

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.95

**АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КЕЛЛОГА  
ДЛЯ КУСОЧНО-ЛЯПУНОВСКИХ ОБЛАСТЕЙ**

© 2023 г. А. П. Солдатов<sup>1,2,3,\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

<sup>2</sup> Московский центр фундаментальной и прикладной математики при МГУ, Москва, Россия

<sup>3</sup> 111250 Москва, Красноказарменная ул., 14, НИУ МЭИ, Россия

\*e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 16.01.2023 г.  
Переработанный вариант 16.01.2023 г.  
Принята к публикации 28.04.2023 г.

В рамках весовых гёльдеровых пространств введены классы гладких дуг и кусочно-гладких контуров, инвариантные относительно отображений степенными функциями. В терминах этих классов по аналогии с классической теоремой Келлога описаны граничные свойства конформных отображений. Библ. 3.

**Ключевые слова:** конформное отображение, кусочно-ляпуновский контур, радиальная дуга, весовое пространство Гёльдера.

**DOI:** 10.31857/S0044466923080148, **EDN:** WTNCGU

По определению гладкая дуга на комплексной плоскости принадлежит классу  $C^{n,\nu}$ ,  $0 < \nu < 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , если она допускает параметризацию из аналогичного класса. Пусть область  $D$  ограничена контуром  $\Gamma$ , составленным из дуг  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \in C^{n,\nu}$ , и конечное множество  $F$  образовано концами этих дуг. В этом случае говорим, что пара  $(\Gamma, F)$  принадлежит классу  $C^{n,\nu}$ . Очевидно,  $F$  состоит из  $m$  точек, к каждой из которых сходятся две дуги. Запись  $\Gamma \in C^{n,\nu}$  означает, что контур  $\Gamma$  гладкий, и любая дуга  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$  принадлежит классу  $C^{n,\nu}$ .

Рассмотрим какую-либо каноническую область  $\mathbb{D}$ , ограниченную гладким контуром класса  $C^{n,\nu}$ , причем число связных компонент обоих контуров  $\Gamma$  и  $\partial\mathbb{D}$  одно и то же. В частности, существует конформное отображение  $\omega$  области  $D$  на  $\mathbb{D}$ . Если контур  $\Gamma \in C^{n,\nu}$ , то согласно классической теореме Келлога (см. [1], [2]) функция  $\omega \in C^{n,\nu}(\bar{D})$ , и аналогичным свойством обладает обратное отображение  $\omega^{-1}$ . В общем случае, когда  $(\Gamma, F) \in C^{n,\nu}$ , функция  $\omega$  принадлежит классу  $C^{n,\nu}(\bar{D}_0)$  в любой подобласти  $D_0 \subseteq D$ , лежащей вне окрестности множества  $F$ .

Рассмотрим это конформное отображение в окрестности точек  $\tau \in F$ . Положим  $S_\tau = D \cap \{|z - \tau| < \varrho\}$ , где  $\varrho$  достаточно мало. Тогда  $S_\tau$  представляет собой криволинейный сектор с вершиной  $\tau$  и боковыми сторонами  $G_\tau^\pm$ . Раствор  $\theta_\tau$  этого сектора предполагаем положительным, так что  $0 < \theta_\tau \leq 2\pi$ . Таким образом, все внутренние углы области  $D$  в точках  $\tau \in F$  положительны.

Следующий результат хорошо известен (см. [2]) и описывает поведение функции  $\omega$  в окрестности  $\tau$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(\Gamma, F)$  принадлежит классу  $C^{1,\nu}$  и  $\delta_\tau = \pi/\theta_\tau$ ,  $\tau \in F$ . Тогда

$$\omega(z) - \omega(\tau) = A_\tau(z)(z - \tau)^{\delta_\tau}, \quad \omega'(z) = B_\tau(z)(z - \tau)^{\delta_\tau - 1}, \quad (1)$$

где  $A_\tau, B_\tau \in C^\varepsilon(\bar{S}_\tau)$  с достаточно малым  $\varepsilon > 0$ , причем  $A_\tau(\tau) \neq 0$ ,  $B_\tau(\tau) \neq 0$ .

Аналогичный результат справедлив и для обратного отображения  $\omega^{-1}$  по отношению к  $\delta_\tau = \theta_\tau/\pi$ .

**Доказательство** почти очевидно и основывается на теореме Келлога. Не ограничивая общности, можно считать, что  $\tau = \omega(\tau) = 0$ , и символ  $\tau$  в обозначениях опущен. Рассмотрим область  $\tilde{S} = \{z^\delta, z \in S\}$ , которая является “криволинейным полукругом”. При этом гладкая дуга

$$\partial\tilde{S} \cap \{|\zeta| \leq \varrho^\delta\}$$

принадлежит классу  $C^{1,\varepsilon}$  с некоторым малым  $\varepsilon$ . Более точно, можно положить  $\varepsilon = \min(v, v/\delta)$ . По теореме Келлога функция  $\tilde{\omega}(\zeta) = \omega(\zeta^{1/\delta}) \in C^{1,\varepsilon}(\tilde{S}_0)$ , где  $\tilde{S}_0 = \tilde{S} \cap \{|\zeta| < \varrho_0\}$ ,  $\varrho_0 < \varrho^\delta$ . Поэтому остается заметить, что  $\omega(z) = \tilde{\omega}(z^\delta)$ ,  $z \in S$ .

Основная цель статьи состоит в построении классов гладких дуг, которые были бы инвариантны относительно степенных функций, выпрямляющих контур в окрестности его угловых точек. Использование подобных классов позволило бы в рамках соответствующих весовых пространств описать единообразно коэффициенты  $A$  и  $B$  в представлениях (2). В основе всех построений лежат весовые гильбертовы пространства  $C_\lambda^{n,v}$ , подробно описанные в [3].

