ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 9, с. 1537–1552

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ДРЕЙФОВОЙ МОДЕЛИ ЗАРЯДКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯРНОГО ДИЭЛЕКТРИКА[1)]

© 2023 г. **Р. В. Бризицкий[1,*], Н. Н. Максимова[2,**], А. Г. Масловская[2,***]**

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

[2] 675000 Благовещенск, ул. Игнатьевское шоссе, 21, АмГУ, Россия

**e-mail: mlnwizard@mail.ru*

***e-mail: maksimova.nn@amursu.ru*

****e-mail: maslovskaya.ag@amursu.ru*

Поступила в редакцию 12.02.2023 г.
Переработанный вариант 12.02.2023 г.
Принята к публикации 29.03.2023 г.

Исследуются задачи восстановления неизвестных параметров модели электронно-индуцированной зарядки неоднородного полярного диэлектрика по дополнительной информации об объемной плотности распределения заряда и напряженности электрического поля. В рамках оптимизационного подхода указанные обратные задачи сводятся к задачам управления и доказывается их разрешимость. Для экстремальных задач выводятся системы оптимальности и на основе их анализа доказывается локальная единственность решения одной из рассматриваемых задач. С учетом введенной характеристики неоднородности диэлектрика корректируются вспомогательные результаты о разрешимости и свойствах решений краевой задачи, полученные ранее для модели зарядки однородного диэлектрика. Библ. 31.

Ключевые слова: модель дрейфа–диффузии электронов, модель зарядки неоднородного полярного диэлектрика, глобальная разрешимость, локальная единственность, принцип максимума, обратная задача, задача управления, система оптимальности.

DOI: 10.31857/S0044466923090053, **EDN:** DNNDSQ

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Диффузионно-дрейфовое приближение часто используется в практике физико-математического моделирования процессов зарядки диэлектриков в неравновесных внешних условиях. Развитию данного подхода посвящены как ранние работы [1–6], так и современные исследования [7–14]. В частности, применение детерминированной модели обусловлено необходимостью прогнозирования состояния функциональных диэлектрических материалов при диагностике и модификации их свойств методами растровой электронной микроскопии. В числе важнейших аспектов, подлежащих исследованиям, в указанных работах рассмотрены вопросы разработки фундаментальных основ, развития математических моделей, создания математического и программного обеспечения для исследования процессов стимулированной зарядки. Отдельно отметим статьи [12, 13], в которых предложена авторская модификация классической нестационарной модели процесса зарядки сегнетоэлектрических материалов при электронном облучении с учетом собственной радиационно-стимулированной проводимости объекта, диффузии и дрейфа инжектированных зарядов.

Априорный анализ показывает, что если облучение диэлектрического материала поддерживается достаточно длительное время (на практике достаточно и доли секунды), то это время намного превышает временной диапазон, который необходим для перехода динамической системы в стационарное состояние (менее микросекунды). В связи с этим особую актуальность для практики приобретает детальное исследование математических моделей, описывающих стационарные режимы процессов зарядки. Корректность одной из таких моделей была впервые обоснована в [15] в предположении свойства однородности поляризационных характеристик объекта.

[1)]Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8 и проект № 075-02-2023-946).

Моделирование процессов зарядки в неоднородных диэлектриках представляет сложную и многоаспектную задачу, поскольку требует рассмотрения покомпонентного представления распределения поляризации в объекте. В качестве приближения к общей проблеме в настоящей работе рассмотрим упрощенную модель зарядки неоднородного полярного диэлектрика, в которой "неоднородность" описывается с помощью нормализованной функции. Такой подход позволяет задать пространственную характеристику изменения уровня заряда, обусловленного начальным (неиндуцированным) состоянием самого диэлектрика. Учитывая введенное предположение и модельную характеристику, для рассматриваемого объекта далее будем использовать понятие "неоднородный диэлектрик". Будем считать, что функция $\beta(\mathbf{x})$ описывает неравномерность потерь заряда в пространстве, что на практике может быть обусловлено анизотропией кристалла, наличием дефектной структуры, композитным составом материала или присутствием примеси, предварительной ионизирующей обработкой и др.

