

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.635

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, К КОТОРЫМ РЕДУЦИРУЮТСЯ
ОБРАТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ
И МАГНИТОМЕТРИИ: ЛОКАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ¹⁾

© 2023 г. И. И. Колотов¹, Д. В. Лукьяненко¹, И. Э. Степанова^{1,2,*}, А. Г. Ягола¹

¹ 119992 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

² 123995 Москва, ул. Б. Грузинская, 10, с. 1, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Россия

*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 06.02.2023 г.
Переработанный вариант 19.03.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются многие обратные задачи геофизики в результате дискретизации. Приводятся примеры вырожденных и невырожденных систем разных размерностей, возникающих при интерпретации гравиметрических и магнитометрических данных. Библ. 13. Фиг. 4.

Ключевые слова: вырожденные системы линейных алгебраических уравнений, интегральные представления, однозначная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466923080094, EDN: WSNXOD

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации геофизических данных часто используются интегральные представления магнитного и гравитационного полей (см. [1–6]). Такого рода представления позволяют не только эффективно решать задачи по определению параметров геологической среды (магнитной восприимчивости, плотности породы, коэффициентов акустической жесткости и т.п.), но и строить аналитические продолжения полей, данные о которых получены с помощью дистанционного зондирования (см. [1]). Практически все постановки для описанного класса проблем редуцируются к системам линейных алгебраических уравнений в результате дискретизации.

1. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ В СЛУЧАЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ
МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Приведем сначала выражения для магнитного поля (см. [2], [3]) в предположении, что среда является парамагнитной и измерения выполняются в некоторой декартовой системе координат. Если рассматриваются небольшие по площади полигоны (территории, на которых проводятся геофизические исследования), то можно считать поверхность Земли плоской, а саму планету – нижним полупространством. Постановки обратных задач при таких допущениях будем в дальнейшем называть локальными. Сферичность Земли обычно не учитывается, если линейный размер полигона не превышает 111 км, что соответствует приблизительно одному градусу по широте:

$$\bar{B}(\bar{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V K(\bar{r}_s, \bar{r}) M(\bar{r}) dV, \quad \bar{r} = (x, y, z); \quad \bar{r}_s = (x_s, y_s, z_s),$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 23-41-00002).

$$K(\bar{r}_s, \bar{r}) = \frac{1}{\rho^5} \begin{bmatrix} 3(x-x_s)^2 - \rho^2 & 3(x-x_s)(y-y_s) & 3(x-x_s)(z-z_s) \\ 3(x-x_s)(y-y_s) & 3(y-y_s)^2 - \rho^2 & 3(y-y_s)(z-z_s) \\ 3(x-x_s)(z-z_s) & 3(y-y_s)(z-z_s) & 3(z-z_s)^2 - \rho^2 \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\rho \equiv |\bar{r} - \bar{r}_s| = \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2}.$$

Здесь \bar{r}_s – радиус-вектор точки наблюдения P_s в декартовой системе координат, \bar{r} – радиус-вектор точки внутри носителя V , $\bar{B}(\bar{r}_s)$ – магнитная индукция в системе СИ, измеренная в точке, характеризующейся радиус-вектором \bar{r}_s , μ_0 – магнитная постоянная в системе СИ. Через $K(\bar{r}_s, \bar{r})$ обозначена матричная функция координат точки наблюдения и точки, принадлежащей носителю, $M(\bar{r})$ – вектор-функция, характеризующая намагниченность среды.

Поле, создаваемое одним магнитным диполем, выражается формулой

$$B(\bar{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\bar{m}, \bar{r} - \bar{r}_s)(\bar{r} - \bar{r}_s) - \rho^2 \bar{m}}{\rho^5}. \quad (1.2)$$

Смысл обозначений в (1.2) такой же, как и в (1.1). Через $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3)^T$ обозначен магнитный момент точечного диполя. Будем считать, что в точках наблюдения установлены условные “сенсоры”. Возникает вопрос об однозначной разрешимости следующей системы линейных алгебраических уравнений, возникающей, как уже отмечалось выше, в процессе дискретизации задачи (1.1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}x_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{ix}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{kx}, \\ \sum_{i=1}^N \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}y_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iy}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{ky}, \\ \sum_{i=1}^N \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}z_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iz}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{kz}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В (1.3) через ρ_{ki} обозначено расстояние между k -м сенсором и i -м диполем:

$$\rho_{ki} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2},$$

$\bar{m}_i = (m_{ix}, m_{iy}, m_{iz})^T$ – магнитный момент i -го диполя в декартовой системе координат. Можно утверждать, что система (1.3) имеет блочный вид

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \dots \\ \bar{m}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \dots \\ \bar{B}_N \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где блок K_{il} соответствует i -му сенсору и l -му диполю, \bar{m}_i – вектор компонент i -го диполя, \bar{B}_l – вектор-функция, измеренная в l -м сенсоре. Блок K_{il} имеет следующий вид:

$$K_{il} = \begin{bmatrix} \frac{2x_{il}^2 - y_{il}^2 - z_{il}^2}{r_{il}^5} & \frac{3x_{il}y_{il}}{r_{il}^5} & \frac{3x_{il}z_{il}}{r_{il}^5} \\ \frac{3x_{il}y_{il}}{r_{il}^5} & \frac{2y_{il}^2 - x_{il}^2 - z_{il}^2}{r_{il}^5} & \frac{3y_{il}z_{il}}{r_{il}^5} \\ \frac{3x_{il}z_{il}}{r_{il}^5} & \frac{3y_{il}z_{il}}{r_{il}^5} & \frac{2z_{il}^2 - x_{il}^2 - y_{il}^2}{r_{il}^5} \end{bmatrix}, \quad x_{il} = x_i - x_l, \quad y_{il} = y_i - y_l, \quad z_{il} = z_i - z_l.$$

Рассмотрим сначала случай двух сенсоров и двух магнитных диполей.



