
ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.626

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ОБЪЕМНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ВЕЩЕСТВА¹⁾

© 2023 г. А. Ю. Горчаков¹, В. И. Зубов^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: vladimir.zubov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

Переработанный вариант 15.02.2023 г.

Принята к публикации 28.04.2023 г.

Изучение нелинейных проблем, связанных с процессом теплопередачи в веществе, очень важно для практики. Ранее авторами был предложен эффективный алгоритм определения коэффициента теплопроводности вещества на основе результатов экспериментального наблюдения за динамикой температурного поля в объекте. В данной работе исследуется возможность расширения применения предложенного алгоритма для получения численного решения задачи одновременной идентификации зависящих от температуры объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности исследуемого вещества. Рассмотрение осуществляется на основе первой краевой задачи для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Рассматриваемая обратная коэффициентная задача сводится к вариационной задаче, которая решается градиентными методами, основанными на применении методологии быстрого автоматического дифференцирования. Исследуется вопрос единственности решения обратной задачи. Библ. 26. Фиг. 9.

Ключевые слова: теплопроводность, обратные коэффициентные задачи, градиент, уравнение теплопроводности.

DOI: 10.31857/S0044466923080070, **EDN:** WSEUWS

ВВЕДЕНИЕ

Классическое уравнение теплопроводности часто используют для описания и математического моделирования разнообразных тепловых процессов. При этом входящие в уравнение теплопроводности плотность вещества, его удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности считаются известными функциями координат и температуры. Задание дополнительных краевых условий позволяет определить динамику температурного поля в изучаемом объекте.

Однако не всегда свойства вещества бывают известны. Так, при создании новых материалов приходится встречаться с ситуацией, когда объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности вещества зависят только от температуры, и эта зависимость неизвестна. В связи с этим возникает задача определения зависимости объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности вещества от температуры по результатам экспериментального наблюдения за динамикой температурного поля. К такой же задаче приходят и в том случае, когда хотят описать сложный тепловой процесс некоторой упрощенной математической моделью. Примером может служить математическое моделирование процессов распространения тепла в сложных пористых композиционных материалах, где заметную роль играет радиационная теплопередача (см. [1, 2]).

Задача определения только коэффициента теплопроводности вещества рассматривается довольно давно. Подтверждением этому может служить большое количество публикаций, посвященных указанному вопросу (см., например, [3–11]). Большое внимание в этих работах уделяется не только теоретическому исследованию обратных коэффициентных задач, но и разработке численных методов их решения. Что касается одновременного определения объемной теплоем-

¹⁾Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

кости и коэффициента теплопроводности вещества, то работ, посвященных этому вопросу, немало (см., например, [12–14]).

Все указанные выше работы посвящены решению одной и той же задачи — определению теплофизических параметров исследуемого вещества. Однако используемые математические постановки этой общей задачи в разных работах разные. Разные и методы, применяемые для решения этой задачи.

В настоящей работе рассматривается одна из возможных постановок такой обратной коэффициентной задачи. Ее рассмотрение проводится на основе первой краевой задачи для одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Обратная коэффициентная задача сводится к вариационной задаче. В качестве целевого функционала выбрано среднеквадратичное отклонение рассчитанного поля температуры в образце от его экспериментального значения. Предложен алгоритм численного решения обратной коэффициентной задачи. В основе этого алгоритма лежит современная методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология, см. [15, 16]), позволившая успешно решить ряд сложных задач оптимального управления динамическими системами (см., например, [17–19]). Приведенные в работе примеры решения обратной коэффициентной задачи демонстрируют работоспособность предложенного алгоритма. В статье, кроме того, исследуется вопрос единственности получаемого решения сформулированной обратной задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой материала ширины L . Температура этого слоя в начальный момент времени известна. Также известно, как изменяется со временем температура на краях этого слоя. Распределение температурного поля в слое в каждый момент времени описывается решением следующей начально-краевой (смешанной) задачи:

$$C(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

$$T(x, 0) = w_0(x) \quad (0 \leq x \leq L), \quad (1.2)$$

$$T(0, t) = w_1(t), \quad T(L, t) = w_2(t) \quad (0 \leq t \leq \Theta). \quad (1.3)$$

Здесь x — декартова координата точки в слое; t — время; $Q = \{(0 < x < L) \times (0 < t < \Theta)\}$; $T(x, t)$ — температура вещества в точке с координатой x в момент времени t ; $C(T)$ — объемная теплоемкость вещества, $K(T)$ — коэффициент теплопроводности; $w_0(x)$ — заданная температура слоя в начальный момент времени; $w_1(t)$ — заданная температура на левом краю слоя; $w_2(t)$ — заданная температура на правом краю слоя.

Если зависимость объемной теплоемкости вещества $C(T)$ и его коэффициента теплопроводности $K(T)$ от температуры T известна, то, решая смешанную задачу (1.1)–(1.3), найдем распределение температуры $T(x, t)$ в $\bar{Q}$. Задачу (1.1)–(1.3) ниже будем называть *прямой* задачей.

Если же зависимость объемной теплоемкости вещества и его коэффициента теплопроводности от температуры неизвестна, то представляет большой интерес задача определения этих зависимостей. Одной из возможных постановок такой задачи (эта задача относится к классу задач идентификации параметров модели) является следующая: найти такую зависимость объемной теплоемкости вещества $C(T)$ и коэффициента теплопроводности $K(T)$ от температуры T , при которой температурное поле $T(x, t)$, полученное в результате решения сформулированной задачи (1.1)–(1.3), мало отличается от поля $Y(x, t)$, полученного экспериментально. Мерой отклонения этих функций может служить величина

$$\Phi(C(T), K(T)) = \int_0^\Theta \int_0^L [T(x, t) - Y(x, t)]^2 \mu(x, t) dx dt, \quad (1.4)$$

где $\mu(x, t) \geq 0$ — заданная весовая функция. Таким образом, задача оптимального управления состоит в определении оптимального управления $\{C(T), K(T)\}$ и соответствующего оптимального решения $T(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3), при котором функционал (1.4) достигает минимального значения.

Следует отметить, что в представленной постановке задача оптимального управления всегда имеет неединственное решение. Действительно, если $\{C^*(T), K^*(T)\}$ – решение сформулированной обратной задачи, то при любом действительном числе λ управление $\{\lambda C^*(T), \lambda K^*(T)\}$ также является решением этой задачи. Для выделения единственного решения сформулированной задачи идентификации необходимо использовать дополнительное условие. В качестве такого условия может выступать, например, условие $K(T_*) = K_*$ с заданными числами T_* и K_* . Можно также при решении задачи определять отношение $\chi(T) = C(T)/K(T)$.

Задачи оптимального управления, подобные этой, обычно решаются численно с помощью некоторого метода спуска, который требует знания градиента функционала (1.4).

2. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЕ

При численном решении сформулированной задачи оптимального управления искомые функции $C(T)$ и $K(T)$, $T \in [a, b]$, аппроксимировались непрерывными кусочно-линейными функциями следующим образом. Отрезок $[a, b]$, на котором идентифицируются функции $C(T)$ и $K(T)$, разбивался точками $\tilde{T}_0 = a, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots, \tilde{T}_N = b$ на N частей (они могут быть как равными, так и неравными). Каждой из точек $\tilde{T}_n$, ($n = 0, \dots, N$) ставились в соответствие числа $c_n = C(\tilde{T}_n)$, $k_n = K(\tilde{T}_n)$. Искомые функции $C(T)$ и $K(T)$ аппроксимировались непрерывными кусочно-линейными функциями с узлами в точках $\{(\tilde{T}_n, c_n)\}_{n=0}^N$ и $\{(\tilde{T}_n, k_n)\}_{n=0}^N$, так что

$$C(T) = c_n + \frac{c_{n+1} - c_n}{\tilde{T}_{n+1} - \tilde{T}_n} (T - \tilde{T}_n) \quad \text{при} \quad \tilde{T}_n \leq T \leq \tilde{T}_{n+1} \quad (n = 0, \dots, N-1),$$

$$K(T) = k_n + \frac{k_{n+1} - k_n}{\tilde{T}_{n+1} - \tilde{T}_n} (T - \tilde{T}_n) \quad \text{при} \quad \tilde{T}_n \leq T \leq \tilde{T}_{n+1} \quad (n = 0, \dots, N-1).$$

Область $Q = \{(x, t) : (0 < x < L) \times (0 < t < \Theta)\}$ разбивалась сеточными линиями $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^I$ и $\{\tilde{t}^j\}_{j=0}^J$ на ряд прямоугольников с шагами $h_i = \tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i$, ($i = \overline{0, I-1}$), $\tau^j = \tilde{t}^j - \tilde{t}^{j-1}$, ($j = \overline{1, J}$). В каждом узле $(\tilde{x}_i, \tilde{t}^j)$ расчетной области Q , характеризуемом парой индексов (i, j) , все функции задавались своими значениями в точке $(\tilde{x}_i, \tilde{t}^j)$ (например, $T(\tilde{x}_i, \tilde{t}^j) = T_i^j$). В каждом из полученных прямоугольников требовалось выполнение закона теплового баланса. В результате получалась конечно-разностная схема, аппроксимирующая смешанную задачу (1.1)–(1.3). Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решалась итерационным методом с привлечением метода прогонки [20]. С помощью описанного подхода решалась смешанная задача (1.1)–(1.3) и находилась функция $T(x, t)$ (точнее, ее аппроксимация T_i^j).

Целевой функционал (1.4) аппроксимировался функцией $F(c_0, c_1, \dots, c_N, k_0, k_1, \dots, k_N)$ конечного числа переменных следующим образом:

$$\Phi(C(T), K(T)) \approx F = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{I-1} (T_i^j - Y_i^j)^2 \mu_i^j h_i \tau^j.$$

Для минимизации целевого функционала в работе использовался градиентный метод. Хорошо известно, что для эффективной работы градиентных методов следует использовать точное значение градиента целевой функции. Вычислить значение градиента эффективно и с машинной точностью позволяет БАД-методология (см. [15, 16, 21]). Именно применение БАД-методологии позволило успешно решить ряд сложных задач оптимального управления. В работах [17–19, 21] использовался “ручной” вариант БАД-методологии, при котором все необходимые формулы выводились вручную и использовались в оптимизационном коде. Однако появились стандартные пакеты программ, в автоматическом режиме выполняющие примерно ту же работу (см. [22–24]). В статье [25] представлены результаты сравнения градиентов, вычисленных с помощью ручной версии БАД-методологии, с помощью стандартных пакетов программ, и сделан вывод, что стандартные пакеты программ позволяют практически с той же точностью вычислять градиенты сложных функций, что и ручная версия БАД-методологии. Поэтому в настоящей работе градиент целевой функции вычислялся с помощью пакета прикладного программного обеспече-

ния Adept (см. [23]), при этом использовался обратный (Reverse, Adjoint) метод автоматического дифференцирования. Для поиска минимума целевой функции применялся метод L-BFGS-B (см. [26]).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Минимальное значение целевого функционала (1.4), получаемое при решении сформулированной обратной задачи, зависит от заданного экспериментального поля $Y(x, t)$. Если экспериментальное поле $Y(x, t)$ принадлежит области достижимости функций $T(x, t)$, построенных в результате решения прямой задачи (1.1)–(1.3) при допустимых $C(T)$ и $K(T)$, то значение функционала равно нулю. В противном случае значение функционала больше нуля. При проведении численных экспериментов экспериментальное поле температур $Y(x, t)$ выбиралось из области достижимости решений прямой задачи.

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма было выполнено большое число тестовых расчетов. Эти расчеты условно можно разделить на две группы.

Все примеры первой группы базировались на том, что функция

$$T_*(x, t) = \left(\frac{n+1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\alpha(t + \gamma - x)]^{\frac{1}{m-n}},$$

$$\alpha = \frac{(m-n)}{(n+1)}, \quad \beta = (n+1)^{\frac{m-n}{m+1}},$$

является аналитическим решением уравнения (1.1) при $\gamma = \text{const}$, $C(T) = \beta T^n$, $K(T) = T^m$.

В соответствии с этим использовались следующие входные данные задачи:

$$L = 1, \quad \Theta = 1, \quad \gamma = 1.5, \quad Q = (0, 1) \times (0, 1),$$

$$w_0(x) = T_*(x, 0) = \left(\frac{n+1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\alpha(\gamma - x)]^{\frac{1}{m-n}} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$w_1(t) = T_*(0, t) = \left(\frac{n+1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\alpha(t + \gamma)]^{\frac{1}{m-n}} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$w_2(t) = T_*(1, t) = \left(\frac{n+1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}} [\alpha(t + \gamma - 1)]^{\frac{1}{m-n}} \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$Y(x, t) = T_*(x), \quad (x, t) \in Q,$$

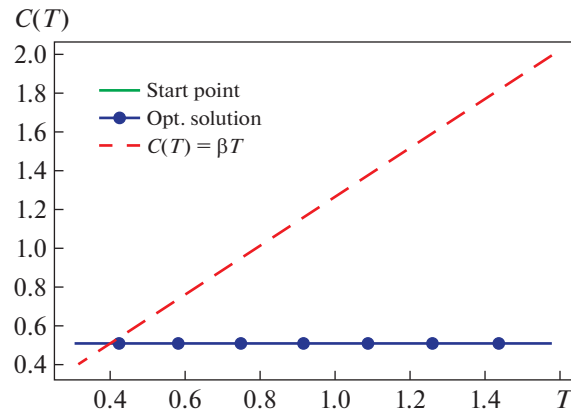
$$a = \min_{(x,t) \in Q} Y(x, t), \quad b = \max_{(x,t) \in Q} Y(x, t).$$
(3.1)

При решении прямой задачи использовалась равномерная сетка с параметрами $I = 40$ (количество интервалов вдоль оси x), $J = 700$ (количество интервалов вдоль оси t), которая обеспечивает достаточную точность вычисления поля температур и поля импульсов (сопряженных переменных). Отрезок $[a, b]$ разбивался на 80 интервалов ($N = 80$).

