ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 8, с. 1272–1278

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

# УЛУЧШЕННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© 2023 г. Г. И. Шишкин[1,*], Л. П. Шишкина[1]

[1] 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия

*e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 04.04.2023 г.
Переработанный вариант 04.04.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

Рассматривается задача Коши для регулярного уравнения переноса. Для этой задачи с использованием техники Ричардсона строится улучшенная разностная схема, сходящаяся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости. Библ. 6.

**Ключевые слова:** уравнение переноса, задача Коши, стандартная разностная схема, равномерная сетка, невязка, разложение невязки, монотонность дифференциальной и сеточной задач, техника Ричардсона, улучшенная разностная схема, сходимость в равномерной норме.

**DOI:** 10.31857/S0044466923080136, **EDN:** WTFQVG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется разработке численных методов для уравнений математической физики повышенного порядка точности. Здесь сложились два направления. Первое направление связано с повышением порядка аппроксимации разностных уравнений. Подходы, связанные с этим направлением, рассматривались в исследованиях Г.И. Марчука [1], Г.И. Марчука и В.В. Шайдурова [2], А.А. Самарского [3], Г.И. Шишкина и Л.П. Шишкиной [4]. Второе направление связано с построением решений на основе разностных уравнений сравнительно невысокого порядка на последовательности равномерных вложенных сеток. Эти методы получили название экстраполяций по Ричардсону, см., например, [5]. В настоящей работе для задачи Коши для уравнения переноса строятся разложения обратных разностных производных и соответствующих невязок по степеням шагов основной и разреженной сеток соответственно. Это позволяет применить технику Ричардсона на двух вложенных сетках и построить разностную схему, сходящуюся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости.

**О содержании работы.** Постановка задачи Коши для уравнения переноса и цель исследования приводятся в разд. 2. Априорные оценки решения и производных устанавливаются в разд. 3. Стандартная разностная схема для задачи Коши для уравнения переноса рассматривается в разд. 4 и устанавливается ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. В разд. 5 и 6 построены разложения обратных разностных производных по степеням шагов основной и разреженной сеток соответственно. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок. В разд. 7 на основе разложений невязок сеточных решений с применением техники Ричардсона строится схема, сходящаяся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости. Выводы приводятся в разд. 8.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

На полосе $\overline{G}$:

$$\overline{G} = G \cup S, \tag{2.1а}$$

где

$$G = D \times (0,T], \quad D = (-\infty < x < \infty); \quad S = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\, t = 0\}, \tag{2.1б}$$

рассмотрим задачу Коши для регулярного уравнения переноса

$$Lu(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G; \quad u(x,t) = \varphi(x), \quad (x,t) \in S. \tag{2.2}$$

Здесь

$$L = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t) + p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G, \tag{2.3а}$$

функции $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$, функция $\varphi(x)$ предполагается достаточно гладкой на множестве $S$, причем,

$$b_0 \le b(x,t) \le b^0, \quad 0 \le c(x,t) \le c^0, \quad p_0 \le p(x,t) \le p^0, \quad |f(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}; \tag{2.3б}$$

$$|\varphi(x)| \le M, \quad x \in D; \quad b_0, p_0 > 0. \tag{2.3в}$$

Через $M$ (через $m$) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят от шаблонов разностных схем.

**Наша цель** – для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) построить разностную схему, сходящуюся в равномерной норме с порядком скорости сходимости выше первого.

## 3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим ряд априорных оценок решения задачи (2.2), (2.1), необходимых при построении разностных схем и обосновании их сходимости. В разд. 5 и 6 нам потребуется ограниченность производных $\partial^k/\partial x^k\, u(x,t)$, $\partial^{k_0}/\partial t^{k_0}\, u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, при $k + k_0 \le 3$. Вывод оценок подобен выводу оценок решения и производных регулярных и сингулярных компонент решения сингулярно возмущенного уравнения переноса в [6].

**3.1.** Для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) справедлив *принцип максимума*, подобный принципу максимума для сингулярно возмущенного уравнения переноса в [6].

**Теорема 3.1.** *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие*

$$Lu(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in G; \quad u(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in S.$$

*Тогда для функции* $u(x,t)$ *справедлива оценка* $u(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}$.