Фиг. 1. Случай, в котором диполи и сенсоры не разделяют друг друга.

1.1. Два диполя и два сенсора на одной прямой

Пусть и сенсоры, и диполи располагаются на одной прямой (примем ее за ось X некоторой декартовой системы координат). Координаты диполей обозначим через x_1, x_2 , а координаты сенсоров – через x_1^s, x_2^s . Предположим сначала, что диполи и сенсоры не разделяют друг друга (см. фиг. 1). В начале координат расположен первый диполь.

Тогда система (1.4) принимает вид

$$A_{22}\bar{x} = \bar{B}_2, \tag{1.5}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r_{11}^3} & 0 & 0 & \frac{2}{r_{12}^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} \\ \frac{2}{r_{21}^3} & 0 & 0 & \frac{2}{r_{22}^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{21}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} \end{bmatrix},$$

$$r_{11} = |x_1 - x_{1s}|, \quad r_{12} = |x_1 - x_{2s}|, \quad r_{21} = |x_2 - x_{1s}|, \quad r_{22} = |x_2 - x_{2s}|, \tag{1.6}$$

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \\ B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ m_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ m_{2z} \end{pmatrix}.$$

Переобозначим элементы в матрице системы (6):

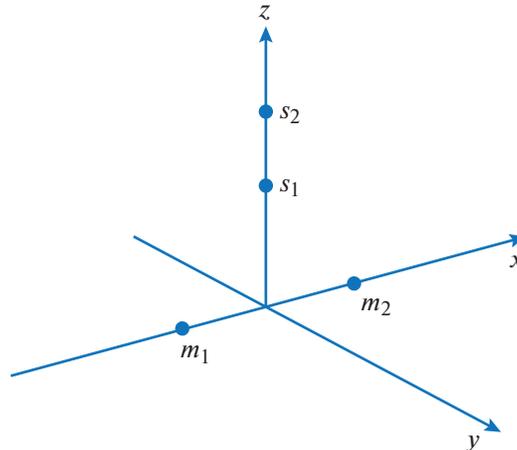
$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Для того чтобы детерминант матрицы (1.7) был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы координаты сенсоров совпадали (при различных координатах диполей):

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = -2b_{ij} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0 \Leftrightarrow (x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_{2s} - x_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1s}(x_1 - x_2) = x_{2s}(x_1 - x_2) \Rightarrow (x_{1s} - x_{2s})(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$



Фиг. 2. Случай, в котором диполи и сенсоры разделяют друг друга.



Фиг. 3. Случай взаимного расположения сенсоров и диполей в трехмерном пространстве.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Решение системы (1.5) единственно, если два сенсора и два диполя расположены в различных точках на одной и той же прямой. Диполи и сенсоры при этом не “разделяют друг друга”.*

Рассмотрим теперь случай, когда в начале координат расположен первый диполь, затем идет второй сенсор, потом – второй диполь, и последний – первый сенсор (см. фиг. 2). В этом случае для равенства нулю детерминанта матрицы получаем равенство $x_{1s}x_{2s} = 0.5x_2(x_{1s} + x_{2s})$.

Если координата второго диполя связана с координатами сенсоров данным соотношением, то в таком случае система уравнений вырождена, и компоненты двух диполей определить однозначно нельзя.

Замечание. Можно, безусловно, рассмотреть сразу общий случай расположения диполей. Детерминант обращается в нуль при выполнении либо условия $(x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_{2s} - x_1)$, что соответствует случаю “неразделенных” диполей, либо условия $(x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_1 - x_{2s})$, и в последнем случае система уравнений может быть вырождена.

1.2. Два сенсора и два диполя, расположенные в одной плоскости

Если провести через два диполя прямую и расположить два сенсора на какой-нибудь прямой в плоскости, перпендикулярной прямой, содержащей диполи и проходящей через середину соединяющего диполи отрезка (см. фиг. 3), то получаем систему из шести уравнений с шестью неизвестными ($N = 2$ в системе (1.3)):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}x_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{ix}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{kx}, \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}y_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iy}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{ky}, \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}z_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iz}}{\rho_{ki}^3} \right) &= B_{kz}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Систему (1.9) можно переписать в блочном виде

