

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРАНИЧНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК В ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

© 2023 г. А. М. Боговский^{1,*}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, ф-т ВМК, Россия

*e-mail: abogovski@gmail.com

Поступила в редакцию 20.02.2023 г.
Переработанный вариант 03.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Статья продолжает построение L_p -теории эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами в дивергентной форме для неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно- C^1 -некомпактной липшицевой границей и C^1 -гладкими линиями разрыва коэффициентов. Ранее построенная L_p -теория обобщается на случай несовпадения наименьших собственных значений, соответствующих конечной и бесконечной особым точкам, продолжая исследование эффекта их взаимодействия в функциональном классе с первыми производными из $L_p(\Omega)$ во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$. Библ. 3. Фиг. 1.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение в дивергентной форме, разрывный кусочно-постоянный коэффициент, неограниченная область, кусочно-гладкая некомпактная липшицева граница, гладкие линии разрыва коэффициента, задача Дирихле, задача Неймана, слабое решение с первыми производными из L_p , L_p -теория, взаимодействие особенностей,

DOI: 10.31857/S0044466923090041, EDN: RJMDHQ

ВВЕДЕНИЕ

В неограниченной плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с одним выходом на бесконечность и кусочно-гладкой некомпактной границей $\partial\Omega$, состоящей из конечного числа гладких кривых, рассматривается краевая задача Дирихле для эллиптического уравнения в дивергентной форме с разрывным скалярным кусочно-постоянным коэффициентом $\kappa > 0$, имеющим конечное число подобластей непрерывности в Ω , ограниченных кусочно- C^1 гладкими линиями разрыва. Задача Дирихле рассматривается в слабой постановке, соответствующей функциональному классу решений с первыми производными из L_p во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$. Статья продолжает начатое в [1] исследование вопросов существования и единственности решений для случая одной конечной и одной бесконечной граничных особых точек.

Конечной граничной особой точкой будем называть точку негладкости $\partial\Omega$ и/или вхождения линий разрыва коэффициента κ в $\partial\Omega$. Углы, образуемые входящими в особую точку кривыми границы и линиями разрыва коэффициента, предполагаются ненулевыми.

Бесконечной граничной особой точкой будем называть связную компоненту окрестности бесконечности в Ω с образующими ненулевой угол асимптотами $\partial\Omega$ и, возможно, асимптотами линий разрыва κ в этой компоненте. Такое определение допускает области с несколькими выходами на бесконечность. В рамках данной статьи ограничимся единственным выходом Ω на бесконечность.

Ограничимся также рассмотрением особых точек, допускающих локальное разделение переменных в полярных координатах в некоторой своей окрестности. Переход к общему случаю производится с помощью известных L_p -оценок и теоремы об устойчивости индекса при малых возмущениях в операторной норме.

Полученный результат является обобщением полученного ранее в [1]. Теперь допускается неравенство наименьших собственных значений $\lambda_1, \widetilde{\lambda}_1$, возникающих в задаче Штурма–Лиувилля по полярному углу. При этом возникают интервалы значений p , на которых эллиптический оператор $L : \mathring{L}_p^1(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_p^{-1}(\Omega)$ имеет конечные ненулевые размерности ядра и коядра.

Отметим, что приведенные здесь и полученные ранее результаты переносятся и на задачу Неймана в смысле установленной в [2] взаимосвязи разрешающих операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим пространство $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ как замыкание подпространства $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ в пространстве Соболева $L_p^1(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{L_p^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\omega)},$$

где ω — какая-либо фиксированная ограниченная подобласть $\omega \subset \Omega$, и введем эквивалентную норму $\|u\|_{L_p^1(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}$. Пространство $\mathring{L}_p^{-1}(\Omega)$ определим как двойственное к $\mathring{L}_p^1(\Omega)$ пространство линейных непрерывных функционалов, т.е.

$$\mathring{L}_p^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} (L_q^1(\Omega))^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Понимая обобщенную дивергенцию в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$, рассмотрим дифференциальный оператор

$$L = \text{div}(\kappa \nabla \cdot) : \mathring{L}_p^1(\Omega) \rightarrow \mathring{L}_p^{-1}(\Omega), \quad (1.1)$$