**3.2.** Приведем априорные оценки для решения задачи Коши (2.2), (2.1).

Применяя технику мажорантных функций (подобную приведенной в [6] для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса), находим оценку решения задачи (2.2), (2.1)

$$|u(x,t)| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{3.1}$$

При исследовании производных решения задачи Коши считаем, что коэффициенты и правая часть уравнения являются достаточно гладкими на $\overline{G}$: $b, c, p, f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le K$, $K \le 3$, начальная функция – достаточно гладкая на множестве $S$, производные $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x)$, $k \le K$, ограничены при $K = 3$. При этих условиях выполняется включение

$$u \in C^{k,k_0}(\overline{G}), \quad k + k_0 \le K. \tag{3.2}$$

Тогда для функции $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x,t)\right| \le M, \quad (x,t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \le K. \tag{3.3}$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.2.** *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие* $b, c, p, f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \le K$, $K = 3$. *Тогда для решения задачи Коши* $u(x,t)$ *и его производных справедливы оценки* (3.1)*,* (3.3).

## 4. СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Построим *стандартную разностную схему* на основе монотонной сеточной аппроксимации задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) и исследуем ее сходимость.

**4.1.** На множестве $\overline{G}$ введем сетку

$$\overline{G}_{h\tau} = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0. \tag{4.1}$$

Здесь $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ – равномерные сетки на множествах $(-\infty,\infty)$ и $[0,T]$ соответственно. Пусть $h$ и $\tau$ – шаги сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$; узел (0,0) принадлежит сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

Предполагаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$, $\tau \le MN_0^{-1}$, где $N+1$ и $N_0+1$ – число узлов на отрезке единичной длины на множестве $(-\infty,\infty)$ и число узлов сетки $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем *стандартной разностной схемой* [3]

$$\Lambda z(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_{h\tau}; \quad z(x,t) = \varphi(x), \quad (x,t) \in S_{h\tau}. \tag{4.2а}$$

Здесь $G_{h\tau} = G \cap \overline{G}_{h\tau}$, $S_{h\tau} = S \cap \overline{G}_{h\tau}$,

$$\Lambda \equiv b(x,t)\delta_{\overline{x}} + c(x,t) + p(x,t)\delta_{\overline{t}}, \tag{4.2б}$$

$\delta_{\overline{x}} z(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}} z(x,t)$ – первые обратные разностные производные (производные назад) по $x$ и $t$ соответственно.

Разностная схема (4.2), (4.1) монотонна (определение монотонности разностных схем см., например, в [3]). Для схемы (4.2), (4.1) справедлив *сеточный принцип максимума*.

**Теорема 4.1.** *Пусть для разностной схемы* (4.2), (4.1) *выполняются условия* $\Lambda z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in G_{h\tau}$; $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in S_{h\tau}$. *Тогда для функции* $z(x,t)$ *справедлива оценка* $z(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{G}_{h\tau}$.

**4.2.** С учетом априорных оценок устанавливаем сходимость в равномерной норме разностной схемы (4.2), (4.1).

С использованием оценок (3.3), где $K = 2$, подобно [6], получаем, что решение разностной схемы (4.2), (4.1) сходится в равномерной норме к решению задачи Коши (2.2), (2.1) с оценкой

$$|u(x,t) - z(x,t)| \le M[N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_{h\tau}. \tag{4.3}$$

**Теорема 4.2.** *Пусть для решения задачи Коши* (2.2), (2.1) *выполняется оценка* (3.3) *при* $K = 2$. *Тогда решение разностной схемы* (4.2), (4.1) *сходится в равномерной норме и для него справедлива оценка* (4.3).

## 5. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ СЕТОК

В случае разностной схемы (4.2), (4.1) построим разложения первых обратных разностных производных по $x$ и $t$ по степеням шагов $h$ и $\tau$ равномерных сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$. С использованием этих разложений получим разложения по степеням шагов $h$ и $\tau$ для соответствующих невязок, которые будем использовать в разд. 7 при построении схемы, сходящейся со вторым порядком скорости сходимости.