Предварительно введем следующее понятие. Гладкую дугу  $G$  с концом  $\tau$  назовем *радиальной* (по отношению к этому концу), если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = \tau + re^{ih(r)}, \quad 0 \leq r \leq \varrho, \tag{2}$$

где функция  $h(r) \in C[0, \varrho] \cap C^1(0, \varrho]$  и  $rh'(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow 0$ . Эквивалентное определение состоит в том, что каждая окружность радиуса  $r \leq \varrho$  с центром в  $\tau$  пересекает эту дугу в единственной точке и при том некасательно.

Нетрудно видеть, что любая разомкнутая гладкая дуга  $G$  в некоторой окрестности своего конца  $\tau$  радиальна.

В самом деле, пусть  $\delta(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , – некоторая ее гладкая параметризация, причем  $\delta(0) = \tau$ . Тогда функция  $\alpha(t) = |\delta(t) - \delta(0)|$  непрерывно дифференцируема, и  $\alpha'(0) = |\delta'(0)|$ . Поэтому на отрезке  $[0, \varepsilon]$ , где  $\varepsilon < 1$  достаточно мало, функция  $r = \alpha(t)$  имеет обратную  $t = \beta(r)$ ,  $0 \leq r \leq \varrho = \alpha(\varepsilon)$ , и функция  $\gamma(r) = \delta[\beta(r)]$  есть радиальная параметризация соответствующей дуги.

Класс  $C^{n,v}$  радиальных дуг можно описать в терминах функции  $\theta(r)$ , фигурирующей в представлении (2).

**Лемма 1.** *Радиальная дуга  $(G, \tau)$  принадлежит классу  $C^{n,v}$  тогда и только тогда, когда*

$$h(r) \in C^{n-1,v}[0, \varrho], \quad rh^{(n)}(r) \in C^v[0, \varrho]. \tag{3}$$

**Доказательство.** Если выполнены условия (3), то функция  $\gamma$  в (2) принадлежит классу  $C^{n,v}[0, \varrho]$  и, следовательно, дуга  $G \in C^{n,v}$ . Обратное, пусть эта дуга допускает параметризацию  $\delta : [0, \varrho] \rightarrow G$  класса  $C^{n,v}[0, \varrho]$  и  $\delta(0) = \tau$ . Не ограничивая общности, можно считать, что  $\tau = 0$ . Функция

$$\delta_0(t) = t^{-1}\delta(t) = \int_0^1 \delta'(tu)du \in C^{n-1,v}$$

и всюду отлична от нуля, так что вместе с ней классу  $C^{n-1,v}$  принадлежат и функции  $|\delta_0|^{\pm 1}$ . Функция  $\alpha(t) = |\delta(t)|$  осуществляет гомеоморфизм отрезка  $[0, \varrho]$  на себя с положительной производной

$$\alpha' = \frac{\operatorname{Re}(\delta' \bar{\delta})}{|\delta|} = \frac{\operatorname{Re}(\delta' \bar{\delta}_0)}{|\delta_0|},$$

принадлежащей классу  $C^{n-1, \nu}$ . Поэтому  $\alpha \in C^{n, \nu}$ , и аналогичным свойством обладает обратное отображение  $\beta = \alpha^{-1}$ . Но тогда и функция  $\delta \circ \beta \in C^{n, \nu}$ . Поскольку она также является параметризацией дуги и  $|\delta[\beta(r)]| = \alpha[\beta(r)] = r = |\gamma(r)|$ , отсюда следует, что  $\gamma = \delta \circ \beta$  и, значит,  $\gamma \in C^{n, \nu}[0, \varrho]$ . Но тогда  $r^{-1}\gamma(r) = e^{ih(r)} \in C^{n-1, \nu}[0, \varrho]$ , так что и  $h(r) \in C^{n-1, \nu}[0, \varrho]$ . После  $n$ -кратного дифференцирования равенства (2) приходим к справедливости и второго условия в (3).

В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что в теореме 1 боковые стороны  $G_{\tau}^{\pm}$  криволинейных секторов  $S_{\tau}$  радиальны и определяются формулой (2) с соответствующими функциями  $h_{\tau}^{\pm}(r)$ . Зафиксируем  $\tau$ , опуская символ  $\tau$  в обозначениях. Рассмотрим функцию  $\zeta = \ln(z - \tau)$ , которая отображает  $S$  на криволинейную полуполосу  $Q$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} \zeta \leq \ln \varrho$ . В явном виде

$$Q = \{\zeta = \xi + i\eta, |g^{-}(\xi) < \eta < g^{+}(\xi), \xi < \ln \varrho\} \quad (4)$$

с функциями  $g^{\pm}(\xi) = h^{\pm}(e^{\xi})$ . Очевидно, эти функции имеют конечные пределы  $\theta^{\pm}$  на  $-\infty$ , причем  $(g^{\pm})'(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$ .

Обозначим  $C^{n, \nu}(\bar{Q})$ ,  $0 \leq \nu \leq 1$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , класс аналитических в  $Q$  функций, которые вместе со своими производными до  $n$ -го порядка включительно непрерывны и ограничены в замкнутой области  $\bar{Q}$  и при  $0 < \nu < 1$  ( $\nu = 1$ ) удовлетворяют условию Гёльдера с показателем  $\nu$  (условию Липшица). Относительно соответствующей нормы это пространство является банаховой алгеброй по умножению.