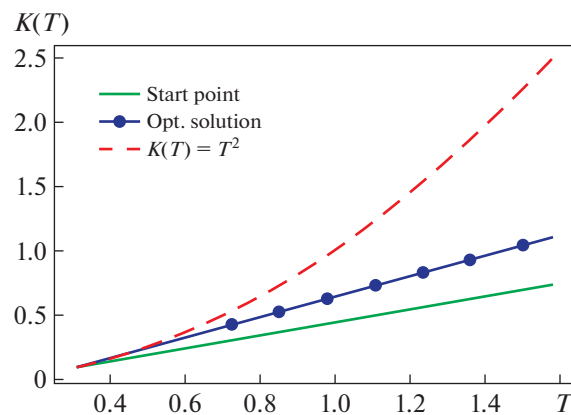
В первом примере первой группы расчетов рассматривалась задача нахождения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности с входными данными (3.1) при $m = 2$ и $n = 1$. При этом полагалось, что в целевом функционале (1.4) весовая функция $\mu(x) \equiv 1$. Как отмечалось в разд. 1, решение сформулированной задачи идентификации неединственно. Поэтому при решении задачи идентификации объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности использовалось дополнительное условие $K(a) = a^m$.

Вначале при решении задачи оптимизации функционала (1.4) в качестве начального приближения выбирались функции $C(T) = 0.5$ и $K(T) = 0.5 \cdot T$. Результаты полученного решения обратной задачи представлены на фиг. 1 (функция $C(T)$) и фиг. 2 (функция $K(T)$).

В результате минимизации целевого функционала (1.4) оптимальная функция $C(T)$ (Opt. solution) не изменилась по сравнению с начальным приближением (Start point). На фиг. 1 они нераз-



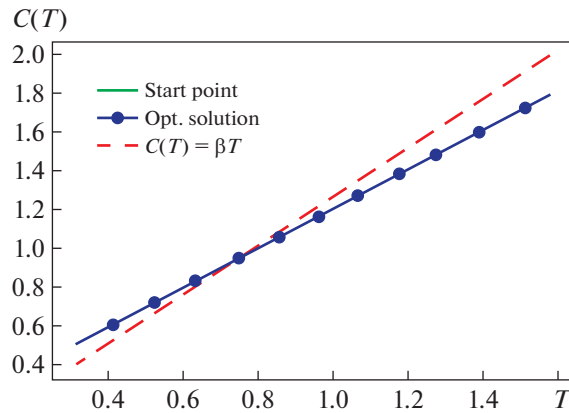
Фиг. 1. Распределение объемной теплоемкости.



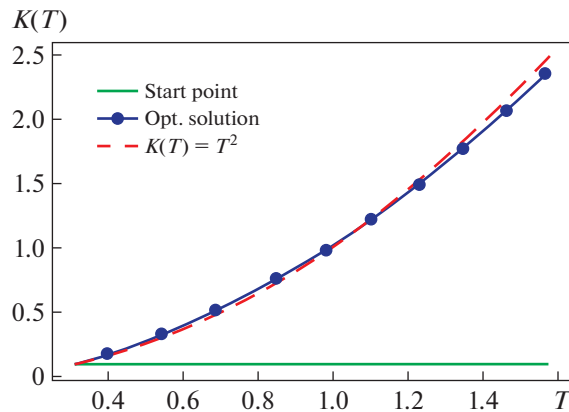
Фиг. 2. Распределение коэффициента теплопроводности.

личимы. Однако полученная функция $C(T)$ отличается от ожидавшегося вида $C(T) = \beta T$ (штриховая линия). Что касается функции $K(T)$, то здесь оптимальное решение (Opt. solution) уже отличается от начального приближения, оставаясь при этом линейной функцией. И опять оптимальное решение отличается от ожидавшегося вида $K(T) = T^2$ (штриховая линия). Отметим при этом, что полученное распределение по температуре отношения $\frac{K'(T)}{C(T)}$ хорошо совпадает с теоретическим значением $\frac{2}{\beta} = 2^{2/3}$, получаемым при $C(T) = \beta T$ и $K(T) = T^2$.

На следующем шаге при решении той же задачи оптимизации функционала (1.4) в качестве начального приближения для функции $C(T)$ была выбрана линейная функция (на фиг. 3 она обозначена как “Start point” и совпадает с “Opt. solution”), а для функции $K(T)$ — постоянная функция, проходящая через точку (a, a^2) (на фиг. 4 она обозначена как “Start point”). В результате решения задачи оптимизации получены оптимальные управления, обозначенные на фиг. 3 и фиг. 4 как “Opt. solution”. Эти фигуры показывают следующее. Оптимальная функция $C(T)$ не отличается от начального приближения, но не совпадает с ожидаемой функцией $C(T) = \beta T$ (штриховая линия на фиг. 3). Оптимальная функция $K(T)$ представляет собой параболу, проходящую через точку (a, a^2) , но также не совпадает с ожидаемой функцией $K(T) = T^2$ (штриховая линия на фиг. 4). Интересным также представляется тот факт, что отношение $\frac{K'(T)}{C(T)}$, как и в



Фиг. 3. Распределение объемной теплоемкости.



Фиг. 4. Распределение коэффициента теплопроводности.

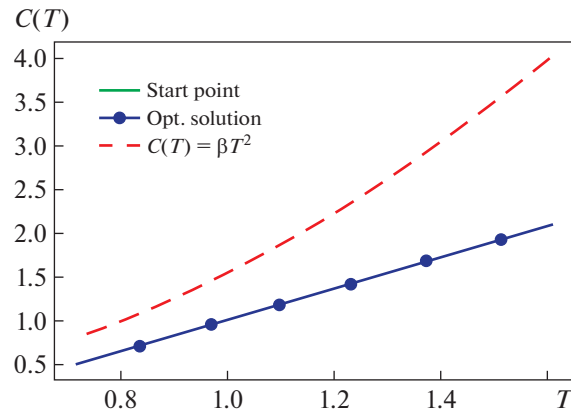
предыдущем случае, остается практически постоянным на отрезке $[a, b]$ изменения температуры и хорошо совпадает с теоретическим значением $\frac{2}{\beta} = 2^{2/3}$, получаемым при $C(T) = \beta T$ и $K(T) = T^2$.

Наконец, при решении той же задачи оптимизации в качестве начальных приближений выбирались “ожидаемые” функции, а именно, $C(T) = \beta T$, $K(T) = T^2$, $\beta = \sqrt[3]{2}$ (эти функции на предыдущих фигурах выделялись штриховыми линиями). В результате оптимизации эти функции практически не изменились. Небольшие изменения, на графиках совершенно не видные, связаны с аппроксимацией как самих функций, так и дифференциального уравнения. Отношение $\frac{K'(T)}{C(T)}$, построенное на основе полученного оптимального решения, отличается от точного не более, чем на 10^{-10} .