$$\hat{K}\hat{m} = \hat{B}, \tag{1.10}$$

где $\hat{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{m} = \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{pmatrix}$, $\hat{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix}$. Выражения для блоков матрицы (1.10) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{2x_{11}^2 - z_{11}^2}{r_{11}^5} & 0 & \frac{-3x_{11}z_{11}}{r_{11}^5} \\ 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0 \\ \frac{-3x_{11}z_{11}}{r_{11}^5} & 0 & \frac{2z_{11}^2 - x_{11}^2}{r_{11}^5} \end{bmatrix}, & K_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{2x_{12}^2 - z_{12}^2}{r_{12}^5} & 0 & \frac{-3x_{12}z_{12}}{r_{12}^5} \\ 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 \\ \frac{-3x_{12}z_{12}}{r_{12}^5} & 0 & \frac{2z_{12}^2 - x_{12}^2}{r_{12}^5} \end{bmatrix}, \\ K_{21} &= \begin{bmatrix} \frac{2x_{21}^2 - z_{21}^2}{r_{21}^5} & 0 & \frac{-3x_{21}z_{21}}{r_{21}^5} \\ 0 & -\frac{1}{r_{21}^3} & 0 \\ \frac{-3x_{21}z_{21}}{r_{21}^5} & 0 & \frac{2z_{21}^2 - x_{21}^2}{r_{21}^5} \end{bmatrix}, & K_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{2x_{22}^2 - z_{22}^2}{r_{22}^5} & 0 & \frac{-3x_{22}z_{22}}{r_{22}^5} \\ 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} & 0 \\ \frac{-3x_{22}z_{22}}{r_{22}^5} & 0 & \frac{2z_{22}^2 - x_{22}^2}{r_{22}^5} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Расстояния от расположенного таким образом сенсора до каждого из двух диполей будут одинаковыми.

Если в (1.11) координаты сенсоров связаны соотношениями

$$\begin{aligned} y_{i1} &= \alpha z_{i1}; & y_{i2} &= \alpha z_{i2}, & i &= 1, 2, \\ \rho_{i1} &= \rho_{i2}, & i &= 1, 2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} y_{i1} &= y_{i2} = 0, & i &= 1, 2, \\ \rho_{i1} &= \rho_{i2}, & i &= 1, 2, \end{aligned}$$

то получаем, что в матрице (1.11) две строки пропорциональны:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0; & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{21}^3} & 0; & 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

В (1.12) записи, соответствующие различным диполям, отделяются точкой с запятой. Аналогичный результат мы получим, если расположим два сенсора на одном расстоянии от прямой, соединяющей два диполя (при этом не требуется, чтобы расстояния от сенсора до каждого из двух диполей были одинаковыми). Сенсоры s_1, s_2 и диполи m_1, m_2 на фиг. 3 при этом меняются местами. Квазирешение в этом случае также определяется неоднозначно.

1.3. Два диполя и N сенсоров, расположенных на прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему диполи и проходящей через его середину

Предположим теперь, что измерения компонент магнитной индукции выполняются в точках прямой, проходящей через середину отрезка, соединяющего два диполя, и перпендикулярной этому отрезку (этот случай аналогичен описанному в предыдущем пункте). Система (1.3) принимает вид

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}x_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{ix}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{kx},$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}y_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iy}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{ky}, \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{3\{m_{ix}x_{ki} + m_{iy}y_{ki} + m_{iz}z_{ki}\}z_{ki}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{iz}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{kz}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Очевидно, (1.13) является переопределенной системой линейных алгебраических уравнений и, в общем случае, несовместна. Как известно (см. [7]), в конечномерном случае всегда существует квазирешение системы, полученной из исходной с помощью первой трансформации Гаусса:

$$Ax = f \rightarrow A^T Ax = A^T f. \quad (1.14)$$

Поскольку ранг $A^T A$ равен рангу исходной матрицы A , то при описанном выше расположении диполей и сенсоров мы получим систему линейных алгебраических уравнений с двумя пропорциональными друг другу строками:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0; & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \rho_{11} & & & \rho_{12} & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0; & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \rho_{21} & & & \rho_{22} & & \end{bmatrix}, \quad \rho_{11} = \rho_{12}, \quad \rho_{21} = \rho_{22}. \quad (1.15)$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. Если все сенсоры расположены на прямой, лежащей в плоскости симметрии двух неизвестных диполей \vec{m}_1, \vec{m}_2 , то квазирешение системы (1.14) определяется неоднозначно. Однако нормальное квазирешение будет единственно.

1.4. Два диполя и N сенсоров, расположенных на одной прямой

Для данного случая верен аналог теоремы 1.

Теорема 3. Если два диполя и N сенсоров расположены на одной прямой, координаты двух каких-либо сенсоров не совпадают, и эти два сенсора не разделяют выделенные два диполя, то квазирешение системы (1.8) единственно, независимо от того, какие значения принимают координаты остальных $N - 2$ сенсоров.

Доказательство. Система уравнений, из которой в описанном случае определяются компоненты двух диполей, лежащих на одной прямой с сенсорами, имеет вид (1.13), первые два блока которой выражаются с помощью формулы (1.6). Ранг такой системы не может быть больше 6.

Рассмотрим два диполя и два сенсора, которые оба расположены либо правее, либо левее обоих диполей. Согласно теореме 1, компоненты диполей определяются однозначно, и, следовательно, остальные сенсоры не добавят информации о магнитном поле.