позволяющий записать в операторной форме $Lu = f$ слабую постановку задачи Дирихле

$$\text{div}(\kappa \nabla u) = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Операторная постановка проясняет связь размерностей $\dim \ker$ и $\dim \text{coker}$ ядра и коядра

$$\ker L \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathring{L}_p^1(\Omega) \mid Lu = 0\},$$

$$\text{coker } L \stackrel{\text{def}}{=} \mathring{L}_p^{-1}(\Omega) / \{Lu \mid u \in \mathring{L}_p^1(\Omega)\}$$

линейного оператора (1.1) в случае, когда эти размерности конечны. В свою очередь, операторная постановка эквивалентна слабой L_p -постановке той же задачи Дирихле

$$\int_{\Omega} (\kappa \nabla u, \nabla \psi) dx = -f(\psi) \quad \forall \psi \in \mathring{L}_p^1(\Omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

для класса слабых решений $u \in \mathring{L}_p^1(\Omega)$. При этом, как хорошо известно, для всякого функционала $f \in \mathring{L}_p^{-1}(\Omega)$ найдется векторное поле $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_p(\Omega)$ такое, что $f = \text{div } \mathbf{F}$ в смысле $\mathcal{D}'(\Omega)$ с оценкой

$$\|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathring{L}_p^{-1}(\Omega)}.$$

Определение 1. Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ элемент $u \in \mathring{L}_p^1(\Omega)$ будем называть *слабым решением* задачи Дирихле, если выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \kappa(x) (\nabla u, \nabla \psi) dx = \int_{\Omega} (\mathbf{F}, \nabla \psi) dx \quad \forall \psi \in \mathring{L}_q^1(\Omega) \quad (1.2)$$

при заданной вектор-функции $\mathbf{F} \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $q = p/(p-1)$ — показатель, сопряженный к $p \in (1, \infty)$.

Отметим, что в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ класс пробных функций $\mathring{L}_q^1(\Omega)$ может быть заменен на пространство Соболева $\mathring{W}_q^1(\Omega)$.

Замечание 1. При построении примеров несуществования слабых решений можно ограничиться рассмотрением правых частей $\operatorname{div} \mathbf{F} = f \in \mathring{C}^\infty(\Omega)$. В таком случае тождество (1.2) примет более простой вид:

$$\int_{\Omega} \kappa(x)(\nabla u, \nabla \psi) dx = - \int_{\Omega} f \psi dx \quad \forall \psi \in \mathring{L}_q^1(\Omega). \quad (1.3)$$

2. ЗАДАЧА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

При разделении переменных в полярных координатах по полярному углу возникает задача Штурма—Лиувилля. Напомним постановку этой задачи и приведем здесь без доказательства некоторые ее свойства, установленные в [1].

Взяв в качестве веса кусочно-постоянный коэффициент $\kappa = \kappa(\varphi) > 0$ с конечным числом линий разрыва, введем пространство Лебега $L_{2,\kappa}(0, \alpha)$ со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{\kappa} = \int_0^{\alpha} \kappa(\varphi) \Phi(\varphi) \Psi(\varphi) d\varphi,$$

порождающим соответствующую весовую норму $\|\Phi\|_{2,\kappa}$.

На $L_{2,\kappa}(0, \alpha)$ введем операцию слабого дифференцирования

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa} (\kappa \Phi)', \quad (2.1)$$

где штрих означает слабое дифференцирование на $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R})$ или, в более широком понимании, дифференцирование в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ с требованием регулярности обобщенной производной.

Рассматривая операцию дифференцирования (2.1) на подпространстве

$$D_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Phi \in \mathring{W}_2^1(0, \alpha) : \kappa \Phi' \in \mathring{W}_2^1(0, \alpha)\} \subset L_{2,\kappa}(0, \alpha),$$

приходим к замкнутому неограниченному дифференциальному оператору

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa} (\kappa \Phi)' : D_{\mathcal{L}} \subset L_{2,\kappa}(0, \alpha) \rightarrow L_{2,\kappa}(0, \alpha). \quad (2.2)$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Геометрическая кратность всех собственных значений задачи Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}u + \lambda u = 0$ равна единице.