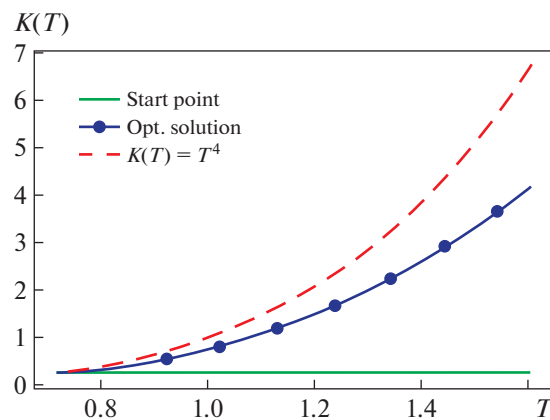
Отметим также, что во всех рассмотренных случаях отношение $\chi(T) = C(T)/K(T)$ представляло собой разные функции для разных вариантов.

Во втором примере первой группы расчетов рассматривалась задача нахождения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности с входными данными (3.1) при $m = 4$ и $n = 2$. При этом, как и раньше, полагалось, что в целевом функционале (1.4) весовая функция $\mu(x) \equiv 1$. При решении задачи идентификации объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности использовалось дополнительное условие $K(a) = a^m$.

Вначале при решении сформулированной задачи оптимизации функционала (1.4) в качестве начального приближения для функции $C(T)$ была выбрана линейная функция (на фиг. 5 она



Фиг. 5. Распределение объемной теплоемкости.

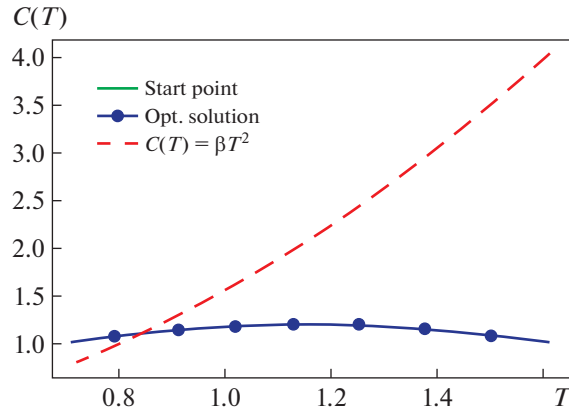


Фиг. 6. Распределение коэффициента теплопроводности.

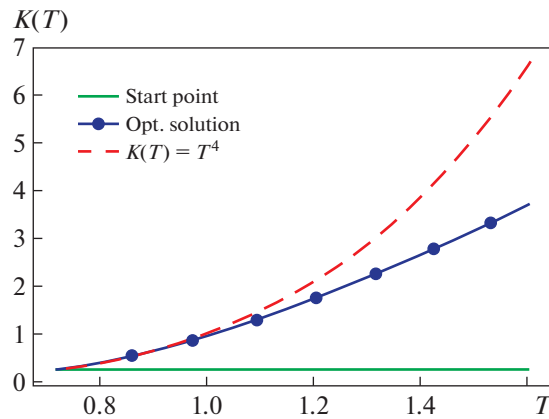
обозначена как “Start point” и совпадает с “Opt. solution”), а для функции $K(T)$ — постоянная функция, проходящая через точку (a, a^4) (на фиг. 6 она обозначена как “Start point”). В результате решения задачи оптимизации получены оптимальные управления, обозначенные на фиг. 5 и фиг. 6 как “Opt. solution”. Эти фигуры показывают следующее. Оптимальная функция $C(T)$ не отличается от начального приближения, но не совпадает с ожидаемой функцией $C(T) = \beta T^2$ (штриховая линия на фиг. 5). Оптимальная функция $K(T)$ представляет собой кубическую параболу, проходящую через точку (a, a^4) . Она также не совпадает с ожидаемой функцией $K(T) = T^4$ (штриховая линия на фиг. 6).

Далее, задача из второго примера первой группы расчетов решалась в случае, когда в качестве начальных приближений выбирались следующие функции, а именно, $C(T) = (T - a)(b - T) + 1$ (см. фиг. 7), $K(T) = a^4$ (см. фиг. 8) (эти функции на фиг. 7 и фиг. 8 выделялись сплошными линиями). В результате оптимизации функция $C(T)$ практически не изменилась (на фиг. 7 начальное приближение и оптимальное решение неразличимы). Что касается функции $K(T)$, то оптимальное решение приближенно имеет вид кубической параболы (см. фиг. 8).

Наконец, при решении задачи оптимизации в качестве начальных приближений выбирались “ожидаемые” функции, а именно, $C(T) = \beta T^2$, $K(T) = T^4$, $\beta = \sqrt[5]{9}$ (эти функции на предыдущих фигурах выделялись штриховыми линиями). В результате оптимизации эти функции практически не изменились. Небольшие изменения, на графиках совершенно не видимые, связаны с ап-



Фиг. 7. Распределение объемной теплоемкости.



Фиг. 8. Распределение коэффициента теплопроводности.

проксимацией как самих функций, так и дифференциального уравнения. Отношение $\frac{K'(T)}{C(T)}$, построенное на основе оптимального решения, отличается от точного не более, чем на 10^{-10} .

Как и в первом примере первой группы, здесь во всех рассмотренных случаях отношение $\chi(T) = C(T)/K(T)$ представляло собой разные функции для разных вариантов.

Задача нахождения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности с входными данными (3.1) решалась и при других значениях параметров m и n . На основе результатов, полученных при решении всех обратных задач первой группы, можно сделать вывод о том, что решение задачи определения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности является неединственным.

В качестве первого примера второй группы рассмотрим обратную задачу (1.1)–(1.4) со следующими входными данными:

$$\begin{aligned}
 L &= 1, \quad \Theta = 1, \quad Q = (0,1) \times (0,1), \\
 w_0(x) &= x^2 \quad (0 \leq x \leq 1), \\
 w_1(t) &= T_*(0,t) = t, \quad w_2(t) = T_*(1,t) = t+1 \quad (0 \leq t \leq 1), \\
 Y(x,t) &= T_*(x,t) = x^2 + t, \quad (x,t) \in Q. \\
 a &= 0, \quad b = 2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что функция $T_*(x, t) = x^2 + t$ является аналитическим решением уравнения (1.1) при $C(T) = 2$ и $K(T) = 1$, так что пара $\{C(T), K(T)\} = \{2, 1\}$ и функция $T_*(x, t) = x^2 + t$ являются оптимальным управлением и соответствующим оптимальным решением обратной задачи (1.1)–(1.4) с данными (3.2).

Сформулированная задача решалась численно при разных начальных приближениях, например, $C(T) = 2T$, $K(T) = \frac{1}{4}T^2$, $K(2) = 1$. Независимо от начального приближения получалось одно и то же решение $C(T) = 2$, $K(T) = 1$ с точностью 10^{-12} в норме C . Как оказалось, это связано со спецификой используемого экспериментального поля температур. Объяснить единственность получаемого решения можно следующим образом.