**5.1.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}} u(x,t)$ по шагу $h$ в узле $(x,t)$, где

$$\delta_{\overline{x}} u(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h}, \quad (x,t) \in \overline{G}_{h\tau}.$$

Заметим, что узел (0,0) принадлежит сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

Заметим, что для $u(x-h,t)$ выполняется следующее разложение по степеням шага $h$:

$$\begin{gathered} u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + 2^{-1}h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 6^{-1}h^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t), \\ (x,t) \in G_{h\tau}, \quad \vartheta \in [x-h,x]. \end{gathered} \tag{5.1}$$

С учетом разложения (5.1) для $u(x-h,t)$ получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\bar{x}}u(x,t)$ по степеням шага $h$ в узле $(x,t)$

$$\delta_{\bar{x}}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - 2^{-1}h\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + 6^{-1}h^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \vartheta\in[x-h,x]. \tag{5.2}$$

Теперь, с учетом разложения (5.2) получаем разложение по степеням шага $h$ в узле $(x,t)$ для разности $\delta_{\bar{x}}u(x,t) - \partial/\partial x u(x,t)$, которую назовем *невязкой* по аналогии с определением у Н.Н. Калиткина [5]

$$\delta_{\bar{x}}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = -2^{-1}h\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + 6^{-1}h^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t), \quad (x,t)\in G_{h\tau}. \tag{5.3}$$

**5.2.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\bar{t}}u(x,t)$ по степеням шага $\tau$ в узле $(x,t)$, где

$$\delta_{\bar{t}}u(x,t) = \frac{u(x,t)-u(x,t-\tau)}{\tau}, \quad (x,t)\in G_{h\tau}.$$

Узел (0,0) принадлежит сетке $\bar{G}_{h\tau}$.

Подобно разложению (5.1), для $u(x,t-\tau)$ выполняется следующее разложение по степеням шага $\tau$:

$$u(x,t-\tau) = u(x,t) - \tau\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + 2^{-1}\tau^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - 6^{-1}\tau^3\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \eta\in[t-\tau,t]. \tag{5.4}$$

С учетом разложения (5.4) для $u(x,t-\tau)$ получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\bar{t}}u(x,t)$ по степеням шага $\tau$

$$\delta_{\bar{t}}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - 2^{-1}\tau\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 6^{-1}\tau^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \eta\in[t-\tau,t]. \tag{5.5}$$

Аналогично (5.3), с учетом разложения (5.5), получаем разложение по степеням шага $\tau$ в узле $(x,t)$ для невязки $\delta_{\bar{t}}u(x,t) - \partial/\partial t u(x,t)$:

$$\delta_{\bar{t}}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -2^{-1}\tau\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 6^{-1}\tau^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}. \tag{5.6}$$

**5.3.** Основные результаты о разложении обратных разностных производных по $x$ и $t$ и невязок по степеням сеточных шагов $h$ и $\tau$ равномерных сеток $\bar{\omega}$ и $\bar{\omega}_0$.

Справедлива следующая

**Теорема 5.1.** *Пусть для решения задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется оценка* (3.3) *при* $K = 3$. *Тогда в случае разностной схемы* (4.2), (4.1) *для разностных производных* $\delta_{\bar{x}}u(x,t)$ *и* $\delta_{\bar{t}}u(x,t)$, $(x,t)\in G_{h\tau}$ *справедливы разложения* (5.2) *и* (5.5) *соответственно.*

Также справедлива следующая

**Теорема 5.2.** *Пусть выполняется условие теоремы* 5.1. *Тогда для невязок* $\delta_{\bar{x}}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ *и* $\delta_{\bar{t}}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ *справедливы разложения* (5.3) *и* (5.6).

## 6. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТОК

На основе сетки $\bar{G}_{h\tau(4.1)}$, введенной в (4.1), строим *разреженную сетку*, на которой для разностной схемы (4.2), аналогично построениям в разд. 5, строим разложения разностных производных по $x$ и $t$ по степеням шагов разреженных сеток и разложения для соответствующих невязок, которые будут использованы в разд. 7 при построении схемы улучшенного порядка точности, сходящейся со вторым порядком скорости сходимости.