Математическая модель процесса зарядки неоднородного полярного диэлектрика может быть представлена следующей краевой задачей, рассматриваемой в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ:

$$-\operatorname{div}(d\nabla\rho) + \mu_n \mathbf{E}\cdot\nabla\rho + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\beta|\rho|\rho = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

$$\rho = 0, \quad \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3}$$

Здесь ρ — объемная плотность заряда, $\mathbf{E}$ — вектор-функция напряженности электрического поля, $d(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии электронов, μ_n — дрейфовая подвижность электронов, ε — диэлектрическая проницаемость материала, ε_0 — электрическая постоянная, f — генерационное слагаемое, отвечающее за действие объемного источника зарядов в объекте, $\beta(\mathbf{x}) > 0$ — нормализованный коэффициент потери заряда. Ниже на задачу (1)–(3) будем ссылаться как на задачу 1.

В [15] доказаны глобальная разрешимость и локальная единственность решения соответствующей краевой задачи в случае, когда $\beta \equiv 1$, а также установлен принцип минимума и максимума для плотности заряда. Хорошо известно, что принцип максимума применяется для контроля вычислительных экспериментов. В указанной статье один из вычислительных экспериментов по решению прямой задачи посвящен проверке установленного теоретически принципа максимума.

В настоящей работе результаты [15] по исследованию краевой задачи обобщены на случай, когда коэффициент β не является константой. По возможности полученные в настоящей статье результаты о разрешимости краевой задачи представлены в виде коррекции результатов [15]. Отметим, что функция $\beta(\mathbf{x})$ влияет на достаточные условия локальной единственности решения краевой задачи и входит в оценку принципа максимума.

Основные результаты статьи связаны с исследованием задачи восстановления неизвестных функций d, β и f по измеренным в некоторой подобласти области Ω плотности заряда ρ и напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. В частности, восстановление функции β позволит обнаружить вкрапления в кристалле диэлектрика. В рамках оптимизационного подхода указанная обратная задача сводится к задаче управления (о корректности применяемого подхода см. [16, 17]). В результате формулируется задача управления, содержащая два мультипликативных управления d и β и одно распределенное управление f, и доказывается ее разрешимость. Далее для задачи управления выводится система оптимальности и обосновывается ее локальная регулярность. Наконец, на основе анализа системы оптимальности доказывается локальная единственность решения задачи распределенного управления. В заключение отметим работу [18], в которой доказана разрешимость задачи мультипликативного управления при более жестких условиях на функцию d.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При анализе краевой задачи будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$.

Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$ и $L^2(\Omega)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_\Omega$.

Введем функциональные пространства $H^1(\Delta,\Omega) = \{h \in H^1(\Omega) : \Delta h \in L^2(\Omega)\}$,

$$H^1_N(\Omega) = \{\mathbf{h} \in H^1(\Omega)^3 : \mathbf{h} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{0}\},\ \tilde{H}^1_N(\Omega) = H^1_N(\Omega) \cap \ker(\mathrm{rot}),$$

функциональные множества $L^p_{d_0}(\Omega) = \{h \in L^p(\Omega) : h \geq d_0 > 0$ п.в. в $\Omega\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $H^s_{d_0}(\Omega) = \{h \in H^s(\Omega) : h \geq d_0 > 0$ п.в. в $\Omega\}$, $s \geq 0$, где d_0 – положительная константа и произведение пространств $X = H^1_0(\Omega) \times \tilde{H}^1_N(\Omega)$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(ii) $f \in L^2(\Omega)$, $d \in L^\infty_{d_0}(\Omega)$;

(iii) $\beta \in L^4(\Omega)$ и $\beta \geq \beta_0 \geq 1/2$ п.в. в Ω.

Напомним, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$, компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|h\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

При $s = 2$ мы полагаем $C_2 = 1$.

Ниже будем использовать формулы Грина (см. [19, 20])

$$-(\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) - (\partial u/\partial n, v)_\Gamma \quad \forall u \in H^1(\Delta,\Omega), \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$(\mathbf{u}, \nabla v) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, v\rangle_\Gamma \quad \forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \quad \text{с} \quad \operatorname{div}\mathbf{u} \in L^{3/2}(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega). \tag{6}$$

Справедливы следующие леммы (см. [15, 20]).