В предположении, что функция $T(x, t) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, $C(T) \in C([a, b])$, $K(T) \in C^1([a, b])$, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$C(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - K(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (3.3)$$

Подставив функцию $T_*(x, t) = x^2 + t$ в уравнение (3.3), получим равенство, справедливое для всех $(x, t) \in Q$

$$C(T_*) \times 1 - K'(T_*) \times 4x^2 - K(T_*) \times 2 = 0.$$

Отсюда следует, что вдоль произвольной изотермы $x^2 + t = \tau$, ($\tau \in (0, 2)$) поля $T_*(x, t)$ должно быть выполнено соотношение

$$[C(\tau) - 2K(\tau)] = K'(\tau) \times 4x^2, \quad \tau = \text{const}, \quad x \in \begin{cases} (0, \sqrt{\tau}), & 0 < \tau \leq 1, \\ (\sqrt{\tau-1}, 1), & 1 < \tau < 2, \end{cases}$$

что возможно лишь при $K'(\tau) = 0$, $C(\tau) = 2K(\tau)$. Принимая во внимание условие $K(2) = 1$, получаем решение обратной задачи $C(T) = 2$, $K(T) = 1$.

Во втором примере второй группы рассматривалась обратная задача (1.1)–(1.4) с такими входными данными:

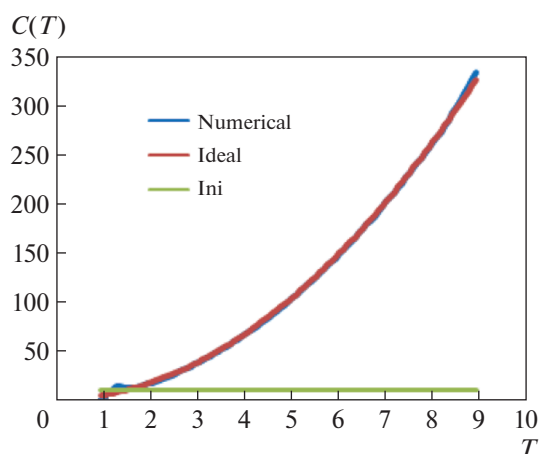
$$\begin{aligned} L &= 1, \quad \Theta = 1, \quad Q = (0, 1) \times (0, 1), \\ w_0(x) &= 9/(x+1) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ w_1(t) &= 9/(5t+1) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ w_2(t) &= 9/(7t+2) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ Y(x, t) &= T_{**}(x, t) \quad (x, t) \in Q, \\ a &= 1, \quad b = 9, \quad K(1) = 1, \end{aligned}$$

где экспериментальное поле $Y(x, t) = T_{**}(x, t)$ строилось численно как решение следующей смешанной задачи (1.1)–(1.3):

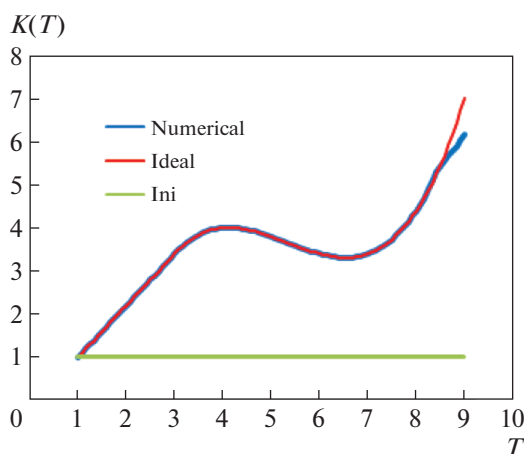
$$\begin{aligned} C(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) &= 0 \quad (0 < x < 1), \quad (0 < t < 1), \\ T(x, 0) &= 9/(x+1) \quad (0 \leq x \leq 1), \\ T(0, t) &= 9/(5t+1) \quad (0 \leq t \leq 1), \\ T(L, t) &= 9/(7t+2) \quad (0 \leq t \leq 1), \end{aligned}$$

при

$$K(T) = \begin{cases} 0.1(T-3)(T-6)(T-7) + 3.4, & T \geq 3, \\ 1.2(T-3) + 3.4, & T < 3. \end{cases}$$



Фиг. 9. Распределение объемной теплоемкости.



Фиг. 10. Распределение коэффициента теплопроводности.

$$C(T) = 4T^2, \quad T \in [a, b] \quad a = 1, \quad b = 9.$$

Здесь, как и в первом примере второй группы, обратная задача решалась численно при разных начальных приближениях. Независимо от начального приближения получалось одно и то же решение с высокой точностью. На фиг. 9 и фиг. 10 представлены результаты решения задачи при начальном приближении $C(T) = 10$, $K(T) = 1$, которые подтверждают, что единственное решение определяется предложенным алгоритмом с высокой точностью.

Вторая группа рассмотренных примеров позволяет заключить, что существуют такие поля из области достижимости, при которых решение обратной задачи определения объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности является единственным.

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что единственность решения задачи одновременной идентификации объемной теплоемкости и коэффициента теплопроводности в предложенной постановке существенно зависит от используемого экспериментального поля. Эти эксперименты позволили сделать некоторые выводы.

Обоснование этих выводов проведем при следующих предположениях.

Искомые объемная теплоемкость $C(T)$ и коэффициент теплопроводности $K(T)$ должны принадлежать области определения, т.е. удовлетворять условиям: $C(T) \in C([a, b])$, $K(T) \in C^1([a, b])$, $C(T) > 0$, $K(T) > 0$, для всех $T \in [a, b]$. Под областью достижимости будем понимать множество функций $T(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{Q}) \cap C(\bar{Q})$ таких, что они удовлетворяют заданным условиям (1.2), (1.3) и для каждой из них в области определения найдутся функции $C(T)$ и $K(T)$, при которых $T(x, t)$ является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3).

При таких предположениях уравнение (1.1) можно представить в виде (3.3).

Далее, под τ -изолинией функции $T(x, t)$ будем понимать, как это принято, множество точек (x, t) области Q , в которых значение функции $T(x, t)$ имеет одно и то же значение τ . При этом отметим, что изолиния (множество) может представлять собой объединение нескольких, не связанных между собой линий.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть функция $T(x, t)$ принадлежит области достижимости. Если на некоторой τ -изолинии, $T(x, t) = \tau \in [a, b]$, функции $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$, рассматриваемые как функции некоторого параметра s вдоль этой изолинии, являются линейно независимыми, то отношение $\chi(T) = \frac{C(T)}{K(T)}$ имеет единственное значение при $T = \tau$.

Действительно, пусть у обратной задачи имеются два решения: $\{C_1(T), K_1(T)\}$ и $\{C_2(T), K_2(T)\}$ с двумя разными отношениями: $\chi_1(T) = \frac{C_1(T)}{K_1(T)}$ и $\chi_2(T) = \frac{C_2(T)}{K_2(T)}$. Это означает, что для всех $(x, t) \in Q$ справедливы два равенства типа (3.3):

$$C_1(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K_1'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2 - K_1(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (4.1)$$

$$C_2(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K_2'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2 - K_2(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.2)$$

Разделим обе части соотношения (4.1) на $K_1(T) > 0$, а обе части соотношения (4.2) на $K_2(T) > 0$. Разность получившихся при этом соотношений имеет вид, справедливый для всех $(x, t) \in Q$:

$$\left(\frac{C_1(T)}{K_1(T)} - \frac{C_2(T)}{K_2(T)}\right) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \left(\frac{K_1'(T)}{K_1(T)} - \frac{K_2'(T)}{K_2(T)}\right) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (4.3)$$

В точках τ -изолинии $T(x, t) = \tau$ линейная независимость функций $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$ вместе с условием (4.3) позволяют заключить, что

$$\frac{C_1(\tau)}{K_1(\tau)} = \frac{C_2(\tau)}{K_2(\tau)}, \quad \frac{K_1'(\tau)}{K_1(\tau)} = \frac{K_2'(\tau)}{K_2(\tau)}, \quad (4.4)$$

т.е. значения отношений $\chi(\tau) = \frac{C(\tau)}{K(\tau)}$ и $\nu(\tau) = \frac{K'(\tau)}{K(\tau)}$ одинаковые для всех возможных решений обратной задачи.

