МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

ДОБАВЛЕНИЕ К КЛАССИЧЕСКОМУ РЕЗУЛЬТАТУ А.Н. ТИХОНОВА ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗОНДИРОВАНИЯХ ДЛЯ СРЕДЫ С ТОНКИМИ СЛОЯМИ

А. С. Барашков[1,*]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ МЭИ, Россия

*e-mail: BarashkovAS@mpei.ru

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
Переработанный вариант 12.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Результат А.Н. Тихонова использует значения функции на отрезке, т.е. для восстановления среды требуется бесконечно много значений функции. В настоящей работе ставится вопрос: пусть известны только несколько значений этой функции, какую информацию о среде можно тогда получить? Ответ оказался максимально благоприятным. Если массив данных содержит k значений функции, то среду можно характеризовать таким же числом параметров. Библ. 6.

Ключевые слова: обратная задача, конечный набор частот, одномерное уравнение Гельмгольца, теорема единственности.

DOI: 10.31857/S004446692309003X, **EDN:** EFXRCI

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] А.Н. Тихонов рассмотрел задачу определения коэффициента $\sigma(x)$ в одномерном уравнении Гельмгольца

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\sigma(x)u = 0 \tag{1}$$

по функции $\varphi(\lambda)$ (так называемый импеданс), которая выражается через решение уравнения при $x = 0$. При этом существенно использовалось, что функция $\varphi(\lambda)$известна на некотором отрезке, а значит (так как функция является аналитической), при всех допустимых значениях λ. Похожий подход использовали и другие авторы (см., например, [2]).

Есть ситуации, когда функция $\varphi(\lambda)$ известна на конечном наборе частот:

$\lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$. Более того, пусть функция $\varphi(\lambda)$ известна на некотором отрезке, но ее можно аппроксимировать в пределах точности измерений по значениям $\varphi(\lambda_i)$, $i = 1,2,\dots k$.

Понятно, что эти k значений функции $\varphi(\lambda)$ несут такую же информацию о коэффициенте $\sigma(x)$, что и вся функция $\varphi(\lambda)$ на отрезке.

В настоящей работе выясняется, какие сведения о коэффициенте $\sigma(x)$ можно получить по конечному набору значений функции $\varphi(\lambda)$. Естественно предположить, что если функция $\varphi(\lambda)$ известна при kзначениях, то и коэффициент$\sigma(x)$ можно характеризовать kпараметрами. Проверим эту гипотезу для среды с “тонкими” слоями. Слой для кусочно-постоянной среды характеризуется своими границами: $b_1 < x < b_2$, проводимостью $\sigma(x) = \gamma = \text{const}$ или суммарной проводимостью $\alpha = \gamma(b_2 - b_1)$ (см. [2]). Для тонкого слоя есть две характеристики: $b_1 \approx b_2 = b$ (глубина залегания слоя) и суммарная проводимость α.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим непроводящий слой (т.е. $\sigma = 0$) толщины 1, лежащий на идеальном проводнике (т.е. $\sigma = \infty$). В этом непроводящем слое расположены проводящие тонкие слои с параметрами b_i, α_i. Электромагнитные поля в случае E-поляризации описываются соотношениями

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0; \quad u\Big|_{x=1} = 0; \quad \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = -1, \quad [u]\Big|_{x=b_i} = 0, \quad \left[\frac{du}{\partial x}\right]\Big|_{x=b_i} = -\lambda\alpha_i u(b_i),$$
$$i = 1,2,\ldots n; \quad 0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < 1. \tag{2}$$

Определение 1. *Прямой задачей* для системы (2) назовем задачу нахождения функции

$$\varphi(\lambda) = u(x = 0, \lambda). \tag{3}$$

Определение 2. *Обратной задачей* для системы (2) назовем задачу определения чисел b_i, α_i, $i = 1,2,\ldots n$, по функции $\varphi(\lambda)$ из (3).

Замечание 1. Функция $\varphi(\lambda)$ (импеданс) определена через решение краевой задачи. Можно определить ее через решение задачи Коши. Для этого вместо граничного условия $\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = -1$ ставим второе начальное условие $\frac{du}{dx}\Big|_{x=1} = 1$. Тогда $\varphi(\lambda) = -\frac{u(x=0,\lambda)}{u'(x=0,\lambda)}$.

3. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим вспомогательную задачу, которую можно интерпретировать как задачу (2) для одного слоя, или, точнее, как пересчет импеданса с подошвы одного тонкого слоя на подошву следующего тонкого слоя.