1.5. N диполей и N сенсоров в трехмерном пространстве

Если требуется определить компоненты N магнитных диполей $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_N$ по измеренным в N произвольных точках трехмерного пространства R^3 трем компонентам вектора магнитной индукции (т.е. известным векторам $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_N$), то исследование, аналогичное проведенному в п. 1.2, позволяет сделать вывод о том, что решение системы (1.3) будет неединственным, если для каких-либо двух индексов k и l справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_{ki} &= y_{li} = 0, & i &= 1, \dots, N. \\ \rho_{ki} &= \rho_{li}, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Тогда две строки в (1.3) будут совпадать (в k -м и l -м блоках для соответствующих сенсоров):

$$\begin{bmatrix} 0 - \frac{1}{3}; & 0 - \frac{1}{3}; & \dots; & 0 - \frac{1}{3} & 0 \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & & \rho_{kN} & \\ 0 - \frac{1}{3}; & 0 - \frac{1}{3}; & \dots; & 0 - \frac{1}{3} & 0 \\ \rho_{l1} & \rho_{l2} & & \rho_{lN} & \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Если в более общем случае выполняются соотношения

$$y_{ki} = \alpha z_{ki}; \quad y_{li} = \alpha z_{li}, \quad \text{и} \quad \rho_{ki} = \rho_{li}, \quad i = 1, \dots, N, \tag{1.18}$$

то умножая третьи строки блоков матрицы (1.3) на α и вычитая их из вторых строк соответственно для двух блоков с индексами k и l , мы получим аналог (1.17).

Таким образом, нами доказана

Теорема 4. При выполнении условий (1.16) или (1.18) решение системы (1.3) определяется неоднозначно.

Замечание. Для практических целей более важными являются необходимое и достаточное условия однозначной разрешимости системы (1.3), однако отсутствие пропорциональности каких-либо двух строк матрицы не означает, что система не вырождена.

Требуются дальнейшие исследования в этом направлении.

2. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ В МЕТОДЕ S-АППРОКСИМАЦИЙ. ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ

Если известны компоненты магнитного или гравитационного полей (например, первая производная потенциала по z на некотором рельефе), то можно представить потенциал поля в виде суммы простого и двойного слоев, создаваемых совокупностью горизонтальных плоскостей, расположенных ниже заданного рельефа. Если систему координат выбрать так, чтобы дневная поверхность (поверхность Земли в локальном варианте метода S-аппроксимаций, см. [4], [5], [9–13]) задавалась уравнением $z = 0$, то потенциал представляется в виде (см. [8])

$$V(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}} + \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi_1, \xi_2)(z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3}, \tag{2.1}$$

$$M = (x, y, z), \quad \hat{x} = (x, y), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

Тогда производная по z потенциала V , взятая с обратным знаком, будет иметь вид

$$-\frac{\partial V}{\partial z}(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi) (z - H_l) z d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^3} + \tag{2.2}$$

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi) (2(z - H_l)^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \xi_2)^2) d\xi_1 d\xi_2}{[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}]^5}, \quad M = (x, y, z).$$

Функции $\rho_{1,l}$, $\rho_{2,l}$ неизвестны. Пусть компоненты поля заданы в конечном множестве точек M_i , $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \dots, N$. Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом для l -го слоя в (2.2) в точке M_i через $Q_{1,l}^{(i)}$, а во втором слагаемом – через $Q_{2,l}^{(i)}$. Тогда получим

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial z} \equiv f_i = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi})) d\hat{\xi}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.3}$$

На практике компоненты поля бывают заданы с некоторой погрешностью δ , поэтому входной информацией являются значения $f_{i,\delta}$. С помощью решения вариационной задачи

$$\Omega(\rho) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}^2(\hat{\xi})) d\hat{\xi} = \min_{\rho}, \tag{2.4}$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{1,l}(\xi) Q_{1,l}^{(i)}(\xi) + \rho_{2,l}(\xi) Q_{2,l}^{(i)}(\xi)) d\xi = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

получим, что искомые функции должны иметь вид (см. [4], [5], [9])

$$\begin{aligned} \rho_{1,l}^{(a)}(\xi) &= \bar{\rho}_{1,l}(\xi, \lambda), & \rho_{2,l}^{(a)}(\xi) &= \bar{\rho}_{2,l}(\xi, \lambda), \\ \bar{\rho}_{1,l}(\xi, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\xi), & \bar{\rho}_{2,l}(\xi, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\xi), \quad l = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$A\lambda = f_\delta, \quad (2.7)$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (Q_{1,l}^{(i)}(\xi) Q_{1,l}^{(j)}(\xi) + Q_{2,l}^{(i)}(\xi) Q_{2,l}^{(j)}(\xi)) d\xi, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.8)$$

Элементы a_{ij} матрицы A могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{z_i + z_j - 2H_l}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(z_i + z_j - 2H_l)(9[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] - 6(z_i + z_j - 2H_l)^2)}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^7} \right\}, \quad (2.9) \\ &1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Поясним, как от формулы (2.8) перейти к выражению (2.9). На каждой из плоскостей H_l распределены источники гравитационного поля. Первое слагаемое в сумме (2.2) при фиксированном значении индекса l представляет собой двойной слой с плотностью $\rho_{1,l}(\xi)$, а второе слагаемое – производную этого двойного слоя по z , плотность распределения этой производной равна $\rho_{2,l}(\xi)$. Далее, в формуле (2.8) при каждом значении индекса l выражение

$$Q_{1,l}^{(i)}(\xi) Q_{1,l}^{(j)}(\xi) = \frac{(z_i - H_l)(z_j - H_l)}{\left(\sqrt{(z_i - H_l)^2 + (\xi_1 - x_i)^2 + (\xi_2 - y_i)^2} \right)^3 \left(\sqrt{(z_j - H_l)^2 + (\xi_1 - x_j)^2 + (\xi_2 - y_j)^2} \right)^3}$$