Теорема 1. Пусть функция $T(x, t)$ принадлежит области достижимости. Если на каждой τ -изолинии отрезка $\tau \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ функции $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$, рассматриваемые как функции некоторого параметра s вдоль этой изолинии, являются линейно независимыми, то для любого решения $\{C(T), K(T)\}$ обратной задачи отношение $\chi(T) = \frac{C(T)}{K(T)}$, $T \in [\alpha, \beta]$, представляет собой одну и ту же функцию.

Для доказательства теоремы 1 допустим существование двух решений $\{C_1(T), K_1(T)\}$ и $\{C_2(T), K_2(T)\}$ обратной задачи (1.1)–(1.4) с разными отношениями $\chi_1(T)$ и $\chi_2(T)$. На основании леммы 1 можно утверждать, что для всех $\tau \in [\alpha, \beta]$ справедливы равенства (4.4), т.е.

$$\frac{C_1(\tau)}{K_1(\tau)} = \frac{C_2(\tau)}{K_2(\tau)}, \quad \frac{K_1'(\tau)}{K_1(\tau)} = \frac{K_2'(\tau)}{K_2(\tau)}, \quad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Первое из равенств показывает, что вдоль всего отрезка $T \in [\alpha, \beta]$ отношение $\chi(T) = \frac{C(T)}{K(T)}$ является функцией, не зависящей от решения обратной задачи. Интегрирование второго равенства позволяет заключить, что на отрезке $T \in [\alpha, \beta]$ отношение разных коэффициентов теплопроводности остается постоянным, т.е. $\frac{K_1(T)}{K_2(T)} = \text{const}$. Учитывая замечание, сделанное в конце разд. 1,

можно утверждать, что при сформулированных в теореме 1 условиях все решения рассматриваемой обратной задачи определяются с точностью до множителя. Если же при формулировке задачи идентификации (1.1)–(1.4) дополнительно задано условие $K(T_*) = K_*$ с заданными числами $T_* \in [\alpha, \beta]$ и K_* , то решение обратной задачи на отрезке $T \in [\alpha, \beta]$ будет единственным, хотя вне этого отрезка $T \in [a, b] \setminus [\alpha, \beta]$ решения $\{C_1(T), K_1(T)\}$ и $\{C_2(T), K_2(T)\}$ могут различаться.

Замечание 1. Примером, иллюстрирующим теорему 1, может служить первый пример второй группы (см. (3.2)). В нем функция $T(x, t) = x^2 + t$, производные $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 2x$, и функции 1 и $4x^2$ линейно независимы вдоль любой изолинии $x^2 + t = \tau$, ($\tau \in (0, 2)$) поля $T(x, t)$. Как показано в разд. 3, при дополнительном условии решение обратной задачи единственно.

Теорема 2. Пусть функция $T(x, t)$ принадлежит области достижимости. Если на каждой τ -изолинии отрезка $\tau \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ функции $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$, рассматриваемые как функции некоторого параметра s вдоль этой изолинии, являются линейно зависимыми и функция $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$ не равна тождественно нулю, то решение $\{C(T), K(T)\}$ обратной задачи неединственно (имеются решения с разными отношениями $\chi(T) = \frac{C(T)}{K(T)}$).

Для доказательства теоремы 2 вначале обратим внимание на линейную зависимость функций $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$ вдоль каждой τ -изолинии отрезка $\tau \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Это означает, что существуют функции $A(T)$ и $B(T)$, $T \in [\alpha, \beta]$, такие что

$$A(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + B(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

причем $A^2(T) + B^2(T) > 0$. Более того, $A(T) \neq 0$ для всех $T \in [\alpha, \beta]$. Действительно, предположив, что $A(\tau) = 0$ для какого-то значения $\tau \in [\alpha, \beta]$, придем к противоречию с условием отличия от тождественного нуля производной $\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$. Таким образом, справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \tilde{B}(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2, \quad (4.5)$$

где $\tilde{B}(T) = -\frac{B(T)}{A(T)} \in C([\alpha, \beta])$.

Так как функция $T(x, t)$ принадлежит области достижимости, то существуют функции $C_*(T)$ и $K_*(T)$ из области определения, при которых функция $T(x, t)$ является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3). Покажем, что в области определения кроме них найдутся другие функции $C(T)$ и $K(T)$, при которых эта функция $T(x, t)$ является решением смешанной задачи (1.1)–(1.3).

Пусть $\psi(T) \in \overset{0}{C}([\alpha, \beta])$ – произвольная положительная функция. Определим функции $f(T) \in C([\alpha, \beta])$ и $\sigma(T) \in C^1([\alpha, \beta])$ соотношениями

$$f(T) = \frac{K_*'(T)}{K_*(T)} + \tilde{B}(T)\psi(T), \quad \sigma(T) = \exp \left[\int_{\alpha}^T f(\xi) d\xi \right].$$

Построим новые объемную теплоемкость $C(T)$ и коэффициент теплопроводности $K(T)$:

$$K(T) = \begin{cases} K_*(T), & a \leq T < \alpha, \\ K_*(\alpha)\sigma(T), & \alpha \leq T \leq \beta, \\ K_*(T)K_*(\alpha)\sigma(\beta)/K_*(\beta), & \beta < T \leq b, \end{cases} \quad (4.6)$$

$$C(T) = \begin{cases} C_*(T), & a \leq T < \alpha, \\ K(T)(C_*(T)/K_*(T) + \psi(T)), & \alpha \leq T \leq \beta, \\ C_*(T)K(T)/K_*(T), & \beta < T \leq b, \end{cases}$$

и покажем, что они также являются решением обратной задачи для рассматриваемой функции-поля $T(x, t)$ из области достижимости.

Во-первых, непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что построенные функции $K(T) \in C^1([a, b])$, $C(T) \in C([a, b])$ и что при всех $T \in [\alpha, \beta]$ справедливо соотношение

$$\frac{K'(T)}{K(T)} - \tilde{B}(T) \frac{C(T)}{K(T)} = \frac{K_*'(T)}{K_*(T)} - \tilde{B}(T) \frac{C_*(T)}{K_*(T)}, \quad (4.7)$$

а при всех $T \in [a, \alpha]$ и $T \in [\beta, b]$ – соотношения

$$\frac{K'(T)}{K(T)} = \frac{K_*'(T)}{K_*(T)}, \quad \frac{C(T)}{K(T)} = \frac{C_*(T)}{K_*(T)}. \quad (4.8)$$

Во-вторых, используя эти соотношения, покажем, что при заданной в условии теоремы 2 функции $T(x, t)$ уравнение (3.3) выполняется не только при заданных $(C_*(T), K_*(T))$, но и при построенных $(C(T), K(T))$. Действительно, в тех точках области Q , в которых $T \in [a, \alpha]$ или $T \in [\beta, b]$, имеем

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\equiv C(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - K(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = K(T) \left[\frac{C(T)}{K(T)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{K'(T)}{K(T)} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = K(T) \left[\frac{C_*(T)}{K_*(T)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{K_*'(T)}{K_*(T)} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = \\ &= \frac{K(T)}{K_*(T)} \left[C_*(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K_*'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - K_*(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Здесь использовались соотношения (4.8).