Ищем функцию $v(x)$ и определяем характеристику $B = \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial x}}\Bigg|_{x=d-0}$ (импеданс):

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < d, \quad \frac{v}{\frac{\partial v}{\partial x}}\Bigg|_{x=0-0} = A, \quad [v]\Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{dv}{\partial x}\right]\Big|_{x=0} = -\lambda\alpha v(0).$$

Получаем

$$v(x) = C\left(A + (1 - \lambda\alpha A)x\right), \quad C = \text{const}, \quad B = d + \frac{1}{-\lambda\alpha + 1/A}.$$

Вводим числа

$$d_1 = 1 - b_n, \quad d_2 = b_n - b_{n-1}, \ldots\ d_i = b_{n-i+2} - b_{n-i+1}, \ldots\ d_{n+1} = b_1,$$
$$a_{2i-1} = d_i, \quad i = 1,\ldots,n+1; \quad a_{2i} = -\lambda\alpha_{n-i+1},\ i = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Тогда решение задачи (2) выражается цепной дробью (см. [3])

$$\varphi(\lambda) = \Phi_{2n+1}(a_1, a_2(\lambda), \ldots, a_{2n}(\lambda), a_{2n+1}) = \Phi_{2n+1}(\lambda) = a_{2n+1} + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n-1} + \ldots \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}. \tag{5}$$

4. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема. *Пусть известно* $2n$ *значений функции* $\varphi(\lambda)$ *из* (3): $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \ldots, \varphi(\lambda_{2n})$, $\lambda_i \neq 0$, $n \geq 1$. *Тогда обратная задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Преобразуем соотношение (5), используя результат из [3].

Вводим последовательность P_k: $P_{-2} = 0$, $P_{-1} = 1$, $P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$, $k \geq 0$. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \Phi_{2n+1}(\lambda) = \frac{P_{2n+1}}{P_{2n}}. \tag{6}$$

Возвращаясь к обозначениям d_i, α_i из (4), замечаем, что $\varphi(\lambda)$ является рациональной дробью относительно λ вида

$$\varphi(\lambda) = \Phi_{2n+1}(\lambda) = \frac{k_n(-\lambda)^n + k_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + k_0}{m_n(-\lambda)^n + m_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + m_0}, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} m_n = d_1 d_2 \ldots d_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad m_{n-1} = d_1 d_2 \ldots d_{n-1} \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n + \ldots + d_2 d_3 \ldots d_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}, \quad \ldots, \quad m_0 = 1, \\ k_n = m_n d_{n+1}, \quad k_{n-1} = d_{n+1} m_{n-1} + d_1 d_2 \ldots d_n \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}, \quad \ldots, \quad k_0 = d_1 + d_2 + \ldots + d_n + d_{n+1} = 1. \end{gathered} \tag{8}$$

По условию теоремы известны $2n$ значений функции $\varphi(\lambda)$. Учтем, что $\varphi(0) = 1$. Таким образом, для восстановления функции $\varphi(\lambda) = \Phi_{2n+1}$ есть $2n+1$ значений этой функции.

Можно рассматривать эту задачу как задачу интерполяции с помощью рациональной функции. Известно (см. [4, 5]), что такая задача интерполяции имеет не более одного решения. Так как в рассматриваемом случае одно решение заведомо есть (решение прямой задачи), то рациональная функция восстанавливается однозначно. Тем самым функция $\varphi(\lambda)$ известна при всех значениях λ. Однако использовать результат работы [1] о единственности решения обратной задачи не получается. А.Н. Тихонов в работе [1] ограничился случаем кусочно-аналитического коэффициента $\sigma(x)$ в (1). Среда с тонкими слоями при описании уравнением (1) задается коэффициентом $\sigma(x)$, который содержит обобщенные дельта-функции. Поэтому продолжим самостоятельный анализ функции $\varphi(\lambda) = \Phi_{2n+1}(\lambda)$ из (7).

При условиях (8) не только функция (7) определяется однозначно, но и коэффициенты k_j, m_j восстанавливаются однозначно. В самом деле, дробь (7) является несократимой в силу построения многочленов P_k из (6), и коэффициент $m_0 = 1$. Зная коэффициенты k_j, m_j функции $\Phi_{2n+1}(\lambda)$ из (7), можно определить параметры первого слоя

$$(b_1, \alpha_1): \quad b_1 = d_{n+1} = \frac{k_n}{m_n}, \quad \alpha_1 = \frac{m_n}{k_{n-1} - d_{n+1} m_{n-1}}.$$

Теперь можно пересчитать исходные значения $\varphi(\lambda_i)$ на уровень $x = b_1 + 0$. Получаем аналогичную задачу с $n - 1$ слоем. Отличие функции $\Phi_{2n-1}(\lambda)$ от функции в (7) будет в том, что степени многочленов в числителе и знаменателе дроби будут равны $n - 1$, и коэффициент $k_0 = d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 1 - b_1$. Значений функции $\Phi_{2n-1}(\lambda)$ будет уже с избытком. Зная коэффициенты k_j, m_j функции $\Phi_{2n-1}(\lambda)$, определяем параметры второго слоя (b_2, α_2) и т.д. Теорема доказана.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим двухслойную среду с параметрами $b_1 = 1/3$, $\alpha_1 = 1$, $b_2 = 2/3$, $\alpha_2 = 3$. Решим для этой среды прямую задачу. Полученные данные будем считать информацией для решения обратной задачи и по ним восстановим двухслойную среду.