По определению пространство  $C_0^{n, \mu}(\bar{S}, \tau)$  состоит из всех функций

$$\phi(z) = \psi[\ln(z - \tau)], \quad \psi \in C^{n, \nu}(\bar{Q}). \quad (5)$$

Оно снабжается перенесенной нормой, относительно которой является банаховой алгеброй. Весовое пространство  $C_{\lambda}^{n, \mu}(\bar{S}, \tau)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , состоит из функций

$$\phi(z) = (z - \tau)^{\lambda} \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C_0^{n, \nu}(\bar{S}, \tau). \quad (6)$$

Относительно перенесенной нормы это пространство банахово. Полученное семейство банаховых пространств монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров:

$$C_{\lambda}^{n, \nu_2} \subseteq C_{\lambda}^{n, \nu_1}, \quad \nu_1 \leq \nu_2 \leq 1; \quad C_{\lambda_2}^{n, \nu} \subseteq C_{\lambda_1}^{n, \nu}, \quad \lambda_1 \leq \lambda_2; \quad C_{\lambda}^{n+1, 0} \subseteq C_{\lambda}^{n, 1}. \quad (7)$$

В самом деле, первое вложение является следствием аналогичного свойства пространств  $C^{n, \nu}$ . Второе вложение вытекает из того, что при  $\varepsilon > 0$  функция  $(z - \tau)^{\varepsilon}$  принадлежит  $C_0^{n, \nu}$ . Наконец, третье вложение выводится из аналогичного вложения  $C^{n+1, 0}(\bar{Q}) \subseteq C^{n, 1}(\bar{Q})$ . Нетрудно убедиться, что оно справедливо для любой области  $Q$ , которая равномерно связна в следующем смысле. Существует такая постоянная  $M \geq 1$ , что любые две точки  $\zeta_1, \zeta_2 \in Q$  можно соединить в этой области гладкой дугой, длина которой не превосходит  $M|\zeta_1 - \zeta_2|$ . Из описания (4) рассматриваемой криволинейной полуполосы  $Q$  легко видеть, что она равномерно линейно связна.

Исходя из пространств  $C_{\lambda}^{0, \nu}$ , аналогичные пространства для  $n \geq 1$  можно ввести индуктивно по  $n$  условиям

$$\phi \in C_{\lambda}^{n-1, \nu}, \quad \phi' \in C_{\lambda-1}^{n-1, \nu}. \quad (8)$$

Это следует из аналогичного описания пространств  $C^{n, \nu}(\bar{Q})$  и того факта, что равенство  $\phi(z) = \psi[\ln(z - \tau)]$  влечет  $(z - \tau)\phi'(z) = \psi'[\ln(z - \tau)]$ .

В свою очередь, пространство  $C_0^{0,\nu}$  при  $0 < \nu \leq 1$  может быть определено независимо как класс всех ограниченных аналитических в  $S$  функций  $\phi(z)$ , для которых  $(z - \tau)\phi(z) \in C^{0,\nu}(\bar{S})$ . Последнее условие равносильно тому, что функция  $\phi$  удовлетворяет оценке

$$|z_1 - \tau|^\nu |\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq C_0 |z_1 - z_2|^\nu, \tag{9}$$

где постоянная  $C_0 > 0$  не зависит от  $z_1, z_2 \in S$ .

Именно подобным образом семейство пространств  $C_\lambda^{n,\nu}$  вводилось в [3]. Эквивалентность этих двух подходов обеспечивается теоремой 2.7.2 этой работы.

Отметим связь весовых пространств с преобразованиями области  $Q$  на себя.

**Лемма 2.** Пусть аналитическая в  $S$  функция  $\alpha$  осуществляет гомеоморфизм  $\bar{S}$  на себя, оставляя точку  $\tau$  неподвижной, и удовлетворяет двустороннему условию Липшица

$$C^{-1} |z_1 - z_2| \leq |\alpha(z_1) - \alpha(z_2)| \leq C |z_1 - z_2|, \tag{10}$$

где постоянная  $C \geq 1$  не зависит от  $z_1, z_2$ .

Тогда оператор  $\phi \rightarrow \phi \circ \alpha$  ограничен в пространстве  $C_\lambda^{0,\nu}(\bar{S}, \tau)$ .

Эта лемма установлена в [3], однако чтобы проиллюстрировать приведенные выше свойства весовых пространств, приведем ее доказательство. Достаточно ограничиться случаем  $0 < \nu \leq 1$ . Функция  $\alpha(z) - \tau = \alpha(z) - \alpha(\tau)$  удовлетворяет условию Липшица и обращается в нуль в точке  $\tau$ , так что она принадлежит  $C_1^{0,1}(\bar{S}, \tau)$  и, следовательно,

$$a(z) = (z - \tau)^{-1} [\alpha(z) - \tau] \in C_0^{0,1}(\bar{S}, \tau).$$

В частности, функция  $a$  удовлетворяет оценке (9) с  $\nu = 1$ . Она показывает, что если область  $D$  содержит множество значений этой функции и  $f \in C^{0,1}(\bar{D})$ , то суперпозиция  $f \circ a$  также удовлетворяет этой оценке и, значит, принадлежит  $C_0^{0,1}$ . В силу (10) область  $D$  можно выбрать односвязной вне некоторой окрестности нуля, так что функция  $f(\zeta) = \zeta^\lambda$  принадлежит  $C^{0,1}(\bar{D})$ . Следовательно, функция

$$b(z) = (z - \tau)^{-\lambda} [\alpha(z) - \tau]^\lambda \in C_0^{0,1}(\bar{S}, \tau)$$

для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Таким образом, в соответствии с (6) лемму достаточно установить хотя бы для одного весового порядка  $\lambda$ . Пространство  $C_\nu^{0,\nu}(\bar{S}, \tau)$  совпадает с подпространством  $C^{0,\nu}(\bar{S})$  функций, обращающихся в точке  $\tau$  в нуль. Но в силу (10) для этого пространства утверждение леммы очевидно.

С каждым целым числом  $l \leq n$  свяжем модифицированный весовой класс

$$C_{(l)}^{n,\nu}(\bar{S}, \tau) = P_l + \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} C_{l+\varepsilon}^{n,\nu}(\bar{S}, \tau), \tag{11}$$

где  $P_l$  означает класс всех многочленов степени не выше  $l$  (так что  $P_l = 0$  при  $l < 0$ ). Из определения видно, что

$$C^{l,\nu}(\bar{S}) \subseteq C_{(l)}^{n,\nu}(\bar{S}, \tau) \subseteq \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} C^{l,\varepsilon}(\bar{S}), \quad 0 \leq l \leq n. \tag{12}$$

В частности, класс  $C_{(l)}^{n,\nu}(\bar{S}, \tau)$  состоит из всех функций  $\phi \in C^l(\bar{S})$ , для которых

$$\phi(z) - \sum_{k=0}^l \frac{\phi^{(k)}(\tau)}{k!} (z - \tau)^k \in C_{l+\varepsilon}^{n,\nu}(\bar{S}, \tau)$$

с некоторым малым положительным  $\varepsilon$ .