есть произведение ядра интеграла Пуассона, вычисленного в точке M_i с координатами (x_i, y_i, z_i) и точке плоскости $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, на значение плотности $\rho_{1,l}(\xi)$, которая зависит от координат точки $M_j = (x_j, y_j, z_j)$, следующее:

$$\rho_{1,l}(\xi) = \frac{(z_j - H_l)}{\left(\sqrt{(z_j - H_l)^2 + (\xi_1 - x_j)^2 + (\xi_2 - y_j)^2} \right)^3}.$$

Таким образом, на плоскости H_l значение искомой гармонической в верхнем полупространстве функции равно $\rho_{1,l}(\xi)$ в точке с координатами $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Если теперь “подняться выше”, в точку $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, то к числителю дроби в выражении для $\rho_{1,l}(\xi)$ нужно прибавить $z_j - H_l$, и на такое же значение изменится z -координата в знаменателе. Аналогичным образом трактуется выражение $Q_{2,l}^{(i)}(\xi) Q_{2,l}^{(j)}(\xi)$ в (2.8). Разница заключается только в том, что одна производная “перебрасывается” с ядра Пуассона на функцию, описывающую плотность масс в интеграле. Поэтому в (2.9) при каждом значении индекса, по которому выполняется суммирование, складываются первые и третьи производные потенциалов точечных источников.

Иначе говоря, в (2.9) при фиксированном значении индекса r стоит сумма первых и третьих производных по z от потенциала точечного источника, расположенного в точке $\tilde{M}_j = (x_j, y_j, 2H_l - z_j)$, вычисленных в точке $M_i = (x_i, y_i, z_i)$.

По найденным из решения системы (2.7)–(2.9) множителям $\lambda_i, I = 1, \dots, N$, можно далее определить величины некоторых функционалов $p_s, s = 1, \dots, S$ (см. [4], [9–13]). Эти функционалы могут представлять собой высшие производные потенциала, аналитическое продолжение гравитационного поля и т.д. Для приложений очень важно иметь возможность пересчета значений поля на некоторую регулярную сеть наблюдений.

Рассмотрим случай, когда носитель потенциалов простого и двойного слоев только один. Пусть D – плоскость, описываемая уравнением

$$z = \text{const} = -H, \quad H > 0.$$

По найденным из решения системы (2.7)–(2.9) плотностям $\rho_1(\xi_1, \xi_2) \in L_2(D)$ и $\rho_2(\xi_1, \xi_2) \in L_2(D)$ простого и двойного слоев, распределенных на этой плоскости, мы можем найти совокупность ограниченных линейных функционалов вида

$$p_s = \int_D \rho_1(\xi_1, \xi_2) P_1^{(s)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_D \rho_2(\xi_1, \xi_2) P_2^{(s)}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad s = 1, \dots, S, \quad (2.10)$$

где для всех s

$$\|P_1^{(s)}\|^2 = \int_D (P_1^{(s)})^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty, \quad \|P_2^{(s)}\|^2 = \int_D (P_2^{(s)})^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 < +\infty. \quad (2.11)$$

Действительно, значения аномалий силы тяжести $g(M_i; \rho)$ выражаются соотношением (2.10) при $s = i$:

$$P_1^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma \frac{(\xi_3 - z_i)}{R^3(\xi - \mathbf{r}_i)}, \quad P_2^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma \frac{((\xi_1 - x_i)^2 + (\xi_2 - y_i)^2 - 2(\xi_3 - z_i)^2)}{R^5(\xi - \mathbf{r}_i)}, \quad (2.12)$$

а значения элементов аномального поля $u(M_i; \rho)$ – соотношением вида

$$u(M_i; \rho) = D_{\mathbf{r}}^\alpha g(\mathbf{r}; \rho) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \quad (2.13)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 1$,

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}, \quad \rho = (\rho_1, \rho_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2), \quad (2.14)$$

и соотношением (2.10) при $s = i$:

$$P_1^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma(-1)^{|\alpha|} D_{\hat{\xi}}^\alpha \left(\frac{\xi_3 - z}{R^3(\xi - \mathbf{r}_i)} \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \quad (2.15)$$

$$P_2^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma(-1)^{|\alpha|} D_{\hat{\xi}}^\alpha \left(\frac{((\xi_1 - x)^2 + (\xi_2 - y)^2 - 2(\xi_3 - z)^2)}{R^5(\xi - \mathbf{r}_i)} \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}.$$

Везде γ – гравитационная постоянная ($\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$). Здесь точка M_i имеет координаты $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Причем $z \geq -H$, т.е. мы вычисляем значения производных потенциала выше носителя, которым в нашем случае является плоскость D . Здесь $R(\xi - \mathbf{r}_i)$ – длина вектора $(\xi - \mathbf{r}_i)$.

Исследование матрицы системы (2.7) на однозначную разрешимость является весьма трудоемким, поэтому мы ограничимся в настоящей работе рассмотрением двух частных случаев: а) представлений физических полей (гравитационного и магнитного) в виде потенциала простого слоя и б) представления компонент вектор-функций в виде потенциала двойного слоя. В выражении (2.10) это будут первое и второе слагаемые соответственно.