В тех же точках области Q , в которых $T \in [\alpha, \beta]$, имеем

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &\equiv C(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - K'(T) \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - K(T) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \\ &= K(T) \left[\frac{C(T)}{K(T)} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} - \frac{K'(T)}{K(T)} \left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = \\ &= (\text{используем условие (4.7)}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K(T) \left\{ \frac{C(T)}{K(T)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \left[\frac{K'_*(T)}{K_*(T)} - \tilde{B}(T) \left(\frac{C_*(T)}{K_*(T)} - \frac{C(T)}{K(T)} \right) \right] \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right\} = \\
&= K(T) \left\{ \frac{C(T)}{K(T)} \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \tilde{B}(T) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] - \left[\frac{K'_*(T)}{K_*(T)} - \tilde{B}(T) \frac{C_*(T)}{K_*(T)} \right] \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right\} = \\
&= (\text{используем условие (4.5) в первой квадратной скобке}) = \\
&= K(T) \left\{ \frac{C_*(T)}{K_*(T)} \tilde{B}(T) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{K'_*(T)}{K_*(T)} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right\} = \\
&= (\text{используем условие (4.5) в первом слагаемом}) = \\
&= K(T) \left\{ \frac{C_*(T)}{K_*(T)} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \frac{K'_*(T)}{K_*(T)} \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right\} = \\
&= \frac{K(T)}{K_*(T)} \left[C_*(T) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - K'_*(T) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 - K_*(T) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, обратная задача, кроме функций $C_*(T)$ и $K_*(T)$, имеет другое, построенное решение $C(T)$ и $K(T)$, причем $\frac{C(T)}{K(T)} \neq \frac{C_*(T)}{K_*(T)}$.

Замечание 2. Пусть заданная функция $T(x,t)$ принадлежит области достижимости. Пусть на каждой τ -изолинии отрезка $\tau \in [a, b]$ функции $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2$, рассматриваемые как функции некоторого параметра s вдоль этой изолинии, являются линейно зависимыми и связаны соотношением (4.5). Тогда для всех $T \in [a, b]$ функция $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ обязательно имеет вид

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = R(T) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2, \quad (4.9)$$

где $R(T) \in C([a, b])$ однозначно определяется полем $T(x,t)$. Действительно, используя в уравнении (3.3) выражение (4.5), можно получить

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{C(T)}{K(T)} \tilde{B}(T) - \frac{K'(T)}{K(T)} \right) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2 = R(T) \left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2.$$

Так как функции $\tilde{B}(T)$ и $R(T)$ однозначно определяются заданным полем $T(x,t)$ из области достижимости, то $C(T)$ и $K(T)$ должны быть связаны следующим соотношением:

$$K'(T) + R(T)K(T) - C(T)\tilde{B}(T) = 0. \quad (4.10)$$

Следовательно, функции $C(T)$ и $K(T)$ могут быть любыми, удовлетворяющими уравнению (4.10). Задав произвольно $K(T) \in C^1([a, b])$, из (4.10) можно однозначно определить $C(T) \in C([a, b])$. И наоборот, задав $C(T) \in C([a, b])$ и значение $K(T)$ в некоторой точке отрезка $[a, b]$, можно однозначно определить $K(T) \in C^1([a, b])$ как решение задачи Коши. Именно с такой неоднозначностью и приходилось сталкиваться при идентификации $C(T)$ и $K(T)$ в первой группе расчетов.

Зададимся теперь обратным вопросом: какие поля температуры $T(x,t)$ из области достижимости удовлетворяют условиям теоремы 2? Как отмечено в замечании 2, если функции $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right)^2$ являются линейно зависимыми вдоль каждой τ -изолинии отрезка $\tau \in [a, b]$, то спра-

ведливо равенство (4.9). С помощью функции $V(T) = \int_a^T R(\xi) d\xi$ равенство (4.9) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = R(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial V(T(x, t))}{\partial x}, \quad (x, t) \in Q,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \left| \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right| - V(T(x, t)) \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \rho_1(t) \exp(V(T(x, t))).$$

Если ввести новую функцию $G(T) = \int_a^T \exp(-V(\xi)) d\xi$, то последнее равенство может быть записано в виде

$$\exp(-V(T(x, t))) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial G(T(x, t))}{\partial x} = \rho_1(t),$$

интегрируя которое, получим $G(T(x, t)) = q(x, t) = \rho_1(t)x + \rho_2(t)$, где $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ — произвольные гладкие функции. Так как $G(T) \in C^2([a, b])$ и является монотонной, то существует функция $S(T) = G^{-1}(T) \in C^2([a, b])$, обратная к $G(T)$. Поэтому

$$T(x, t) = S(q) = S(\rho_1(t)x + \rho_2(t)). \quad (4.11)$$

По условию теоремы 2 функции $\frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$ и $\left(\frac{\partial T(x, t)}{\partial x}\right)^2$ являются линейно зависимыми на каждой изотерме. Следовательно, они связаны соотношением (4.5). Вычислив производные функции $T(x, t)$ с помощью равенства (4.11) и подставив в соотношение (4.5), получим

$$S'(q)(\rho_1'(t)x + \rho_2'(t)) = \tilde{B}(T)(S'(q))^2 \rho_1^2(t) \quad \text{или} \quad \rho_1'(t)x + \rho_2'(t) = \tilde{B}(S(q))S'(q)\rho_1^2(t). \quad (4.12)$$

Так как левая часть равенства (4.12) представляет собой линейную функцию переменной x , то функция $\tilde{B}(S(q))S'(q)$ должна быть линейной по переменной q , т.е. иметь вид $\tilde{B}(S(q))S'(q) = \omega_1 q + \omega_2$, где ω_1 и ω_2 — произвольные постоянные. Используя полученное представление функции $\tilde{B}(S(q))S'(q)$ в равенстве (4.12), найдем

$$\rho_1'(t)x + \rho_2'(t) = [\omega_1(\rho_1(t)x + \rho_2(t)) + \omega_2]\rho_1^2(t). \quad (4.13)$$

Равенство (4.13) справедливо для всех $(x, t) \in Q$, если неизвестные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\rho_1'(t) = \omega_1 \rho_1^3(t), \quad \rho_2'(t) = \rho_1^2(t)(\omega_1 \rho_2(t) + \omega_2). \quad (4.14)$$

При $\omega_1 = 0$ система уравнений (4.14) имеет следующее решение:

$$\rho_1(t) = \lambda_1, \quad \rho_2(t) = \omega_2 \lambda_1^2 t + \lambda_2, \quad (4.15)$$

а при $\omega_1 \neq 0$

$$\rho_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 - 2\omega_1 t}},$$

$$\rho_2(t) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1 - 2\omega_1 t}} - \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \sigma_1 - 2\omega_1 t > 0 \quad (4.16)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2$ — произвольные константы.