Заметим, что класс  $C_{(l)}^{n,\nu}$  выдерживает умножение на функции  $a \in C_{(0)}^{n,\nu}$ , в частности, при  $l = 0$  он является алгеброй. В дальнейшем главный интерес представляют случаи  $l = 0$  и  $l = 1$ .

Пространства  $C_{\lambda}^{n,\nu}$  и классы  $C_{(l)}^{n,\nu}$  совершенно аналогично можно ввести и в случае, когда роль  $S$  играет отрезок прямой, а точка  $\tau$  — один из его концов. При этом условие аналитичности в  $S$  заменяется дифференцируемостью на этом интервале. Ясно, что все перечисленные свойства весовых пространств сохраняются без изменений.

По определению гладкая дуга  $G$  с концом  $\tau$  принадлежит классу  $C_{(1)}^{n,\nu}$ , если она допускает параметризацию  $\delta : [0,1] \rightarrow G$ ,  $\delta(0) = \tau$ , принадлежащую соответствующему пространству  $C_{(1)}^{n,\nu}([0,1],0)$ . В силу (12) имеем вложение  $C_{(1)}^{n,\nu} \subseteq C^{1,\varepsilon}$  с некоторым малым  $\varepsilon > 0$ , так что дуги этого класса являются ляпуновскими. При этом вне любой окрестности своего конца  $\tau$  они принадлежат классу  $C^{n,\nu}$ .

Обратимся к криволинейным секторам  $S_{\tau}$  с боковыми сторонами  $G_{\tau}^{\pm}$ , фигурирующим в теореме 1. По определению пара  $(\Gamma, F)$  принадлежит классу  $C_{(1)}^{n,\nu}$ , если все дуги  $G_{\tau}^{\pm} \in C_{(1)}^{n,\nu}$  и любая дуга  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$  принадлежит классу  $C^{n,\nu}$ .

В принятых обозначениях основной результат статьи, уточняющий теорему 1, можем сформулировать следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть  $(\Gamma, F)$  принадлежит классу  $C_{(1)}^{n,\nu}$ ,  $0 < \nu < 1$ .

Тогда в представлении (1) функции

$$A_{\tau}(z) \in C_{(0)}^{n,\nu}(\overline{S_{\tau}}, \tau), \quad B_{\tau}(z) \in C_{(0)}^{n-1,\nu}(\overline{S_{\tau}}, \tau). \tag{13}$$

Аналогичный результат справедлив и для обратного отображения  $\omega^{-1}$  по отношению к  $\delta_{\tau} = \theta_{\tau}/\pi$ .

Заметим, что в действительности достаточно установить первое соотношение в (13). В самом деле, дифференцирование первого представления в (1) дает равенство

$$B_{\tau}(z) = \delta_{\tau} A_{\tau}(z) + A_{\tau}(z),$$

согласно которому функция  $B_{\tau}(z) \in C_{(0)}^{n-1,\nu}(\overline{S_{\tau}}, \tau)$ .

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько важных свойств класса  $C_{(l)}^{n,\nu}$ .

**Теорема 3.** (а) Условия  $\phi \in C_{(l)}^{n,\nu}(\overline{S}, \tau)$  и  $\phi' \in C_{(l-1)}^{n-1,\nu}(\overline{S}, \tau)$  равносильны.

(б) Пусть  $\phi \in C_{(0)}^{n,\nu}(\overline{S}, \tau)$ , область  $D$  содержит значения  $\phi(z)$ ,  $z \in S$ , и функция  $f(\zeta) \in C^{n,1}(\overline{D})$ .

Тогда суперпозиция  $f \circ \phi \in C_{(l)}^{n,\nu}(\overline{S}, \tau)$ .

(в) Пусть  $\theta$  есть раствор сектора  $S$  с вершиной  $\tau = 0$ , так что функция  $z \rightarrow z^{\delta}$ , где  $\delta = \pi/\theta$ , переводит  $S$  на криволинейный сектор  $S_0$  раствора  $\pi$ .

Тогда условия  $\phi(z) \in C_{(0)}^{n,\nu}(S_0, 0)$  и  $\phi(z^{\delta}) \in C_{(0)}^{n,\nu}(S, 0)$  равносильны.

**Доказательство.** (а) В одну сторону утверждение следует непосредственно из определения (11). Обратное, пусть  $\phi' \in C_{(l-1)}^{n-1,\nu}(\overline{S}, \tau)$ , так что для некоторого многочлена  $p_1(z) \in P_{l-1}$  функция  $\phi'(z) - p_1(z) \in C_{l-1+\varepsilon}^{n-1,\nu}$  с некоторым малым  $\varepsilon > 0$ . Заменяя  $\phi$  на  $\phi - p$ , где  $p' = p_1$ , можем считать, что

$$\phi'(z) \in C_{l-1+\varepsilon}^{n-1,\nu}. \tag{14}$$

Остается показать, что тогда с точностью до постоянного слагаемого функция  $\phi \in C_{l+\varepsilon}^{n,\nu}$ . Не ограничивая общности, можно считать  $\tau = 0$ .