Лемма 2.1. *При выполнении условий* (i), $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ *существуют положительные константы* C_0, δ_1, γ_1' *и* γ_1, *зависящие соответственно от* Ω , *такие что*

$$\begin{gathered} |(\nabla h, \nabla \eta)| \leq C_0 \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \\ |(\mathbf{E}\cdot\nabla h, \eta)| \leq \gamma_1' \|\mathbf{E}\|_{L^4(\Omega)^3} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \leq \gamma_1 \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall h,\eta \in H^1(\Omega), \end{gathered} \tag{7}$$

$$(\nabla h, \nabla h) \geq \delta_1 \|h\|^2_{1,\Omega} \quad \forall h \in H^1_0(\Omega). \tag{8}$$

Если функции $\mathbf{E} \in H^1(\Omega)^3$ *и* $\rho \in H^1_0(\Omega)$ *связаны вторым соотношением в* (2), *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, h) = -(\nabla h\cdot\mathbf{E}, \rho) - (1/\varepsilon\varepsilon_0)(h, \rho^2) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega), \tag{9}$$

принимающее при $h = \rho$ *следующий вид*:

$$\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \rho) = -(\mu_n/2\varepsilon\varepsilon_0)(\rho, \rho^2). \tag{10}$$

Лемма 2.2. *При выполнении условия* (i) *для любой функции* $\sigma \in L^2(\Omega)$ *существует единственное решение* $\mathbf{E} \in \tilde{H}^1_N(\Omega)$ *задачи* $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = \sigma$ *в* Ω, $\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0}$ *на* Γ, *для которого справедлива оценка* $\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma\|_\Omega$, *где* C_N – *положительная константа, зависящая от* Ω.

Пусть $(\rho, \mathbf{E}) \in (C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})) \times (C^1(\Omega)^3 \cap \tilde{H}_N^1(\Omega))$ – классическое решение задачи 1. Умножим уравнение в (1) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулу Грина (6). Приходим к слабой формулировке задачи 1

$$(d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, h) + (\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)(\beta|\rho|\rho, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{11}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = (1/\varepsilon\varepsilon_0)\rho \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{12}$$

Разрешимость задачи (11), (12) докажем с помощью теоремы Шаудера. Для этого построим отображение $G\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, действующее по формуле $\rho = G(r)$.

Здесь функция $\rho \in H_0^1(\Omega)$ является решением линейной задачи

$$a(\rho, h) \equiv (d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}(r) \cdot \nabla\rho, h) + (\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)(\beta|r|\rho, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(r) = (1/\varepsilon\varepsilon_0)r \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{14}$$

Из леммы 2.2 вытекает, что для любой функции $r \in H_0^1(\Omega)$ существует единственное решение $\mathbf{E} \in \tilde{H}_N^1(\Omega)$ задачи (14), для которого справедлива оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \le (C_N/\varepsilon\varepsilon_0)\|r\|_{1,\Omega}. \tag{15}$$

Из леммы 2.1 вытекает, что форма $a(\rho, h)$ непрерывна. Так же из леммы 2.1 и равенства (14) следует, что

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, h) = -(\nabla h \cdot \mathbf{E}, \rho) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(h, r\rho) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{16}$$

При $h = \rho$ равенство (16) принимает вид

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \rho) = -\frac{1}{2\varepsilon\varepsilon_0}(r, \rho^2). \tag{17}$$

Положим $h = \rho$ в (13). С учетом (17) приходим к равенству

$$a(\rho, \rho) = (d\nabla\rho, \nabla\rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|r| - (1/2)r, \rho^2) = (f, \rho). \tag{18}$$

Поскольку $\beta \ge 1/2$ в силу (iii), то $(\beta|r| - (1/2)r, \rho^2) \ge 0$.