Если какая-либо высшая производная гравитационного потенциала (см. (2.10)–(2.13)) аппроксимируется потенциалом простого слоя, то матрица системы (2.7)–(2.9) принимает вид

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4(z_1 + H)^2} & \frac{z_1 + z_2 + 2H}{((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2)^{3/2}} \cdots & \frac{z_1 + z_N + 2H}{((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2)^{3/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_1 + z_N + 2H}{((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2)^{3/2}} & \frac{z_2 + z_N + 2H}{((z_2 + z_N + 2H)^2 + r_{2N}^2)^{3/2}} \cdots & \frac{1}{4(z_N + H)^2} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Попытаемся выяснить, по аналогии с разд. 1 настоящей статьи, в каких случаях матрица (2.16) является вырожденной. Для того чтобы определитель матрицы был равен нулю, достаточно, чтобы какие-либо две строки этой матрицы были пропорциональны друг другу, например, i -я и j -я. Рассмотрим более подробно элементы указанных строк и запишем условие пропорциональности:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \dots \frac{1}{4(z_i + H)^2} \frac{z_i + z_j + 2H}{((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2)^{3/2}} \cdots \frac{z_i + z_k + 2H}{((z_i + z_k + 2H)^2 + r_{ij}^2)^{3/2}} \\ \dots \frac{z_i + z_j + 2H}{((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2)^{3/2}} \frac{1}{4(z_j + H)^2} \cdots \frac{z_k + z_j + 2H}{((z_k + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \times \quad (2.17)$$

$$\times \frac{(z_i + z_j + 2H)^2}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i + z_j + 2H)^2)^3} = \frac{1}{16(z_i + H)^2(z_j + H)^2},$$

$$r_{ij}^2 \equiv (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

$$r_{ij}^2 = \left(16(z_i + z_j + 2H)^2(z_i + H)^2(z_j + H)^2\right)^{1/3} - (z_i + z_j + 2H)^2 \times \quad (2.18)$$

$$\times \frac{z_i + z_k + 2H}{((z_i + z_k + 2H)^2 + r_{ik}^2)^{3/2}} = C \frac{z_k + z_j + 2H}{((z_k + z_j + 2H)^2 + r_{kj}^2)^{3/2}},$$

$$C = \left\{ \frac{z_i + z_j + 2H}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i + z_j + 2H)^2)^{3/2}} \right\} : \left\{ \frac{1}{4(z_i + H)^2} \right\}.$$

Из (2.18) следует, что r_{ij}^2 всегда меньше или равно нулю:

$$r_{ij}^2 = \left(16(z_i + z_j + 2H)^2(z_i + H)^2(z_j + H)^2\right)^{1/3} - (z_i + z_j + 2H)^2,$$

$$16(z_i + H)^2(z_j + H)^2 \geq (z_i + z_j + 2H)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(z_i + H)(z_j + H) \geq (z_i + z_j + 2H)^2 \Rightarrow z_i = z_j, \quad r_{ij}^2 = 0.$$

Следовательно, диагональные элементы указанных двух строк не могут быть пропорциональны внедиагональным ни при каких значениях z -координат точек наблюдения.

Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что верна

Теорема 5. Матрица системы (2.7)–(2.9) при представлении поля с помощью потенциала простого слоя имеет ранг не меньше двух; таким образом, для двух различных точек наблюдения система является невырожденной.

Перейдем теперь к случаю б) представления элементов гравитационного и магнитного полей в виде потенциала двойного слоя.

Матрица системы (2.9) приобретает следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{6}{16(z_1 + H)^4} & \dots & \frac{(z_1 + z_N + 2H)(6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2\right)^{7/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(z_1 + z_N + 2H)(6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2\right)^{7/2}} & \dots & \frac{6}{16(z_N + H)^4} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Запишем, как и для случая простого слоя, условие пропорциональности диагональных и вне-диагональных элементов каких-нибудь двух строк:

$$\frac{(z_i + z_j + 2H)(6(z_i + z_j + 2H)^2 - 9r_{ij}^2)}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2\right)^{7/2}} \equiv C(z_j) = \frac{6}{16(z_i + H)^2(z_j + H)^2} = \text{const} > 0,$$

$$r_{ij}^2 = f(R, C(z_j)), \quad 6R^2 \geq C(z_j)R^6 \Rightarrow R \leq \left(\frac{6}{C(z_j)}\right)^{1/4}, \quad (2.20)$$

$$R = \sqrt{(z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2}$$

(мы рассматриваем константу C как функцию координаты: $C = C(z_j)$).

Явную зависимость $r_{ij}^2 = f(R, C(z_j))$ найти трудно, поэтому попробуем определить, выполняется ли условие (2.20) на какой-либо сфере радиуса $R = \sqrt{(z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2}$. Если некоторая точка трехмерного пространства лежит на такой сфере, то мы можем выразить ее координату z :

$$z_i + z_j + 2H = \sqrt{R^2 - r_{ij}^2}.$$

Будем считать, что z_i, z_j известны. Тогда $C_1 \equiv z_i + z_j + 2H = C_1(C)$, $C = \frac{6}{16(z_i + H)^2(z_j + H)^2}$.

Исследуем, всегда ли существует такое $r_{ij}^2 > 0$ (при всех ли $C_1(C)$ и C), что справедливо равенство

$$\frac{C_1(6C_1^2 - 9r_{ij}^2)}{\left(\sqrt{C_1^2 + r_{ij}^2}\right)^7} = C.$$

Попробуем изобразить поиск решения графически (см. фиг. 4).