Из (14), в частности, следует оценка

$$|\phi'(z)| \leq C |z|^{\lambda-1}, \quad \lambda = l + \varepsilon. \tag{15}$$

Поскольку  $0 < \varepsilon < 1$ , число  $\lambda$  здесь отлично от нуля. Зафиксируем точку  $z_0 \in S$  и рассмотрим функцию  $\phi_0(\zeta) = \phi(|z_0|\zeta)$  в области  $D_0$ , представляющей пересечения сектора  $\{\zeta, |z_0|\zeta \in S\}$  с кольцом  $\{1/2 < |\zeta| < 1\}$ . В полярной системе координат  $\zeta = re^{i\theta}$  она описывается неравенством

$$h_0^-(r) < \theta < h_0^+(r), \quad 1/2 < r < 1,$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями  $h_0^\pm(r) = h^\pm(|z_0|r)$ . Эти функции равномерно ограничены по  $|z_0|$  в пространстве  $C^1[1/2, 1]$  и стремятся к постоянным функциям  $\theta^\pm$  по норме этого пространства. Поэтому область  $D_0$  равномерно линейно связна, причем соответствующая постоянная  $M \geq 1$  не зависит от  $z_0$ .

В силу (15) производная функции  $\phi_0(\zeta)$  в области  $D_0$  допускает оценку

$$|\phi_0'(\zeta)| = |z_0| |\phi'(|z_0|\zeta)| \leq C |z_0|^\lambda \max(1, 2^{1-\lambda}).$$

В силу равномерной линейной связности области  $D_0$  отсюда

$$|\phi_0(\zeta_1) - \phi_0(\zeta_2)| \leq C_0 |z_0|^\lambda |\zeta_1 - \zeta_2|, \quad \zeta_j \in D_0,$$

где здесь и ниже  $C_0, C_1, \dots$  означают положительные постоянные, зависящие только от  $C, \lambda$  и  $M$ . Пусть точка  $z_1 \in S$  выбрана по условию  $|z_1| = |z_0|/2$ . Тогда  $z_j = |z_0|\zeta_j$  с  $\zeta_j \in D_0$  и предыдущая оценка переходит в

$$|\phi(z_1) - \phi(z_0)| \leq C_1 |z_0|^\lambda. \tag{16}$$

Далее рассмотрим случаи  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  отдельно. В первом случае рассмотрим последовательность точек  $z_0, z_1, \dots$  области  $S$ , выбранную по условию  $|z_{k+1}| = |z_k|/2$ , которая, очевидно, сходится к нулю. В силу (16) отсюда

$$|\phi(z_{k+s}) - \phi(z_k)| \leq C_1 (|z_k|^\lambda + \dots + |z_{k+s-1}|^\lambda) \leq \frac{C_1 M}{1 - 2^{-\lambda}} |z_k|^\lambda,$$

так что существует предел  $c = \lim \phi(z_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Полагая  $k = 0$  и переходя в этом неравенстве к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , приходим к оценке

$$|\phi(z_0) - c| \leq C_2 |z_0|^\lambda.$$

Вместе с (14) она означает, в частности, что функция  $\phi(z) - c$  принадлежит классу  $C_\lambda^{1,0}(\bar{S}, \tau)$ , так что с учетом (7) она принадлежит и пространству  $C_\lambda^{0,v}(\bar{S}, \tau)$ . Совместно с (14) отсюда следует, что  $\phi(z) - c \in C_\lambda^{n,v}(\bar{S}, \tau)$ . Тем самым рассматриваемое утверждение теоремы для случая  $\lambda > 0$  установлено.

Пусть  $\lambda < 0$ . Выберем последовательность точек  $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-m} \in S$ , удовлетворяющих условию  $|z_{-k-1}| = 2|z_{-k}|$ , где натуральное  $m$  определяется из условия  $|z_{-m}| \leq \varrho$ , но  $|z_{-m-1}| > \varrho$ . Тогда рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к оценке

$$|\phi(z_0)| \leq C_2 |z_0|^\lambda + \sup_{\varrho/2 < |z| < \varrho} |\phi(z)|.$$

Как и выше, из нее совместно с (14) следует, что  $\phi \in C_\lambda^{n,v}$  и в этом случае.

(б) Рассмотрим сначала случай  $n = 0$ , предполагая для простоты  $\tau = 0$ . Пусть  $\phi \in C_{(0)}^{0,v}$ , так что для некоторой постоянной  $c \in \mathbb{C}$  имеем представление

$$\phi(z) = c + z^\varepsilon \phi_0(z), \quad \phi_0 \in C_0^{0,v}, \tag{17}$$

с некоторым малым  $\varepsilon > 0$ .

Нетрудно видеть, что тогда  $\phi$  удовлетворяет аналогичной (9) оценке

$$|z_1|^{v-\varepsilon} |\phi(z_1) - \phi(z_2)| \leq C |z_1 - z_2|^v, \tag{18}$$

справедливой для любых точек  $z_1, z_2 \in S$ , подчиненных условию  $|z_1| \leq |z_2|$ .

В самом деле, величина  $|z_1|^{v-\varepsilon} |\phi(z_1) - \phi(z_2)|$  не превосходит

$$|z_1|^v |\phi_0(z_1) - \phi_0(z_2)| + |z_1|^{v-\varepsilon} |z_1^\varepsilon - z_2^\varepsilon| |\phi_0(z_2)| \leq C |z_1 - z_2|^v$$

с постоянной

$$C = C_0 + \sup_{|\zeta| \geq 1} \frac{|1 - \zeta^\varepsilon|}{|1 - \zeta|^v} \sup_{z \in S} |\phi_0(z)|,$$

где  $C_0$  фигурирует в (9) для  $\phi_0$ .