Таким образом, определенная выше функция $q(x, t) = \rho_1(t)x + \rho_2(t)$ может иметь только такой вид $q(x, t) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 t + \varepsilon_3$, либо такой вид $q(x, t) = \frac{x + \varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 t}} + \varepsilon_4$, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 t > 0$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ — произвольные постоянные, а поле $T(x, t)$ из области достижимости, при котором решение обратной задачи неединственно — вид $T(x, t) = S(q(x, t))$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться

ся в том, что это утверждение верно для любых констант $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, лишь бы в области $(x, t) \in Q$ выполнялось условие $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 t) > 0$.

Замечание 3. Все примеры первой группы расчетов иллюстрируют полученное утверждение при $q(x, t) = \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 t + \varepsilon_3$. Действительно, использовавшиеся там экспериментальные поля имели вид $T(x, t) = S(q(x, t)) = S(\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 t + \varepsilon_3)$ и получалось неединственное решение. Что касается

случая $q(x, t) = \frac{x + \varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 t}} + \varepsilon_4$, то, как подтвердили проведенные расчеты, при экспериментальном

поле $T(x, t) = \frac{x^2}{t} = S(q(x, t)) = q^2(x, t) = \left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2$ обратная задача имеет неединственное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена одна из возможных постановок обратной коэффициентной задачи, позволяющая по результатам наблюдения за динамикой температурного поля одновременно идентифицировать зависящие от температуры объемную теплоемкость вещества и его коэффициент теплопроводности. Отмечено, что в такой постановке искомые коэффициенты могут быть найдены с точностью до одного и того же множителя. Предложен численный алгоритм решения этой задачи. Результатом решения обратной задачи являются как искомые параметры вещества, так и температурное поле, в общем случае, не совпадающее с экспериментально заданным полем. Найденное поле принадлежит области достижимости и является ближайшим к экспериментальному полю в норме пространства L_2 . Свойства именно этого поля из области достижимости определяют, будет ли решение обратной задачи единственно. Найден класс температурных полей из области достижимости, для которых обратная задача имеет неединственное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зверев В.Г., Гольдин В.Д., Назаренко В.А.* Радиационно-кондуктивный теплоперенос в волокнистой термостойкой изоляции при тепловом воздействии // Теплофиз. высоких температур. 2008. Т. 46. № 1. С. 119–125.
2. *Алифанов О.М., Черепанов В.В.* Математическое моделирование высокопористых волокнистых материалов и определение их физических свойств // Теплофиз. высоких температур. 2009. Т. 47. № 3. С. 463–472.
3. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностр., 1988.
4. *Yeung W.K., Lam T.T.* Second-order finite difference approximation for inverse determination of thermal conductivity // Internat. Journal of Heat Mass Transfer. 1996. V. 39. P. 3685–3693.
5. *Chen H.T., Lin J.Y., Wu C.H., Huang C.H.* Numerical algorithm for estimating temperature-dependent thermal conductivity // Numerical Heat Transfer. 1996. V. B29. P. 509–522.
6. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
7. *Kim S., Kim M.C., Kim K.Y.* Non-iterative estimation of temperature dependent thermal conductivity without internal measurements // Internat. Journal of Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 1891–1810.
8. *Majchrzak E., Freus K., Freus S.* Identification of temperature dependent thermal conductivity using the gradient method // J. of Appl. Math. and Comput. Mech. 2006. V. 5. Issue 1. P. 114–123.
9. *Balazs Czel, Gyula Grof.* Inverse identification of temperature-dependent thermal conductivity via genetic algorithm with cost function-based rearrangement of genes // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. № 15. P. 4254–4263.
10. *Matsevityi Yu.M., Alekhina S.V., Borukhov V.T., Zayats G.M., Kostikov A.O.* Identification of the Thermal Conductivity Coefficient for Quasi-Stationary Two-Dimensional Heat Conduction Equations // J. of Engng Phys. and Thermophys. 2017. V. 90. № 6. P. 1295–1301.
11. *Evtushenko Y., Zubov V., Albu A.* Inverse coefficient problems and fast automatic differentiation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2022. V. 30 (3). P. 447–460.
12. *Huang C.H., Yan J.Y.* An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity // Internat. Journal of Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 3433–3441.
13. *Imani A., Ranjbar A.A., Esmkhani M.* Simultaneous estimation of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity based on modified genetic algorithm // Inverse Problems in Sci. and Engng. 2006. V. 14. № 7. P. 767–783.

14. *Miao Cui, Kai Yang, Xiao-liang Xu, Sheng-dong Wang, Xiao-wei Gao.* A modified Levenberg-Marquardt algorithm for simultaneous estimation of multi-parameters of boundary heat flux by solving transient nonlinear inverse heat conduction problems // *Internat. Journal of Heat and Mass Transfer.* 2016. V. 97. P. 908–916.
15. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 144 с.
16. *Евтушенко Ю.Г., Zubov B.И.* Об обобщенной методологии быстрого автоматического дифференцирования // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 11. С. 1847–1862.
17. *Евтушенко Ю.Г., Засухина Е.С., Zubov B.И.* О численном подходе к оптимизации решения задачи Бюргерса с помощью граничных условий // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. № 12. С. 1449–1458.
18. *Албу А.Ф., Zubov B.И.* Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке для объекта сложной геометрической формы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 12. С. 1879–1893.
19. *Евтушенко Ю.Г., Zubov B.И., Албу А.Ф.* Оптимальное управление тепловыми процессами с фазовыми переходами. Коллективная монография. М.: МАКС Пресс, 2021. С. 248.
<https://doi.org/10.29003/m2449.978-5-317-06677-2>
20. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
21. *Албу А.Ф., Zubov B.И.* Об эффективности решения задач оптимального управления с помощью методологии быстрого автоматического дифференцирования // *Труды Института матем. и механ. УрО РАН.* 2015. Т. 21. № 4. С. 20–29.
22. *Hascoet L., Pascual V.* The Tapenade automatic differentiation tool: principles, model, and specification // *ACM Transact. on Math. Software (TOMS).* 2013. V. 39. № 3. P. 1–43.
23. *Hogan R.J.* Fast reverse-mode automatic differentiation using expression templates in C++ // *ACM Transact. on Math. Software (TOMS).* 2014. V. 40. № 4. P. 26–42.
24. *Горчаков А.Ю.* О программных пакетах быстрого автоматического дифференцирования // *Информационные технологии и вычисл. системы.* 2018. № 1. P. 30–36.
25. *Albu A., Gorchakov A., Zubov V.* On the effectiveness of the fast automatic differentiation methodology // *Commun. in Comput. and Informat. Sci.* 2019. V. 974. P. 264–276.
26. *Yixuan Qiu,* L-BFGS++, 2021. <https://github.com/yixuan/LBFGSpp/>