Если $C_1^2 + r_{ij}^2 = R^2$, то, согласно (2.20), на сфере радиуса R мы будем иметь:

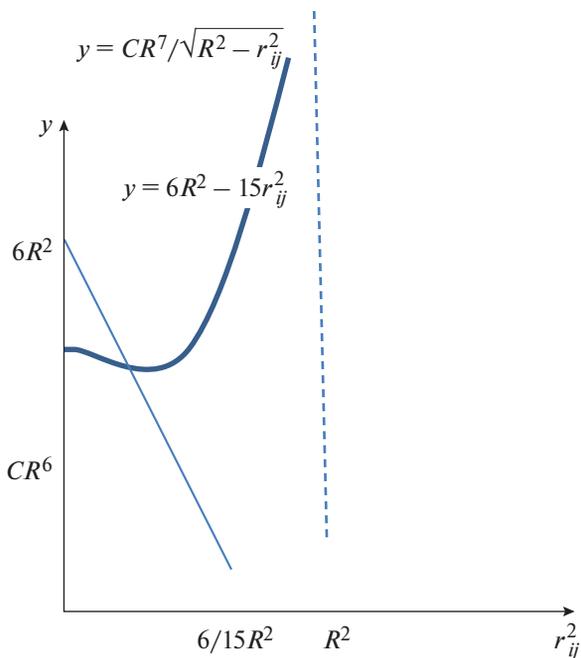
$$\sqrt{R^2 - r_{ij}^2}(6R^2 - 15r_{ij}^2) = CR^7 \Rightarrow r_{ij}^2 > 0 \quad \text{существует, если} \quad CR^6 < 6R^2 \Rightarrow R^4 < \frac{6}{c}.$$

Но $R \geq C_1$. Поэтому $C_1^4 \leq \frac{6}{c}$. Получаем противоречие. Следовательно, верна

Теорема 6. Матрица системы (2.7)–(2.9) в случае представления элементов полей потенциалом двойного слоя имеет ранг не меньше двух, если две точки наблюдения различны.

Замечание. Теоремы 5 и 6 нельзя обобщить на случай произвольного числа точек N , поскольку условие, что никакие две строки матрицы не являются линейно зависимыми, не является достаточным для невырожденности системы линейных алгебраических уравнений.

Однако можно привести два примера однозначной разрешимости системы (2.7)–(2.9) при $N = 3$ и $N = 4$.



Фиг. 4. Графический способ решения уравнения (2.20).

Пример 1: N = 3.

Если число точек наблюдения равно трем, то матрица системы (2.7)–(2.9) для потенциала простого слоя приобретает вид

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2} = \frac{1}{4(z_2 + H)^2} = \frac{1}{4(z_3 + H)^2}, \tag{2.21}$$

$$b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2)^{3/2}} = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2)^{3/2}} = \frac{z_2 + z_3 + 2H}{((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2)^{3/2}}.$$

Такие соотношения между элементами матрицы возможны, если координаты z всех трех точек наблюдения одинаковы, а сами точки расположены в вершинах равностороннего треугольника на соответствующей плоскости. При выполнении указанных условий все три точки лежат на поверхности в трехмерном пространстве, описываемой уравнением

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = C = \text{const} > 0.$$

Запишем выражение для детерминанта матрицы (2.21):

$$\det A_{33} = a^3 + 2b^3 - 3ab^2.$$

Выясним, может ли он быть равен нулю. Имеем

$$a^3 + 2b^3 - 3ab^2 = 0 \Rightarrow a^3 - ab^2 = 2ab^2(a - b) \Rightarrow a(a - b)(a + b) = 2b^2(a - b).$$

Числа a и b всегда больше нуля при построении S-аппроксимаций. Поэтому последнее равенство может выполняться только в том случае, когда эти числа равны. Но они не могут быть равны, согласно теореме 5. Следовательно, в данном частном случае трехмерной системы уравнений решение определяется однозначно.

Пример 2: $N = 4$.

1. Рассмотрим систему (2.7)–(2.9) для четырех точек наблюдения при аппроксимации элементов поля с помощью потенциала простого слоя. Матрица системы имеет в этом случае вид

$$A_{44} = \begin{bmatrix} a & c & d_1 & d_2 \\ c & b & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_3 & a_1 & c_1 \\ d_2 & d_4 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2}, \quad c = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2)^{3/2}}, \quad b = \frac{1}{4(z_2 + H)^2},$$

$$a_1 = \frac{1}{4(z_3 + H)^2}, \quad b_1 = \frac{1}{4(z_4 + H)^2}, \quad c_1 = \frac{z_3 + z_4 + 2H}{((z_3 + z_4 + 2H)^2 + r_{34}^2)^{3/2}},$$

$$d_1 = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2)^{3/2}}, \quad d_2 = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2)^{3/2}},$$

$$d_3 = \frac{z_2 + z_3 + 2H}{((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2)^{3/2}}, \quad d_4 = \frac{z_2 + z_4 + 2H}{((z_2 + z_4 + 2H)^2 + r_{24}^2)^{3/2}}.$$
(2.22)

Выберем координаты точек наблюдения так, чтобы элементы матрицы A_{44} , обозначенные через $d_i, i = 1, \dots, 4$, были одинаковыми. Почему этого можно добиться?

Рассмотрим поверхность $C = \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$ в пространстве координат x, y, z . Выразим r^2 через z явно:

$$C = \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \Rightarrow r^2 = \frac{z^{2/3}}{C^{2/3}} - z^2 \equiv f(z).$$

Производная функции $f(z)$ положительна при $z < \frac{1}{(3C')^{3/4}}$, $C' = C^{2/3}$.