Теорема 2. Система собственных функций задачи Штурма—Лиувилля является ортогональным базисом в $\mathring{W}_{2,\kappa}^1(0, \alpha)$.

Занумеруем собственные функции $\{\Phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ по возрастанию чисел $\lambda_k > 0$. Верны утверждения следующих трех теорем и леммы.

Теорема 3. Существует зависящая только от чисел α , $\kappa_{\min}$, $\kappa_{\max}$ постоянная $M > 0$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \leq M.$$

Теорема 4. Собственная функция Φ_1 задачи Штурма—Лиувилля, соответствующая λ_1 , не имеет нулей на $(0, \alpha)$.

Теорема 5. Собственные функции Φ_k , $k \geq 2$, задачи Штурма—Лиувилля меняют знак на $(0, \alpha)$ в силу $\lambda_k > \lambda_1$.

Лемма 1. Для собственных функций Φ_k задачи Штурма—Лиувилля верны неравенства

$$\exists C > 0: \left| \frac{\Phi_k(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)} \right| \leq C \lambda_k \quad \forall k \geq 2.$$

3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Напомним, что рассматриваются уже описанные во введении конечная и бесконечная граничные особые точки, допускающие локальное разделение переменных в полярных координатах. При этом ключевым вопросом в вычислении $\dim \ker L$ является количество значений $\lambda_k \in (0,1)$ в соответствующих особым точкам задачах Штурма—Лиувилля по φ . Особые точки, имеющие значения $\lambda_k \in (0,1)$, будем называть *сингулярными*, а не имеющие таковых — *регулярными*. Простой пример сингулярной особой точки можно найти в [1].

Дополнительно потребовав $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$ и $\tilde{\lambda}_1 < 1 < \tilde{\lambda}_2$, представим решение $u \in \mathring{L}_p^1(\Omega)$ в окрестностях конечной и бесконечной особых точек в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi) + B_1 r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta, \quad \mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad (3.1)$$

$$u(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = \tilde{A}_1 \tilde{r}^{\tilde{\mu}_1} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\varphi}) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \tilde{r}^{-\tilde{\mu}_k} \tilde{\Phi}_k(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{r} > R > \delta, \quad \tilde{\mu}_k = \sqrt{\tilde{\lambda}_k}. \quad (3.2)$$

При исследовании взаимодействия конечной и бесконечной особых точек понадобятся следующие свойства локальной знакоопределенности/знакопеременности решения.

Лемма 2 (знакоопределенность в окрестности особой точки).

1. Пусть $p < 2/(1 + \mu_1)$ и, соответственно, в окрестности конечной особой точки решение $u(r, \varphi)$ имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi) + B_1 r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Если $B_1 > 0$, то $u(r, \varphi) \geq 0$ в некоторой окрестности этой особой точки.

2. Пусть $p > 2/(1 - \tilde{\mu}_1)$ и, соответственно, в окрестности бесконечной особой точки решение $u(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ имеет вид

$$u(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = \tilde{A}_1 \tilde{r}^{\tilde{\mu}_1} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\varphi}) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \tilde{r}^{-\tilde{\mu}_k} \tilde{\Phi}_k(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{r} > R > 1.$$

Если $\tilde{A}_1 > 0$, то $u(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) \geq 0$ в некоторой окрестности этой особой точки.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем доказательство второго утверждения леммы, для удобства убрав тильды из обозначений.