Тогда из (18) и леммы 2.1 вытекает, что форма a коэрцитивна на пространстве $H_0^1(\Omega)$ с константой $d_0\delta_1$. Из теоремы Лакса–Мильграма следует, что при любом $r \in H_0^1(\Omega)$ существует единственное решение $\rho \in H_0^1(\Omega)$ задачи (13), для которого справедлива оценка

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \le C_* \|f\|_{\Omega}, \quad C_* = (d_0\delta_1)^{-1}. \tag{19}$$

Из вышесказанного вытекает, что отображение $G\colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ определено корректно и переводит шар B_R радиуса $R = C_* \|f\|$ в себя. Компактность и непрерывность оператора G на B_R показывается в точности, как в [15].

Тогда из теоремы Шаудера вытекает, что оператор G имеет неподвижную точку $\rho = G(\rho)$, которая является решением уравнения (11). В свою очередь, пара $(\rho, \mathbf{E})$ является искомым решением задачи (11), (12). При этом для функции ρ справедлива оценка (19). Тогда для электрического поля $\mathbf{E}$ из (15) в силу леммы 2.2 и с учетом (19) получаем оценку

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \le (1/\varepsilon\varepsilon_0)C_N C_* \|f\|_{\Omega}. \tag{20}$$

Установим достаточные условия единственности решения задачи (11), (12). Обозначим через $(\rho_1, \mathbf{E}_1) \in X$ и $(\rho_2, \mathbf{E}_2) \in X$ любые два ее решения.

Несложно проверить, что разности $\rho = \rho_1 - \rho_2$ и $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}(d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, h) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{21}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{22}$$

Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{E}_i = (1/\varepsilon\varepsilon_0)\rho_i$ в Ω, $i = 1, 2$, то с учетом леммы 2.1 получаем, что

$$\mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, \rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\rho_1\rho, \rho). \tag{23}$$

Тогда равенство (21) при $h = \rho$ с учетом (23) принимает вид

$$(d\nabla\rho, \nabla\rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}((\beta|\rho_1| - (1/2)\rho_1)\rho, \rho) = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \rho) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \rho). \tag{24}$$

Для левой части (24) при $\beta \geq 1/2$ в силу (8) справедлива следующая оценка

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leq (d\nabla\rho, \nabla\rho) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}((\beta|\rho_1| - (1/2)\rho_1)\rho, \rho), \quad \lambda_* = d_0\delta_1.$$

Оценки для правой части (24) вытекают из неравенства Гёльдера, соотношения (7), и с учетом (4), (19) и (20) принимают следующий вид:

$$|\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \rho)| \leq \frac{\mu_n\gamma_1}{\varepsilon\varepsilon_0\lambda_*} C_N \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega}^2,$$

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\left|(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \rho)\right| \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0\lambda_*} C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega}^2.$$

Окончательно приходим к неравенству

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0\lambda_*}\left(\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}\right) \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega}^2. \tag{25}$$

Пусть исходные данные задачи 1 таковы, что выполняется условие

$$(\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)\left(\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}\right) \|f\|_\Omega < \lambda_*^2. \tag{26}$$

Тогда из (25) вытекает, что $\|\rho\|_{1,\Omega} = 0$ или $\rho_1 = \rho_2$ в Ω. В таком случае из (22) получаем, что $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ в Ω. Последнее в силу леммы 2.2 означает, что $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ в Ω.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *При выполнении условий* (i)–(iii) *существует слабое решение* $(\rho, \mathbf{E}) \in X$ *задачи* 1 *и справедливы оценки* (19) *и* (20)*. Если к тому же выполняется условие* (26)*, то слабое решение задачи* 1 *единственно.*

3. ПРИНЦИП МИНИМУМА И МАКСИМУМА

Положим $f_{\max}$ – положительная константа.

Пусть в дополнение к (i)–(iii) выполнено условие

(iv) $0 \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω.

Рассуждая, как в [15], установим принцип минимума и максимума для плотности заряда ρ.