Убедимся, что верно и обратное: из оценки (18) следует представление (17). Как и при доказательстве (а), зафиксируем точку  $z_0 \in S$  и рассмотрим последовательность  $z_0, z_1, \dots$  точек  $S$ , выбранных по условию  $|z_{k+1}| = |z_k|/2$ . Тогда на основании (18) имеем неравенства

$$|\phi(z_k) - \phi(z_{k+1})| \leq C |z_{k+1}|^\varepsilon |1 - z_{k+1}^{-1} z_k|^\varepsilon \leq C_0 |z_k|^\varepsilon.$$

Как и при доказательстве (а), отсюда заключаем, что существует предел  $c = \lim \phi(z_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ , и справедлива оценка

$$|\phi(z_0) - c| \leq C_1 |z_0|^\varepsilon. \tag{19}$$

В частности, с помощью равенства (17) можем ввести функцию  $\phi_0(z)$ , по модулю не превосходящую  $C_1$ . Остается убедиться, что для нее справедлива оценка (9). Считая для определенности  $|z_1| \leq |z_2|$ , рассмотрим величину  $|z_1|^v |\phi_0(z_1) - \phi_0(z_2)|$ . Очевидно, она не превосходит выражения

$$|z_1|^{v-\varepsilon} |\phi(z_1) - \phi(z_2)| + C_1 |z_1|^v |z_2|^\varepsilon |z_1^{-\varepsilon} - z_2^{-\varepsilon}| \leq C_0 |z_1 - z_2|^v$$

с постоянной

$$C_0 = C + C_1 \sup_{|\zeta| \leq 1} \frac{|\zeta|^v |1 - \zeta^{-\varepsilon}|}{|1 - \zeta|^v},$$

где  $C_1$  фигурирует в (19).

Рассмотрим теперь функцию  $f$ , удовлетворяющую условию Липшица  $|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq L |\zeta_1 - \zeta_2|$  на множестве значений функции  $\phi$ . В силу (18) функция  $f[\phi(z)]$  также удовлетворяет аналогичной оценке с постоянной  $LC$ , так что она принадлежит классу  $C_{(0)}^{0,v}$ , тем самым для  $n = 0$  утверждение теоремы установлено.

В общем случае воспользуемся индукцией по  $n$ , т.е. пусть утверждение справедливо для класса  $C_{(0)}^{n-1,v}$  и  $\phi \in C_{(0)}^{n,v}$ . По предположению индукции в равенстве  $(f \circ \phi)' = (f' \circ \phi)\phi'$  множитель  $f' \circ \phi$  принадлежит  $C_{(0)}^{n-1,v}$ , а функция  $\phi' \in C_{(-1)}^{n-1,v}$ . Поэтому и  $(f \circ \phi)' \in C_{(-1)}^{n-1,v}$ , так что на основании (а) функция  $f \circ \phi \in C_{(0)}^{n,v}$ .

(в) Подстановка  $\zeta = \ln z$  преобразование  $z \rightarrow z^\delta$  переводит в  $\zeta \rightarrow \delta\zeta$ . Поэтому по определению (5) оператор  $\phi(z) \rightarrow \phi(z^\delta)$  осуществляет изоморфизм банаховых пространств  $C_0^{n,v}(D_0, 0) \rightarrow C_0^{n,v}(D, 0)$  и, следовательно,  $C_{\lambda}^{n,v}(D_0, 0) \rightarrow C_{\delta\lambda}^{n,v}(D, 0)$ . В соответствии с определением (11) класса  $C_{(0)}^{n,v}$  отсюда утверждение теоремы получается непосредственно.

Теорема 3 позволяет получить аналог леммы 1 для дуг класса  $C_{(1)}^{n,v}$ .

**Лемма 3.** Радиальная дуга  $(G, \tau)$  принадлежит классу  $C_{(1)}^{n,v}$  тогда и только тогда, когда

$$h(r) \in C_{(0)}^{n,v}([0, \varrho], 0). \tag{20}$$

В частности, преобразование  $z \rightarrow z^\delta$  не выводит из класса  $C_{(1)}^{n,v}$  радиальных дуг с концом  $\tau = 0$ .

**Доказательство** осуществляется по той же схеме, что и лемма 1. Пусть выполнено условие (20), тогда на основании теоремы 3(б) функция  $e^{ih(r)} \in C_{(0)}^{n,v}$ , так что и производная

$$\gamma'(r) = [1 + irh'(r)]e^{ih(r)} \in C_{(0)}^{n-1,v}.$$

Поэтому в силу теоремы 3(а) параметризация  $\gamma \in C_{(1)}^{n,v}$ .

Обратно, пусть эта дуга допускает параметризацию  $\delta : [0, \varrho] \rightarrow G$  класса  $C_{(1)}^{n,v}([0, \varrho], 0)$  и  $\delta(0) = \tau$ . Не ограничивая общности можно считать, что  $\tau = 0$ . Функция  $\delta_0(t) = t^{-1}\delta(t)$  принадлежит  $C_{(0)}^{n,v}$  и всюду отлична от нуля, так что на основании теоремы 3(б) и функции  $|\delta_0|^{\pm 1} \in C_{(0)}^{n,v}$ . Функция  $\alpha(t) = |\delta(t)|$  осуществляет гомеоморфизм отрезка  $[0, \varrho]$  на себя с положительной производной

$$\alpha' = \frac{\operatorname{Re}(\delta' \bar{\delta})}{|\delta|} = \frac{\operatorname{Re}(\delta' \bar{\delta}_0)}{|\delta_0|},$$

которая на основании теоремы 3(б) принадлежит классу  $C_{(0)}^{n-1,v}$ . Поэтому  $\alpha \in C_{(1)}^{n,v}$ .

Утверждается, что аналогичным свойством обладает и обратное отображение  $\beta = \alpha^{-1}$ . В самом деле, функция  $\beta$  удовлетворяет двустороннему условию Липшица, фигурирующему в лемме 2, поэтому на основании этой леммы функция  $\alpha' \circ \beta \in C_{(0)}^{0,v}$  и, значит,  $\beta' = (\alpha' \circ \beta)^{-1}$  принадлежит этому же классу. Тогда  $\beta \in C_{(1)}^{1,v}$ , поскольку при  $n \geq 2$  функция  $\alpha' \in C_{(0)}^{1,v}$ , отсюда и суперпозиция  $\alpha' \circ \beta$ , а вместе с ней и функция  $\beta'$  принадлежат классу  $C_{(0)}^{1,v}$ . При  $n \geq 3$  аналогично убеждаемся, что  $\beta' \in C_{(0)}^{1,v}$ . В результате после конечного числа шагов приходим ко включениям  $\beta' \in C_{(0)}^{n-1,v}$  и  $\beta \in C_{(1)}^{n,v}$ .

