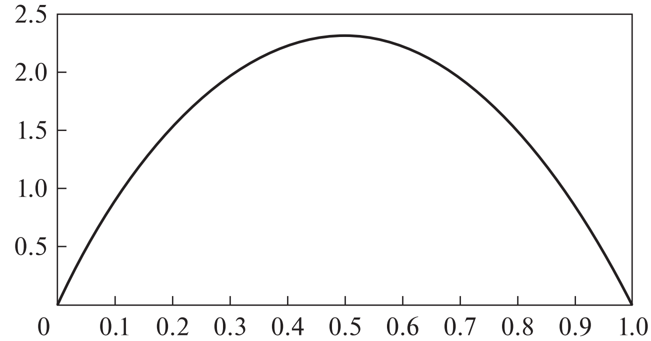
откуда с учетом $x_2 > x_1$ и выражения для s получаем

$$\frac{1}{2}\lambda a(1 - x_1 - x_2)(1 + x_1 - x_2) + \frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1)(1 - x_1 - x_2) = 0.$$

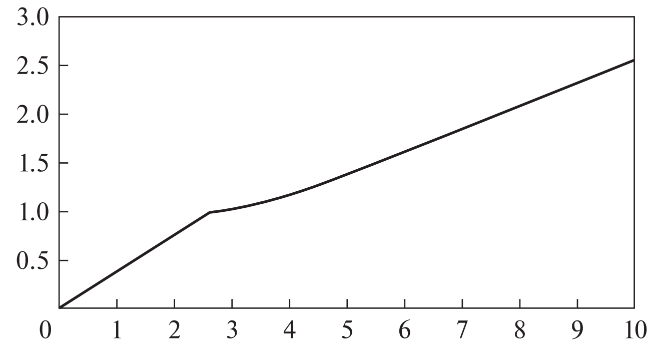
Тогда либо $x_1 + x_2 = 1$, либо

$$\frac{1}{2}\lambda a(1 + x_1 - x_2) + \frac{1}{2}\lambda b(x_2 - x_1) = 0,$$

откуда $x_2 - x_1 = a/(a - b) > 1$, что невозможно.



Фиг. 7. График решения $u(x)$ при $a = 3$, $b = 2$, $\lambda = 9$.



Фиг. 8. Зависимость $u(0.5)$ от λ при $a = 3$, $b = 2$.

Таким образом, $x_2 = 1 - x_1$ и $s = (1/2)\lambda b(1 - 2x_1)$. Остается рассмотреть условие $u(x_1) = 1$:

$$\frac{1}{2}\lambda b x_1(1 - 2x_1) + \frac{1}{2}\lambda a x_1^2 = 1,$$

$$(a - 2b)x_1^2 + b x_1 - \frac{2}{\lambda} = 0.$$

Если $a > 2b$, то

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + (8/\lambda)(a - 2b)}}{2(a - 2b)},$$

второй корень не удовлетворяет условию $x_1 > 0$. В силу $0 < x_1 < x_2 < 1$ мы должны иметь $x_1 < 1/2$, откуда $\lambda > 8/a$.

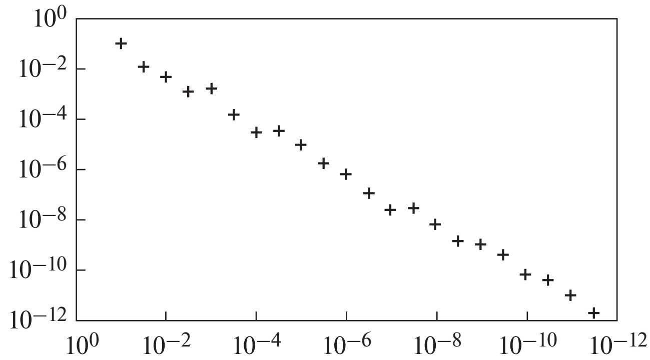
Если $a = 2b$, то $x_1 = 2/(\lambda b)$, и условие $x_1 < 1/2$ справедливо при $\lambda > 8/a$.

Если $b < a < 2b$, то

$$x_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - (8/\lambda)(2b - a)}}{2(2b - a)}.$$

Условие $x_1 < 1/2$ приводит к неравенству $\pm\sqrt{b^2 - (8/\lambda)(2b - a)} < b - a$, в котором правая часть отрицательна, поэтому верхний знак не подходит. Для нижнего знака условие выполняется при $\lambda > 8/a$.

Таким образом, при $a > b$ и $\lambda > 8/a$, имеется единственное значение x_1, которое позволяет получить решение вида (8).



Фиг. 9. Зависимость ошибки от ε.

Объединяя рассмотренные случаи, получаем существование единственного решения при всех $\lambda > 0$. Теорема 4 доказана.

На фиг. 7 изображен график решения задачи (1), (2) при $a = 3$, $b = 2$, $\lambda = 9$. Решение достигает максимума при $x = 1/2$. Зависимость значений $u(0.5)$ от параметра λ приведена на фиг. 8.

Отметим, что при $a \in \mathbb{R}$ и $b \in (-\infty, 0]$ остаются лишь решения $u(x)$ вида (7), не выходящие из области $u \leqslant 1$ и существующие при $\lambda a \leqslant 8$.

Таким образом, рассмотрены все возможные соотношения между числами a и b.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Приближенное решение краевой задачи (1), (2) будем искать методом пристрелки (см. [13]). Для этого сначала выбираем наугад значения t_0 и t_1 – начальные приближения значения $u'(0)$. Решаем задачу Коши для уравнения $-u_i'' = \lambda g(x, u_i)$ с начальными условиями $u_i(0) = 0$, $u_i'(0) = t_i$, находим значения $u_i(1)$, $i = 0,1$. Затем получаем следующее приближение:

$$t_{i+1} = t_i - \frac{t_i - t_{i-1}}{u_i(1) - u_{i-1}(1)} u_i(1), \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Процесс продолжается, пока не будет выполнено неравенство $|u_i(1)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – выбранная желаемая точность.

Задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями $u(0) = 0$, $u'(0) = t$ решаем методом Эйлера. Выбираем количество промежутков N, шаг $h = 1/N$. Обозначим $x_i = ih$, u_i будут приближать значения $u(x_i)$, а u_i' соответственно $u'(x_i)$. Полагаем $u_0 = 0$, $u_0' = t$. На каждом шаге рассчитываем $u_{i+1}' = u_i' - \lambda g(x_i, u_i)h$, $u_{i+1} = u_i + (1/2)(u_i' + u_{i+1}')h$.

За счет простой левой части уравнения (1) данный метод дает точное решение задачи Коши при условии, что точки, в которых правая часть испытывает скачок на решении, попадают на узлы сетки. Однако численный метод, как правило, используется тогда, когда нет точной информации об этих точках. Поэтому предлагается следующая корректировка.

Инициализация: $u_0 = 0$, $u_0' = t$.

Рассчитываем $u_{i+1}' = u_i' - \lambda g(x_i, u_i)h$, $u_{i+1} = u_i + (1/2)(u_i' + u_{i+1}')h$. Если выполнено условие $(u_i - 1)(u_{i+1} - 1) \geqslant 0$, то продолжаем. В противном случае проводим коррекцию. Будем искать на отрезке $[0, h]$ такой подшаг h_*, что при вычислении

$$u_*' = u_i' - \lambda g(x_i, u_i)h_*, \quad u_* = u_i + \frac{1}{2}(u_i' + u_*')h \tag{14}$$

получим значение $u_* = 1$. Для этого предлагается использовать бинарный поиск. Начинаем с $h_l = 0$, $h_r = h$, $u_l = u_i$, $u_r = u_{i+1}$. На каждой итерации выбираем среднее значение $h_c = (1/2)(h_l + h_r)$ и вычисляем соответствующие $u_c' = u_i' - \lambda g(x_i, u_i)h_c$, $u_c = u_i + (1/2)(u_i' + u_c')h$. Если $(u_i - 1)(u_c - 1) < 0$, то присваиваем $h_l = h_c$, $u_l = u_c$, иначе полагаем $h_r = h_c$, $u_r = u_c$. Процесс продолжается до тех пор, пока значение подшага не будет найдено с заданной точностью: $|h_r - h_l| < \delta$, где $\delta > 0$. Пусть $h_* = (1/2)(h_l + h_r)$. Тогда вычисляем первый подшаг по формулам (14), а затем вычисляем второй подшаг $u'_{i+1} = u'_* - \lambda g(x_i, u_{i+1})(h - h_*)$, $u_{i+1} = u_* + (1/2)(u'_* + u'_{i+1})(h - h_*)$. Здесь в правую часть необходимо подставить вычисленное перед запуском коррекции значение u_{i+1}, чтобы получить ее значение после скачка.

Если h_* удается находить точно, то такой метод позволяет получать точное решение рассматриваемой задачи Коши.

На фиг. 9 в логарифмических осях приведены результаты численных расчетов зависимости ошибки $\max_i |u_i - u(x_i)|$ приближения точного решения $u(x)$ краевой задачи (1), (2), изображенного на верхнем графике на фиг. 1, значениями u_i, вычисленными по описанной схеме, от выбора ε при значениях $a = 1$, $b = 2$, $\lambda = 6.4$, $N = 1000$, $\delta = \varepsilon$. В данном случае ошибка имеет порядок $O(\varepsilon)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов Д.К.* Задача Штурма–Лиувилля с разрывной нелинейностью // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 9. С. 1284–1286.
2. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Solution to second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2014. № 221. P. 1–6.
3. *Llibre J., Teixeira M.A.* Periodic solutions of discontinuous second order differential systems // J. Singularities. 2014. V. 10. P. 183–190.
4. *Потапов Д.К.* Существование решений, оценки дифференциального оператора и “разделяющее” множество в краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка с разрывной нелинейностью // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 7. С. 970–974.
5. *Самойленко А.М., Нижник И.Л.* Дифференциальные уравнения с биустойчивой нелинейностью // Укр. матем. ж. 2015. Т. 67. № 4. С. 517–554.
6. *Bonanno G., D’Agui G., Winkert P.* Sturm–Liouville equations involving discontinuous nonlinearities // Minimax Theory Appl. 2016. V. 1. № 1. P. 125–143.
7. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Non-existence of periodic solutions to non-autonomous second-order differential equation with discontinuous nonlinearity // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 04. P. 1–8.
8. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of solutions for second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 124. P. 1–9.
9. *Bensid S., Diaz J.I.* Stability results for discontinuous nonlinear elliptic and parabolic problems with a S-shaped bifurcation branch of stationary solutions // Disc. Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2017. V. 22. № 5. P. 1757–1778.
10. *da Silva C.E.L., da Silva P.R., Jacquemard A.* Sliding solutions of second-order differential equations with discontinuous right-hand side // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 14. P. 5295–5306.
11. *Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.* Задача Штурма–Лиувилля для уравнения с разрывной нелинейностью // Челяб. физ.-матем. ж. 2019. Т. 4. Вып. 2. С. 142–154.
12. *da Silva C.E.L., Jacquemard A., Teixeira M.A.* Periodic solutions of a class of non-autonomous discontinuous second-order differential equations // J. Dyn. Contr. Syst. 2020. V. 26. № 1. P. 17–44.
13. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.