**6.1.** На основе сетки $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$ строим следующую *разреженную сетку*:

$$\overline{G}^*_{h^*\tau^*} = \overline{\omega}^* \times \overline{\omega}^*_0. \tag{6.1}$$

Здесь $\overline{\omega}^*$ и $\overline{\omega}^*_0$ – равномерные сетки на множествах $(-\infty,\infty)$ и $[0,T]$ соответственно. Величины шагов $h^*$ и $\tau^*$ сеток $\overline{\omega}^*$ и $\overline{\omega}^*_0$ в два раза больше величины шагов $h$ и $\tau$ сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$. Узел (0,0) принадлежит исходной сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

На сетке $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$ рассмотрим *разностную схему*

$$\begin{gathered}\Lambda^* z^*(x,t) \equiv \left\{b(x,t)\delta_{\overline{x}^*} + p(x,t)\delta_{\overline{t}^*} + c(x,t)\right\} z^*(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G^*_{h^*\tau^*},\\ z^*(x,t) = \varphi(x), \quad (x,t) \in S^*_{h^*\tau^*}.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь $G^*_{h^*\tau^*} = G \cap \overline{G}^*_{h^*\tau^*}$, $S^*_{h^*\tau^*} = S \cap \overline{G}^*_{h^*\tau^*}$; $\delta_{\overline{x}^*} z^*(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}^*} z^*(x,t)$ – первые обратные разностные производные на разреженной сетке

$$\delta_{\overline{x}^*} z^*(x,t) = \frac{z^*(x,t) - z^*(x-h^*,t)}{h^*}, \quad (x,t) \in \overline{G}^*_{h^*\tau^*}.$$

$$\delta_{\overline{t}^*} z^*(x,t) = \frac{z^*(x,t) - z^*(x,t-\tau^*)}{\tau^*}, \quad (x,t) \in G^*_{h^*\tau^*}.$$

Для функции

$$w^*(x,t) = z^*(x,t) - u(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^*_{h^*\tau^*}$$

выполняется следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\Lambda^* w^*(x,t) = \Lambda^* z^*(x,t) - \Lambda^* u(x,t) = (L - \Lambda^*)u(x,t) = b(x,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - \delta_{\overline{x}^*}u(x,t)\right] +\\ + p(x,t)\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \delta_{\overline{t}^*}u(x,t)\right], \quad (x,t) \in G^*_{h^*\tau^*},\end{gathered} \tag{6.3}$$

причем

$$w^*(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S^*_{h^*\tau^*}.$$

**6.2.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)$ по шагу $h^*$ в узле $(x,t)$.

Для производной $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)$ имеем следующее представление:

$$\delta_{\overline{x}^*}u(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x-h^*,t)}{h^*}, \quad (x,t) \in \overline{G}^*_{h^*\tau^*}.$$

Узел (0,0) принадлежит сетке $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$.

Заметим, что для $u(x-h^*,t)$ выполняется следующее разложение по степеням шага $h^*$:

$$\begin{gathered}u(x-h^*,t) = u(x,t) - h^*\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + 2^{-1}h^{*2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - 6^{-1}h^{*3}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t),\\ (x,t) \in G^*_{h^*\tau^*}, \quad \vartheta \in [x-h^*,x].\end{gathered} \tag{6.4}$$

С учетом разложения (6.4) для $u(x-h^*,t)$ получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\bar{x}^*}u(x,t)$ по степеням шага $h^*$

$$\delta_{\bar{x}^*}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - 2^{-1}h^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + 6^{-1}h^{*2}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t),$$
$$(x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \vartheta\in[x-h^*,x]. \tag{6.5}$$

**6.3.** Подобно (6.4), для $u(x,t-\tau^*)$ выполняется следующее разложение по степеням шага $\tau^*$:

$$u(x,t-\tau^*) = u(x,t) - \tau^*\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + 2^{-1}\tau^{*2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - 6^{-1}\tau^{*3}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,\eta),$$
$$(x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,t]. \tag{6.6}$$

С учетом разложения (6.6) для $u(x,t-\tau^*)$, получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\bar{t}^*}u(x,t)$ по степеням шага $\tau^*$

$$\delta_{\bar{t}^*}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - 2^{-1}\tau^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 6^{-1}\tau^{*2}\,\frac{\partial^3}{\partial \tau^3}u(x,\eta),$$
$$(x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,t]. \tag{6.7}$$

**6.4.** Основной результат о разложении разностных производных по $x$ и $t$ по степеням сеточных шагов разреженной сетки $G^*_{h^*\tau^*}$.