Но тогда и функция  $\delta \circ \beta \in C_{(1)}^{n,v}$ . Поскольку она также является параметризацией дуги и  $|\delta[\beta(r)]| = \alpha[\beta(r)] = r = |\gamma(r)|$ , отсюда следует, что  $\gamma = \delta \circ \beta$  и, значит,  $\gamma \in C_{(1)}^{n,v}([0, \varrho], 0)$ . Но тогда  $r^{-1}\gamma(r) = e^{ih(r)} \in C_{(0)}^{n,v}([0, \varrho], 0)$ , так что на основании теоремы 3(б) и  $h(r) \in C_{(0)}^{n,v}([0, \varrho], 0)$ .

Что касается последнего утверждения леммы, то заметим, что образ  $G_0$  радиальной дуги  $G$  с концом  $\tau = 0$  при преобразовании  $z \rightarrow z^\delta$  является радиальной дугой, которая описывается аналогично (2) по отношению к функции  $h_0(r) = \delta h(r^{1/\delta})$ . Поэтому, как отмечено при доказательстве теоремы 3(в), она принадлежит классу  $C_{(0)}^{n,v}$  вместе с  $h$ .

При  $n = 0$  весовые пространства  $C_\lambda^{0,v}$  можно вводить и на дугах  $G$  с концом  $\tau$ , согласно лемме 3 гладкая параметризация  $\delta : [0, 1] \rightarrow G$ ,  $\delta(0) = \tau$ , осуществляет изоморфизм  $C_\lambda^{0,v}(G, \tau) \rightarrow C_\lambda^{0,v}([0, 1], 0)$ . При  $n \geq 1$  на дугах  $G$  класса  $C_1^{n,v}$  пространство  $C_\lambda^{n,v}(G, \tau)$  естественно вводить с помощью параметризации  $\delta$  того же класса условием  $\phi \circ \delta \in C_\lambda^{n,v}([0, 1], 0)$ . Из доказательства леммы 3 видно, что так определенный класс не зависит от выбора параметризации. Аналогично понимаются и классы  $C_{(1)}^{n,v}(G, \tau)$ .

Если кусочно-гладкий контур  $\Gamma$ , ограничивающий область  $D$ , имеет единственную угловую точку, т.е.  $F = \{\tau\}$ , то совершенно аналогично криволинейным секторам определяются пространства  $C_\lambda^{n,v}(\bar{D}, \tau)$  и классы  $C_{(1)}^{n,v}(\bar{D}, \tau)$  с сохранением всех описанных выше их свойств. В случае  $(\Gamma, \tau) \in C_{(1)}^{n,v}$  эти пространства и классы можно рассматривать и на контуре  $\Gamma$ .

Рассмотрим связь классов  $C_{(l)}^{n,v}$  с интегралами типа Коши на единичной окружности.

**Лемма 4.** Пусть  $\mathbb{D}$  есть единичный круг с границей  $\mathbb{T}$ , ориентированной против часовой стрелки, и точка  $\tau \in \mathbb{T}$ . Пусть функция  $\varphi \in C_{(l)}^{n,v}(\mathbb{T}, \tau)$ ,  $-1 \leq l \leq n$ .

Тогда функция

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t) dt}{t - z}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{21}$$

принадлежит  $C_{(l)}^{n,v}(\overline{\mathbb{D}}, \tau)$ .

**Доказательство** проведем сначала для случая  $n = 0$ , когда  $l$  принимает одно из значений  $0, -1$ . Пусть сначала  $l = -1$ , тогда  $\varphi \in C_{\varepsilon-1}^{0,v}(\mathbb{T}, \tau)$ . Как установлено в [3], в этом случае интеграл (21) определяет ограниченный оператор  $C_{\varepsilon-1}^{0,v}(\mathbb{T}, \tau) \rightarrow C_{\varepsilon-1}^{0,v}(\overline{\mathbb{D}}, \tau)$ .

Пусть далее  $l = n = 0$ . Тогда  $\varphi_0 = \varphi - c \in C_{\varepsilon}^{0,v}(\mathbb{T}, \tau)$ . Из очевидного тождества

$$\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \tau} = \frac{z - \tau}{(t - \tau)(t - z)}$$

следует, что  $\phi(z) = c + c_0 + \phi_0$ , где положено

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_0(t) dt}{t - \tau}, \quad \phi_0(z) = \frac{z - \tau}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi_0(t) dt}{(t - \tau)(t - z)}.$$

Поскольку  $(t - \tau)^{-1} \varphi_0(t) \in C_{\varepsilon-1}^{0,v}(\mathbb{T}, \tau)$ , из тех же соображений утверждение леммы справедливо и в этом случае.

Пусть далее  $n \geq 1$ . Условимся производную  $\varphi'$  на  $\mathbb{T}$  понимать по отношению к комплексному параметру, т.е.

$$\varphi'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{T}.$$

Тогда, дифференцируя равенство (21) и интегрируя по частям, получим аналогичное выражение

$$\phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi'(t) dt}{t - z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

для производной функции  $\phi$ . Поэтому на основании теоремы 2(а) дело сводится к случаю, когда  $n$  и  $l$  уменьшены на единицу. Повторяя этот процесс, приходим к двум случаям, когда либо  $l = n = 0$ , либо  $l = -1, n \geq 0$ .

Первый случай, а также случай  $l = -1, n = 0$  разобраны выше. Пусть  $l = -1$  и  $n \geq 1$ , так что  $\varphi \in C_{\varepsilon-1}^{n,v}$ . Вводя обозначение  $\mathcal{D}\varphi = (z - \tau)\varphi'(z)$  для весовой производной, индуктивное определение (8) весового пространства  $C_{\varepsilon-1}^{n,v}$  можем записать в форме  $\phi, \mathcal{D}\phi \in C_{\varepsilon-1}^{n-1,v}$  или, что равносильно, в форме

$$\mathcal{D}^k \phi \in C_{\varepsilon-1}^{0,v}, \quad 0 \leq k \leq n. \tag{22}$$

Воспользуемся тождеством

$$(z - \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{t - z} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t - \tau}{t - z} \right).$$

Как и выше, из него с помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$(\mathcal{D}\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(\mathcal{D}\varphi)(t) dt}{t - z}.$$

Повторяя эту процедуру, в соответствии с (22) отсюда приходим к справедливости леммы и в рассматриваемом случае.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2 в общем случае, рассмотрим отдельно ситуацию, когда область  $D$  ограничена простым гладким контуром  $\Gamma$ , множество  $F$  состоит из одной точки  $\tau$ , и  $\mathbb{D}$  является единичным кругом.