Оценим решение, переписав его в виде

$$u(r, \varphi) = \Phi_1(\varphi) \left[A_1 r^{\mu_1} + B_1 r^{-\mu_1} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k r^{-\mu_k} \frac{\Phi_k(\varphi)}{\Phi_1(\varphi)} \right].$$

Заметим, что коэффициенты B_k разложения в ряд Фурье по ортонормированному базису в $L_{2,\infty}(0, \alpha)$ ограничены в силу, например,

$$|B_k| = \left| \int_0^\alpha u(R, \varphi) \Phi_k(\varphi) d\varphi \right| \leq \|u\|_{r=R} \| \Phi_k \|_{L_{2,\infty}(0, \alpha)}.$$

Используя оценку $|\Phi_k(\varphi)/\Phi_1(\varphi)| \leq C \mu_k^2 \quad \forall k \geq 1$ из леммы 1, получаем

$$\left| B_1 r^{-\mu_1} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k r^{-\mu_k} \frac{\Phi_k}{\Phi_1} \right| \leq |B_1| r^{-\mu_1} + M \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k^2 r^{-\mu_k} \quad \forall r > R.$$

При этом ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mu_k^2 r^{-\mu_k} = r^{-\mu_1} \sum_{k=2}^{\infty} \mu_k^{-4} \mu_k^6 r^{\mu_1 - \mu_k}$$

сходится и имеет сумму порядка $O(r^{-\mu_1})$ при $r \rightarrow \infty$ в силу теоремы 3 о сходимости ряда $\sum \mu_k^{-4}$ и очевидного неравенства

$$\sup_{s>1} (s^6 r^{\mu_1-s}) < m(R) < \infty \quad \forall r > R$$

с некоторой постоянной $m(R) > 0$.

Таким образом, $u(r, \varphi) = \Phi_1(\varphi)[A_1 r^{\mu_1} + O(r^{-\mu_1})]$, $r \rightarrow \infty$. А по теореме 4 функция Φ_1 знакопостоянна на $(0, \alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 3 (смена знака в окрестности особой точки).

1. Пусть в окрестности конечной особой точки решение $u(r, \varphi)$ имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Тогда $u(r, \varphi)$ меняет знак в любой окрестности этой особой точки.

2. Пусть в окрестности бесконечной особой точки решение $u(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ имеет вид

$$u(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{B}_k \tilde{r}^{-\tilde{\mu}_k} \tilde{\Phi}_k(\tilde{\varphi}), \quad \tilde{r} > R > 1.$$

Тогда $u(\tilde{r}, \tilde{\varphi})$ меняет знак в любой окрестности этой особой точки.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем доказательство первого утверждения леммы.

Предположим, что найдется такой номер $m \geq 2$, что $A_m \neq 0$, тогда как все $A_k = 0$ при $k < m$. Согласно теореме 5, собственная функция Φ_m меняет на Ω_R знак, а тогда на любой дуге $\{r = \delta, 0 < \varphi < \alpha\}$ с достаточно малым δ происходит смена знака рассматриваемого решения u . Действительно, на дуге $r = \delta, 0 < \varphi < \alpha$ функция Φ_m в малой окрестности своего нуля строго монотонна и принимает значения $(-\sigma, \sigma)$ с некоторым $\sigma > 0$. Оценивая при достаточно малых δ оставшуюся часть ряда

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} A_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi),$$

устанавливаем смену знака.

Лемма доказана.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

Напомним, что рассматривается задача Дирихле с одной конечной и одной бесконечной граничными особыми точками с локально-разделяющимися переменными. При этом в соответствующих особым точкам задачах Штурма–Лиувилля наложены ограничения $\mu_1 < 1 < \mu_2$ и $\tilde{\mu}_1 < 1 < \tilde{\mu}_2$.

Лемма 4 (нетривиальное решение однородной задачи).

1. Пусть $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, $p \in (2/(1 + \tilde{\mu}_1), 2/(1 + \mu_1))$, тогда существует нетривиальное решение однородной задачи Дирихле, имеющее особенность в конечной точке.

2. Пусть $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, $p \in (2/(1 - \mu_1), 2/(1 - \tilde{\mu}_1))$, тогда существует нетривиальное решение однородной задачи Дирихле, имеющее особенность на бесконечности.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем конструктивное доказательство первого утверждения.

Рассмотрим $u(x) = \eta_\sigma(x) u_{\mu_1}(x) - v(x)$, где $u_{\mu_1} = r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi)$, срезающая функция $\eta_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ равна единице в σ -окрестности конечной особой точки и нулю — вне 2σ -окрестности.