Лемма 3.1. *При выполнении условий* (i)–(iv) *для слабого решения* $\rho \in H_0^1(\Omega)$ *задачи* 1 *справедлив следующий принцип минимума и максимума:*

$$0 \le \rho \le M \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \qquad M = \left(\frac{f_{\max}\varepsilon\varepsilon_0}{\mu_n\beta_0}\right)^{1/2}. \tag{27}$$

Доказательство. Докажем, что $\rho \ge 0$ п.в. в Ω. Введем функцию $w = \min\{\rho, 0\}$. Ясно, что оценка $\rho \ge 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $w = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q \subset \Omega$ обозначим измеримое подмножество Ω, в котором $w < 0$. Очевидно, что $w \in H^1(\Omega)$, а из [21, 22] вытекает, что $w|_\Gamma = \min\{\rho|_\Gamma, 0\} = 0$. Тогда $w \in H_0^1(\Omega)$.

Справедливо следующее равенство: $\nabla w = \nabla\rho$ п.в. в Q (см. [21]).

Из вышесказанного вытекает, что

$$(d\nabla\rho, \nabla w) = (d\nabla w, \nabla w)_Q = (d\nabla w, \nabla w), \tag{28}$$

$$(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, w) = (\mathbf{E}\cdot\nabla w, w)_Q = (\mathbf{E}\cdot\nabla w, w). \tag{29}$$

С учетом (10) из второго равенства в (29) получаем

$$\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla w, w) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, w^2) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(w, w^2)_Q. \tag{30}$$

При этом

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho|\rho, w) = \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|w|w, w)_Q. \tag{31}$$

Полагая в (11) $h = w$, будем иметь

$$(d\nabla\rho, \nabla w) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, w)_Q + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho|\rho, w)_Q = (f, w)_Q. \tag{32}$$

С учетом (28)–(31) последнее соотношение (32) принимает вид

$$(d\nabla w, \nabla w) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|w| - (1/2)w, w^2)_Q = (f, w)_Q. \tag{33}$$

Поскольку $w < 0$ в Q и $f \ge 0$ п.в. в Ω, то $(f, w)_Q \le 0$. С учетом того, что $\beta \ge 1/2$, в силу неравенства Фридрихса–Пуанкаре (8) из (33) приходим к оценке

$$\lambda_* \|w\|_{1,\Omega}^2 \le (f, w)_Q \le 0,$$

из которой вытекает, что $\|w\|_{1,\Omega} = 0$, а следовательно, $w = 0$ п.в. в Ω. Тогда $\rho \ge 0$ п.в. в Ω.

Для доказательства принципа максимума введем функцию $\tilde\rho = \max\{\rho - M, 0\}$, которая, как и вспомогательная функция w, принадлежит $H^1(\Omega)$. Ясно, оценка $\rho \le M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde\rho = 0$ п.в. в Ω. Из [21, 22] вытекает, что $\tilde\rho|_\Gamma = \max\{\rho|_\Gamma - M, 0\} = 0$. В таком случае $\tilde\rho \in H_0^1(\Omega)$.

Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество Ω, в котором $\rho > M$. Как и выше, из [21] вытекает, что

$$(d\nabla\rho, \nabla\tilde\rho) = (d\nabla\tilde\rho, \nabla\tilde\rho)_{Q_M} = (d\nabla\tilde\rho, \nabla\tilde\rho). \tag{34}$$

Из сказанного выше вытекает, что

$$\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho, \tilde\rho) = \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\tilde\rho, \tilde\rho). \tag{35}$$

Тогда с учетом леммы 2.1 приходим к равенству

$$\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\tilde\rho, \tilde\rho) = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \tilde\rho^2)_{Q_M} = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\tilde\rho + M, \tilde\rho^2)_{Q_M} = -\frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}(\tilde\rho^2 + M\tilde\rho, \tilde\rho)_{Q_M}. \tag{36}$$

Далее

$$(\beta|\rho|\rho,\tilde{\rho})_{Q_M} = (\beta\rho^2,\tilde{\rho})_{Q_M} = (\beta(\tilde{\rho}+M)^2,\tilde{\rho}) = (\beta(\tilde{\rho}^2+2M\tilde{\rho}+M^2),\tilde{\rho})_{Q_M}. \qquad (37)$$