**Теорема 4.** Пусть контур  $\Gamma$  гладкий и  $(\Gamma, \tau) \in C_{(1)}^{n,\nu}$ ,  $0 < \nu < 1$ .

Тогда конформное отображение  $\omega : D \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\omega(\tau) = 1$ , принадлежит  $C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{D}, \tau)$  и, соответственно, обратное отображение  $\sigma = \omega^{-1} \in C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{\mathbb{D}}, 1)$ .

**Доказательство** достаточно провести для  $\sigma$ , тогда принадлежность  $\omega$  классу  $C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{D}, \tau)$  устанавливается совершенно аналогично лемме 3.

Действительно, пусть  $\sigma \in C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{\mathbb{D}}, 1)$ , так что по теореме 3(б) функция

$$(\sigma')^{-1} \in C_{(0)}^{n-1,\nu}(\bar{\mathbb{D}}, 1). \tag{23}$$

Воспользуемся равенством

$$\omega' = (\sigma')^{-1} \circ \omega. \tag{24}$$

По теореме Келлога функция  $\omega$  удовлетворяет двустороннему условию Гёльдера, и можно воспользоваться леммой 2, согласно которой  $\omega' \in C_{(0)}^{0,\nu}(\bar{D}, \tau)$  и, значит,  $\omega \in C_{(1)}^{1,\nu}(\bar{D}, \tau)$ . При  $n \geq 2$  в силу (23) обе функции в правой части (24) принадлежат классу  $C_{(1)}^{1,\nu}(\bar{D}, \tau)$ . Поэтому их композиция  $\omega' \in C_{(0)}^{1,\nu}(\bar{D}, \tau)$  и, значит,  $\omega \in C_{(1)}^{2,\nu}(\bar{D}, \tau)$ . Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов получим  $\omega \in C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{D}, \tau)$ .

Итак, достаточно доказать, что  $\sigma \in C_{(1)}^{n,\nu}(\bar{\mathbb{D}}, 1)$ . Пусть  $e(t)$  означает единичный касательный вектор к контуру  $\Gamma$  в точке  $t$ , направление которого совпадает с обходом контура против часовой стрелки. Тогда в силу леммы 3 функция

$$e(t) \in C_{(0)}^{n,\nu}(\Gamma, \tau). \tag{25}$$

По отношению к единичной окружности  $\mathbb{T}$  аналогичный вектор  $e(t) = it$ . Известно (см. [1]), что аргумент производной  $\sigma'$  на граничной окружности  $|t| = 1$  единичного круга  $\mathbb{D}$  дается равенством

$$\arg \sigma'(t) = \arg e[\sigma(t)] - \arg t - \pi/2, \quad |t| = 1. \tag{26}$$

Поскольку  $\sigma$  удовлетворяет двустороннему условию Липшица, в силу леммы 2 из этого равенства следует, что  $\arg \sigma' \in C_{(0)}^{0,\nu}$ . В единичном круге функция  $-i \ln \sigma'$ , реальная часть которой на границе совпадает с  $\arg \sigma'$ , восстанавливается по формуле Шварца

$$-i \ln \sigma'(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\arg \sigma'(t) dt}{t - z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Поэтому на основании леммы 4 и теоремы 3 функция  $\sigma \in C_{(1)}^{1,\nu}$ . Но тогда при  $n \geq 2$  из (26) следует, что  $\arg \sigma' \in C_{(0)}^{1,\nu}$ , так что из тех же соображений  $\sigma \in C_{(1)}^{1,\nu}$ . Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов получим  $\sigma \in C_{(1)}^{n,\nu}$ .

**Доказательство теоремы 2.** В силу теоремы 1, не ограничивая общности, можно считать, что область  $D$  ограничена простым контуром с одной угловой точкой  $\tau = 0$ , т.е.  $(\Gamma, \tau) \in C_{(1)}^{n,\nu}$ . Соответственно в качестве области  $\mathbb{D}$  можно выбрать единичный круг. Можно также считать, что функция  $\zeta = z^\delta$ , где  $\delta = \pi/\theta_0$ , однолистка в области  $D$  и отображает ее на область  $D_0$ , ограниченную гладким контуром  $\Gamma_0$ . В силу леммы 3 этот контур также принадлежит классу  $C_{(1)}^{n,\nu}$ .

Запишем  $\omega(z) = \omega_0(z^\delta)$ , где  $\omega_0$  означает конформное отображение  $D_0 \rightarrow \mathbb{D}$ . В силу теоремы 4 имеем

$$\omega_0(z) = zA_0(z), \quad A_0 \in C_{(0)}^{n,\nu}(\mathbb{D}, 0); \quad \omega_0'(z) = B_0(z), \quad B_0 \in C_{(0)}^{n-1,\nu}(\mathbb{D}, 0).$$

Следовательно,  $\omega(z) = z^\delta A_0(z^\delta)$ ,  $\omega'(z) = \delta z^{\delta-1} B_0(z^\delta)$ , так что на основании теоремы 3(в) отсюда приходим к справедливости теоремы с

$$A(z) = A_0(z^\delta) \in C_{(0)}^{n,\nu}(D, 0), \quad B(z) = \delta z^{\delta-1} B_0(z^\delta) \in C_{(0)}^{n-1,\nu}(D, 0).$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
2. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд., М.: Наука, 1988.
3. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современ. математика. Фундамент. направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.