В силу выполнения тождеств

$$\int_{\Omega} \kappa(\nabla(\eta_{\sigma} u_{\mu}), \nabla \psi) dx = \int_{\Omega} \kappa(\eta_{\sigma} \nabla u_{\mu}, \nabla \psi) dx + \int_{\Omega} \kappa(u_{\mu} \nabla \eta_{\sigma}, \nabla \psi) \quad \forall \psi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega),$$

$$0 = \int_{\Omega} \kappa(\nabla u_{\mu}, \nabla(\psi \eta_{\sigma})) dx = \int_{\Omega} \kappa(\eta_{\sigma} \nabla u_{\mu}, \nabla \psi) dx + \int_{\Omega} \kappa(\nabla u_{\mu}, \nabla \eta_{\sigma}) \psi dx \quad \forall \psi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega),$$

определяющее решение тождество

$$\int_{\Omega} \kappa(x)(\nabla u(x), \nabla \psi(x)) dx = 0 \quad \forall \psi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega)$$

равносильно

$$\int_{\Omega} \kappa(\nabla v, \nabla \psi) dx = - \int_{\Omega} \kappa(\nabla u_{\mu_1}, \nabla \eta_{\sigma}) \psi dx + \int_{\Omega} \kappa(u_{\mu_1} \eta_{\sigma}, \nabla \psi) dx \quad \forall \psi \in \dot{C}^{\infty}(\Omega).$$

Применяя теорему Рисса в гильбертовом пространстве $\dot{L}_{2,\kappa}^1(\Omega)$ со скалярным произведением $\int_{\Omega} \kappa(x)(\cdot, \cdot) dx$, заключаем, что существует $v \in \dot{L}_2^1(\Omega)$. А значит, не только $\eta_{\sigma}(x)u_{\mu_1}(x)$, но и u попадает в $L_p^1(\Omega)$ в силу общего вида решения в окрестностях особых точек при рассматриваемых здесь значениях p .

Лемма доказана.

Теорема 6 (тривиальное ядро).

1. Если $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, то $\dim \ker L = 0$ для $p \in (1, 2/(1 + \tilde{\mu}_1)] \cup [2/(1 + \mu_1), \infty)$.

2. Если $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, то $\dim \ker L = 0$ для $p \in (1, 2/(1 - \tilde{\mu}_1)] \cup [2/(1 - \mu_1), \infty)$.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем здесь доказательство второго утверждения, т.е. для $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$.

Выбор $2/(1 + \tilde{\mu}_1) \leq p \leq 2/(1 - \tilde{\mu}_1)$ исключает из рядов (3.1) и (3.2), представляющих решение в окрестностях особых точек, члены $\tilde{A}_1 \tilde{r}^{\tilde{\mu}_1} \tilde{\Phi}_1(\tilde{\varphi})$, $B_1 r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi)$. Решение попадает в $L_2^1(\Omega)$, а значит, оно тривиальное.

При $p \geq 2/(1 - \mu_1) > 2/(1 - \tilde{\mu}_1)$ сразу получаем $A_1 = B_1 = 0$. Докажем от противного, что и $\tilde{A}_1 = 0$. Не ограничивая общности, предположим $\tilde{A}_1 > 0$. Выберем дугу $\tilde{r} = R > 1$ в такой окрестности бесконечной особой точки, что

- переменные разделяются в полярных координатах,
- по лемме 2 решение $u \geq 0$.

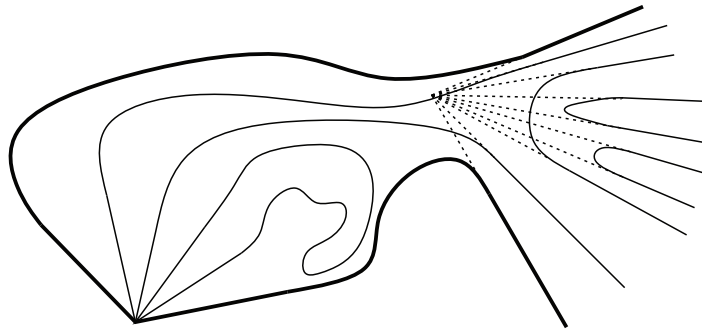
Применяя принцип существенного максимума (см. теорему 9.27 в [3]) на $\Omega_R = \Omega \cap \{x | \tilde{r} < R\}$, получаем $u|_{\Omega_R} \geq 0$. Однако в окрестности конечной особой точки $A_1 = B_1 = 0$ и применима лемма 3 о знакопеременности решения. Приходим к противоречию.