В силу разложений (6.5) и (6.7), для невязок $\delta_{\bar{x}^*}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ и $\delta_{\bar{t}^*}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ справедливы следующие разложения по степеням сеточных шагов $h^*$ и $\tau^*$:

$$\begin{aligned}\delta_{\bar{x}^*}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) &= -2^{-1}h^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + 6^{-1}h^{*2}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(\vartheta,t),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \vartheta\in[x-h^*,x];\\ \delta_{\bar{t}^*}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) &= -2^{-1}\tau^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 6^{-1}\tau^{*2}\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,\eta),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,t].\end{aligned} \tag{6.8}$$

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 6.1.** *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие* $b,c,p,f\in C^{k,k_0}(\bar{G})$, $k+k_0\le K$, $K=3$. *Тогда для невязок* $\delta_{\bar{x}^*}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)$ *и* $\delta_{\bar{t}^*}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ *справедливы разложения* (6.8) *на разреженной сетке* $G^*_{h^*\tau^*}$.

## 7. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РИЧАРДСОНА

Отметим, что структура разложений невязок сеточных решений относительно шагов сеток на основной и разреженной равномерных сетках подобна. Эти разложения позволяют применить технику Ричардсона и построить сеточное решение, сходящееся со вторым порядком скорости сходимости.

**7.1.** Рассмотрим линейную комбинацию решения $z(x,t)$ разностной схемы (4.2), (4.1) на основной сетке и решения $z^*(x,t)$ разностной схемы (6.2), (6.1) на разреженной сетке $\bar{G}^*_{h^*\tau^*}$, введенной в (6.1):

$$\hat{z}(x,t) = \hat{z}(x,t;\alpha) = \alpha z(x,t) + (1-\alpha)z^*(x,t),\quad (x,t)\in\bar{G}^*_{h^*\tau^*}, \tag{7.1}$$

где параметр $\alpha$ выбираем из условия, чтобы разложения по $h$ и $\tau$ для невязки $\hat{z}(x,t)$ не содержали линейных членов разложения.

С учетом разложений невязок (5.6) и (6.8), получаем

$$\alpha = 2. \tag{7.2}$$

В силу соотношений (7.1) и (7.2), функция $\hat{z}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}^*_{h^*\tau^*}$, при $\alpha = 2$ переходит в функцию $\tilde{z}(x,t)$, определяемую следующим соотношением:

$$\tilde{z}(x,t) = \hat{z}(x,t;\alpha = 2) = 2z(x,t) - z^*(x,t), \quad (x,t) \in \bar{G}^*_{h^*\tau^*}. \tag{7.3}$$

Заметим, что для функции $\tilde{z}(x,t)$ разложения невязок по $h$ и $\tau$ не содержат линейных членов, что влечет следующую оценку:

$$\left|\tilde{z}(x,t) - u(x,t)\right| \le M(N^{-2} + N_0^{-2}), \quad (x,t) \in \bar{G}^*_{h^*\tau^*}. \tag{7.4}$$

Здесь мы учли, что при $t = 0$ и $\alpha = 2$ соотношение (7.3) также выполняется.

Таким образом, построенная разностная схема – будем говорить – схема Ричардсона (7.3), (6.1), при $N, N_0 \to \infty$ сходится в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости; для решения разностной схемы справедлива оценка (7.4).

Справедлива следующая

**Теорема 7.1.** *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b,c,p,f \in C^{k,k_0}(\bar{G})$, $k + k_0 \le K$, $K = 3$. *Тогда решение* $\tilde{z}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}^*_{h^*\tau^*}$, *разностной схемы Ричардсона* (7.3), (6.1) *сходится в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости; для решения* $\tilde{z}(x,t)$, $(x,t) \in \bar{G}^*_{h^*\tau^*}$, *справедлива оценка* (7.4).

## 8. ВЫВОДЫ

1. Рассмотрена постановка задачи Коши для уравнения переноса и определена цель исследования.

2. Для задачи Коши для уравнения переноса построена монотонная стандартная разностная схема и установлена ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

3. Построены разложения первых обратных разностных производных по степеням шагов *основных* равномерных пространственной и временной сеток. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок сеточных решений.

4. Построены разложения первых обратных разностных производных по степеням шагов *разреженных* равномерных пространственной и временной сеток. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок сеточных решений.

5. На основе линейной комбинации решений разностных схем на основной и разреженной сетках, с учетом разложений соответствующих невязок на основной и разреженной сетках, построена разностная схема Ричардсона, сходящаяся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
2. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979. 320 с.
3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
4. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
5. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
6. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.