Подставляя $h = \tilde{\rho}$ в (11), с учетом (36), (37) получим

$$(d\nabla\tilde{\rho},\nabla\tilde{\rho}) + \frac{\mu_n}{2\varepsilon\varepsilon_0}((2\beta-1)\tilde{\rho}^2 + (4\beta-1)M\tilde{\rho},\tilde{\rho})_{Q_M} = (f - (1/\varepsilon\varepsilon_0)\mu_n\beta M^2,\tilde{\rho})_{Q_M}. \qquad (38)$$

Поскольку $\beta \geq 1/2$, то, применив к левой части (38) оценку (8), приходим к оценке

$$d_0\delta_1\|\tilde{\rho}\|^2_{1,\Omega} \leq (f_{\max} - (1/\varepsilon\varepsilon_0)\mu_n\beta_0 M^2,\tilde{\rho})_{Q_M},$$

из которой выводим, что $\tilde{\rho} = 0$ п.в. в Ω, если параметр M определен в (27). Лемма 3.1 доказана.

4. ПОСТАНОВКА И РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

В данном разделе мы исследуем задачу управления для задачи 1 с двумя мультипликативными управлениями: d и β, и одним распределенным управлением f.

Будем считать, что функции d, β и f могут изменяться соответственно во множествах K_1, K_2 и K_3, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H^s_{d_0}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $s \geq 1/2$, $K_2 \subset L^4_{\beta_0}(\Omega)$ и $K_3 \subset L^2(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Введем функциональные пространства $X = H^1_0(\Omega) \times \tilde{H}^1_N(\Omega)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ и положим $\mathbf{x} = (\rho, \mathbf{E}) \in X$, $u = (d, \beta, f) \in K$, где $K = K_1 \times K_2 \times K_3$. Далее введем оператор $F = (F_1, F_2) : X \times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\mathbf{x},u),h\rangle = (d\nabla\rho,\nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho,h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho|\rho,h) - (f,h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega),$$

$$F_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \quad \text{в} \quad \Omega$$

и перепишем слабую формулировку задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\mathbf{x},u) = 0$.

Пусть $I : X \to \mathbb{R}$ – слабо полунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$J(\mathbf{x},u) \equiv \frac{\mu_0}{2}I(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2}\|d\|^2_{s,\Omega} + \frac{\mu_2}{2}\|f\|^2_\Omega \to \inf, \quad F(\mathbf{x},u) = 0, \quad (\mathbf{x},u) \in X \times K. \qquad (39)$$

Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x},u) \in X \times K : F(\mathbf{x},u) = 0, J(\mathbf{x},u) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (39).

Пусть, в дополнение к (j), выполняются следующие условия:

(jj) множество K_1 ограничено по норме $L^\infty(\Omega)$, множество K_2 ограничено по норме $L^4(\Omega)$;

(jjj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1,2$, множество K_1 ограничено в $H^s(\Omega)$, $s > 1/2$, множество K_3 ограничено в $L^2(\Omega)$ или $\mu_i > 0$, $i = 0,1,2$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$I_1(\rho) = \|\rho - \rho^d\|^2_Q, \quad I_2(\mathbf{E}) = \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^d\|^2_Q. \qquad (40)$$

Здесь $\rho^d \in L^2(Q)$ обозначает заданное поле концентрации в подобласти $Q \subset \Omega$. Функция $\mathbf{E}^d$ имеет аналогичный смысл для электрического поля.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и* (j)–(jjj)*, функционал $I : X \to R$ слабо полунепрерывен снизу и $Z_{ad} \neq \varnothing$. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\mathbf{x},u) \in X \times K$ *задачи управления* (39).

Доказательство. Через $(\mathbf{x}_m, u_m) = (\rho_m, \mathbf{E}_m, d_m, \beta_m, f_m) \in Z_{ad}$ обозначим минимизирующую последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\mathbf{x}_m, u_m) = \inf_{(\mathbf{x},u)\in Z_{ad}} J(\mathbf{x}, u) \equiv J^*.$$

Из условий (jj) и (jjj) и теоремы 2.1 вытекают следующие оценки:

$$\|d_m\|_{s,\Omega} + \|d_m\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_1, \quad \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \le c_2, \quad \|f\|_\Omega \le c_3, \quad \|\rho_m\|_{1,\Omega} \le c_4, \quad \|\mathbf{E}_m\|_{1,\Omega} \le c_5, \tag{41}$$

где константы c_1, c_2, c_5 не зависят от m. Из оценок (41) и условия (j) вытекает, что существуют слабые пределы $d^* \in K_1$, $\beta^* \in K_2$, $f^* \in K_3$, $\rho^* \in H_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{E}^* \in \tilde{H}_N^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{d_m\}$, $\{\beta_m\}$, $\{f_m\}$, $\{\rho_m\}$ и $\{\mathbf{E}_m\}$ соответственно.