Функция $f(z)$ является непрерывной функцией своего аргумента и $f(z) \geq 0$, если

$$z \leq \frac{1}{(C')^{3/4}}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий

$$z_k < \frac{1}{\sqrt{C}} - \max(z_1, z_2) - 2H$$

существуют такие r_{1k}, r_{2k} , что точки $(z_1 + z_k + 2H, r_{1k}), (z_2 + z_k + 2H, r_{2k}), k = 3, 4$, лежат на указанной выше поверхности, и матрица системы имеет вид (2.22). Можно представить выпуклый четырехугольник, в вершинах которого расположены четыре точки наблюдения, z -координаты этих точек различны, но суммы $z_i + z_k$ могут быть одинаковыми при каких-то значениях индексов (но не при всех: четыре точки на плоскости не могут располагаться попарно на одинаковых расстояниях). Вычислим детерминант этой матрицы с помощью формулы Лапласа разложения по двумерным минорам первых двух строк:

$$\det A_{44} = \sum_{i=1}^6 (-1)^{\varepsilon_i} M_i \bar{M}_i, \quad M_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a & d \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a & d \\ c & d \end{vmatrix}, \quad M_4 = M_5 = \begin{vmatrix} c & d \\ b & d \end{vmatrix}, \quad M_6 = \begin{vmatrix} d & d \\ d & d \end{vmatrix} = 0,$$

ε_i — знак перестановки, соответствующий i -му минору, \bar{M}_i — дополнительный минор.

В итоге получаем

$$\det A_{44} = (ab - c^2)(a_1 b_1 - c_1^2) + d^2(a + b - 2c)(a_1 + b_1 - 2c_1).$$
(2.23)

Согласно теореме 5, первое слагаемое всегда положительно, что касается второго слагаемого, то оно тоже положительно в силу соотношения

$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 \geq 8a^2b^2 \quad \text{при любых } a, b > 0, \quad \text{так как}$$

$$(a^2 + b^2)(a + b)^2 \geq 2ab(a + b)^2 \geq 8a^2b^2.$$

Таким образом, в данном частном случае четырех точек наблюдения решение системы (2.4) определяется однозначно.

2. Предположим теперь, что четыре точки в трехмерном пространстве расположены таким образом, что матрица системы (2.7)–(2.9) в случае потенциала простого слоя является тёплицевой:

$$A_{44} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2}, \quad b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2)^{3/2}}, \quad c = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2)^{3/2}}, \quad (2.24)$$

$$d = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2)^{3/2}} = c, \quad z_1 = z_2 = z_3 = z_4, \quad r_{12} = r_{23} = r_{34}, \quad r_{13} = r_{24}.$$

Можно считать, что точки наблюдения находятся в вершинах ромба с углом в 60 градусов. Для определителя (2.21) получаем следующее выражение:

$$\det A_{44} = (b^2 - ac)^2 - b^2(a - c)^2.$$

Считаем, что $a > b > c$ (выполнения этого условия можно добиться с помощью указанного выше расположения точек наблюдения). Имеем

$$b^2(b^2 - a^2) > c^2(b^2 - a^2).$$

Таким образом, мы показали, что в рассмотренном случае матрица системы (2.4) не вырождена, и, следовательно, система имеет единственное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При обработке данных детальной съемки можно применять различные варианты метода линейных интегральных представлений. Тот же принцип справедлив и при решении возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений. Метод S-аппроксимаций позволяет построить за сравнительно короткое время аналитические аппроксимации элементов аномальных потенциальных полей в “первом приближении” по точности. Такая аппроксимация позволяет составить общее представление о природе источников, характере аномалии и т.п. Затем можно строить более точные модели среды. Приведенные в настоящей статье теоремы позволяют выбирать наиболее эффективные в каждом конкретном случае алгоритмы регуляризации при решении обратных задач геофизики, в частности, путем разбиения исходной матрицы системы на блоки, для которых векторы неизвестных параметров можно определить однозначно.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные рекомендации и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salnikov A.M., Stepanova I.E., Gudkova T.V., Batov A.V.* Analytical modeling of the magnetic field of Mars from satellite data using modified S-approximations // *Doklady Earth Sciences*. 2021. V. 499. P. 575–579.
2. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2016. V. 4. № 3. P. 4–14.
3. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E. et al.* Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations // *Journal of Imaging*. 2021. V. 7. № 11. P. 234.
4. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.

5. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли*. 2002. № 2. С. 3–19.
6. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физика Земли*. 2002. № 7. С. 3–12.
7. *Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином, 2014. 214 с.
8. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
9. *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth's gravity field // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2008. V. 16. № 5. P. 535–544.
10. *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth's gravity field. Regional version // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2009. V. 16. № 5. P. 1095–1111.
11. *Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Mikhailov P. S.* Analytical Models of the Physical Fields of the Earth in Regional Version with Ellipticity // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. 2022. V. 58. № 3. P. 406–419.
12. *Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov A.V.* Density anomalies in subsurface layers of mars: model estimates for the site of the InSight mission seismometer // *Solar System Research volume*. 2020. V. 54. P. 15–19.
13. *Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Погорелов В.В., Михайлов П.С.* Структурно-параметрический подход при построении цифровых моделей рельефа и гравитационного поля Земли с использованием аналитических S-аппроксимаций // *Геофизические процессы и биосфера*. 2020. Т. 19. № 2. С. 107–116.