При $p < 2/(1 + \tilde{\mu}_1)$ сразу получаем $\tilde{A}_1 = \tilde{B}_1 = 0$. Докажем от противного, что и $B_1 = 0$. Не ограничивая общности, возьмем $B_1 > 0$. Выберем дугу $r = \delta < 1$ в такой окрестности конечной особой точки, что

- переменные разделяются в полярных координатах,
- по лемме 2 решение $u \geq 0$.

Применяя принцип существенного максимума на $\Omega_{\delta} = \Omega \cap \{x | r > \delta\}$, получаем $u|_{\Omega_{\delta}} \geq 0$. Однако в окрестности бесконечной особой точки $\tilde{A}_1 = \tilde{B}_1 = 0$ и применима лемма 3 о знакопеременности решения. Приходим к противоречию.

Теорема доказана.



Фиг. 1. Пример допустимой области.

Теорема 7 (нетривиальное ядро).

1. Если $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, то $\dim \ker L = 1$ для $p \in (2/(1 + \tilde{\mu}_1), 2/(1 + \mu_1))$.

2. Если $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, то $\dim \ker L = 1$ для $p \in (2/(1 - \mu_1), 2/(1 - \tilde{\mu}_1))$.

Доказательство. Доказательства 1 и 2 аналогичны. Приведем здесь доказательство второго утверждения, т.е. для $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$.

Согласно лемме 4 существует нетривиальное решение u_1 однородной задачи. Введем обозначение

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi) + B'_1 r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Покажем, что произвольное решение u_2 линейно зависимо от u_1 . Введем обозначение

$$u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A''_k r^{\mu_k} \Phi_k(\varphi) + B''_1 r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi), \quad 0 < r < \delta < 1.$$

Линейная комбинация $u = B''_1 u_1 - B'_1 u_2$ в окрестности конечной особой точки будет по построению иметь коэффициент $B_1 = 0$ при $r^{-\mu_1} \Phi_1(\varphi)$. Применяя схему доказательства случая $p \geq 2/(1 - \mu_1)$ предыдущей теоремы, показываем, что $u = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 1 (размерность коядра).

1. Если $\mu_1 < \tilde{\mu}_1$, то $\dim \operatorname{coker} L = 1$ для $p \in (2/(1 + \tilde{\mu}_1), 2/(1 + \mu_1))$ и $\dim \operatorname{coker} L = 0$ для остальных $1 < p < \infty$ кроме $2/(1 \pm \tilde{\mu}_1)$, $2/(1 \pm \mu_1)$.

2. Если $\mu_1 > \tilde{\mu}_1$, то $\dim \operatorname{coker} L = 1$ для $p \in (2/(1 - \mu_1), 2/(1 - \tilde{\mu}_1))$ и $\dim \operatorname{coker} L = 0$ для остальных $1 < p < \infty$ кроме $2/(1 \pm \tilde{\mu}_1)$, $2/(1 \pm \mu_1)$.

Замечание 2. Не требуется совпадения числа линий разрыва в конечной и бесконечной особых точках $\partial\Omega$. Так, линия разрыва может замыкаться через особую точку, т.е. начало и конец линии разрыва могут совпадать с этой особой точкой. На фиг. 1 приводится пример допустимой области: показаны линии разрыва коэффициента и граница $\partial\Omega$, а пунктиром — их асимптоты в окрестности бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов В.Н., Боговский А.М. О взаимодействии граничных особых точек в задаче Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в плоской области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 12. С. 2155–2174.
2. Денисов В.Н., Боговский А.М. О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 32–48.
3. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. New York: Springer, 2011.