Введем вспомогательные величины

$$d_1 = 1 - b_2 = 1 - 2/3 = 1/3, \quad d_2 = b_2 - b_1 = 2/3 - 1/3 = 1/3, \quad d_3 = b_1 = 1/3.$$

Согласно (5),

$$\varphi(\lambda) = a_5 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}} = d_3 + \cfrac{1}{-\lambda\alpha_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{-\lambda\alpha_2 + \cfrac{1}{d_1}}}} = 1/3 + \cfrac{1}{-\lambda + \cfrac{1}{1/3 + \cfrac{1}{-\lambda 3 + \cfrac{1}{1/3}}}}.$$

Вычисляем $\varphi(\lambda)$ для четырех значений $\lambda \in \{-i, -2i, -3i, -4i\}$:

$$\varphi(-i) = \frac{56 - 24i}{87}, \quad \varphi(-2i) = \frac{155 - 66i}{303}, \quad \varphi(-3i) = \frac{40 - 16i}{87}, \quad \varphi(-4i) = \frac{731 - 276i}{1707}.$$

По полученным четырем числам восстанавливаем двухслойную среду.

Записываем функцию $\varphi(\lambda)$ в виде рациональной дроби (7):

$$\varphi(\lambda) = \Phi_5(\lambda) = \frac{k_2(-\lambda)^2 + k_1(-\lambda) + k_0}{m_2(-\lambda)^2 + m_1(-\lambda) + m_0} = \frac{k_2\lambda^2 - k_1\lambda + k_0}{m_2\lambda^2 - m_1\lambda + m_0}. \tag{9}$$

При записи (9) учтено, что $d_1 + d_2 + d_3 = k_0 = 1$.

Для определения коэффициентов k_2, k_1, m_2, m_1 получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned}
-k_2 + ik_1 + 1 &= \frac{56 - 24i}{87}(-m_2 + im_1 + 1),\\
-4k_2 + 2ik_1 + 1 &= \frac{155 - 66i}{303}(-4m_2 + 2im_1 + 1),\\
-9k_2 + 3ik_1 + 1 &= \frac{40 - 16i}{87}(-9m_2 + 3im_1 + 1),\\
-16k_2 + 4ik_1 + 1 &= \frac{731 - 276i}{1707}(-16m_2 + 4im_1 + 1).
\end{aligned}$$

Решение системы есть $k_2 = 1/9$, $k_1 = 8/9$, $m_2 = 1/3$, $m_1 = 5/3$.

Коэффициенты дроби (9) связаны с параметрами среды следующими соотношениями:

$$k_2 = \alpha_1\alpha_2 d_1 d_2 d_3 = 1/9, \quad k_1 = d_3(\alpha_1(d_1 + d_2) + \alpha_2 d_1) + d_2 d_1 \alpha_2 = 8/9, \quad m_2 = \alpha_1\alpha_2 d_1 d_2 = 1/3,$$
$$m_1 = \alpha_1(d_1 + d_2) + \alpha_2 d_1 = 5/3.$$

Решаем возникшую нелинейную систему относительно α_1, α_2, d_1, d_2, d_3, учтя, что

$$d_1 + d_2 + d_3 = 1:$$

$$\frac{k_2}{m_2} = d_3 = \frac{1/9}{1/3} = 1/3; \quad \frac{m_2}{k_1 - d_3 m_1} = \alpha_1 = \frac{1/3}{8/9 - 1/3 \times 5/3} = 1;$$

$$\frac{k_1 - d_3 m_1}{m_1 - \alpha_1(d_1 + d_2)} = d_2 = \frac{1/3}{5/3 - 1 \times 5/3} = 1/3;$$

$$\frac{m_1 - \alpha_1(d_1 + d_2)}{\alpha_1} = \alpha_2 = \frac{1}{1/3} = 3.$$

Ответ: $b_1 = d_3 = 1/3$, $\alpha_1 = 1$, $b_2 = 1 - d_3 = 1/3$, $\alpha_1 = 3$.

Замечание 2. В приведенном примере значения λ выбраны чисто мнимыми, так как в работе [1] λ тоже чисто мнимые. В свою очередь, в [1] выбор вида λ вызван тем, что при зондировании на низких частотах λ именно такие.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получен следующий результат: если известно n значений импеданса, то можно определить n параметров, задающих одномерную среду с тонкими слоями. Такое бывает не всегда. В похожей задаче для двумерной среды с тонкими слоями обнаружился случай неоднозначности решения (см. [6]). При этом массив данных для восстановления среды может быть насколько угодно больше числа параметров, задающих среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 1. С. 545–554.
2. *Дмитриев В.И.* Обратные задачи геофизики. М.: МАКС Пресс, 2012.
3. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
4. *Уолш Дж.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. Издво иностр. лит., 1961.
5. *Чередниченко В.Г.* Рациональная интерполяция, аналитическое решение // Сиб. матем. журн. 2002. Т. 41. № 1. С. 188–193.
6. *Барашков А.С.* О возможности обнаружения тонких проводящих слоев по измерениям полей на поверхности среды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2127– 2138.