С учетом этого можно считать, что при $m \to \infty$ имеем

$$\begin{gathered}\rho_m \to \rho^* \ \text{ слабо в } \ H^1(\Omega) \ \text{ и сильно в } \ L^s(\Omega), \quad s < 6,\\ \mathbf{E}_m \to \mathbf{E}^* \ \text{ слабо в } \ H^1(\Omega)^3 \ \text{ и сильно в } \ L^p(\Omega)^3, \quad p < 6,\\ d_m \to d^* \ \text{ слабо в } \ H^{1/2}(\Omega), \quad \text{слабо в } \ L^\infty(\Omega) \ \text{ и сильно в } \ L^q(\Omega), \quad q < 3,\\ \beta_m \to \beta^* \ \text{ слабо в } \ L^4(\Omega), \quad f_m \to f^* \ \text{ слабо в } \ L^2(\Omega).\end{gathered} \tag{42}$$

Ясно, что $F_2(\mathbf{x}^*) = 0$. Покажем теперь, что $F_1(\mathbf{x}^*, u^*) = 0$, т.е. что

$$(d^* \nabla\rho^*, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}^* \cdot \nabla\rho^*, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta^*|\rho^*|\rho^*, h) = (f^*, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{43}$$

При этом пара $(\mathbf{x}_m, u_m)$ удовлетворяет соотношению

$$(d_m \nabla\rho_m, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_m \cdot \nabla\rho_m, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta_m|\rho_m|\rho_m, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{44}$$

Перейдем в (44) к пределу при $m \to \infty$, начав со слагаемого $(d_m \nabla\rho_m, \nabla h)$:

$$(d_m \nabla\rho_m, \nabla h) - (d^* \nabla\rho^*, \nabla h) = ((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla h) + (\nabla(\rho_m - \rho^*), d^*\nabla h). \tag{45}$$

Поскольку $d^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то согласно (42) для второго слагаемого в (45) имеем

$$(\nabla(\rho_m - \rho^*), d^*\nabla h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Для работы с первым слагаемым в (45) введем последовательность $\{h_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ такую, что $h_n \to h$ при $n \to \infty$ по норме $H^1(\Omega)$. Существование такой последовательности следует из плотности вложения $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Справедливо следующее равенство:

$$((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla h) = ((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla h_n) + ((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla(h - h_n)). \tag{46}$$

В силу равномерной ограниченности величин $\|d_m - d^*\|_{L^\infty(\Omega)}$ и $\|\nabla\rho_m\|_\Omega$ по m существует такой номер $N = N(\varepsilon, h)$, что для второго слагаемого в (46) справедливо неравенство

$$|((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla(h - h_n))| \le \|d_m - d^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\rho_m\|_\Omega \|\nabla(h - h_n)\|_\Omega \le \varepsilon/2, \quad n \ge N, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{47}$$

Из равномерной ограниченности величин $\|\nabla h_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ по n и $\|\nabla\rho_m\|_\Omega$ по m соответственно и из (42) следует существование такого номера $M = M(\varepsilon, h)$, что для первого слагаемого в (46) справедливо неравенство

$$|((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla h_n)| \le \|d_m - d^*\|_{L^q(\Omega)} \|\nabla\rho_m\|_\Omega \|\nabla h_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le \varepsilon/2, \quad m \ge M, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q \ge 3. \tag{48}$$

Тогда из (46)–(48) вытекает, что

$$((d_m - d^*)\nabla\rho_m, \nabla h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{49}$$

В таком случае $(d_m \nabla\rho_m, \nabla h) \to (d^* \nabla\rho^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Для второго слагаемого имеем

$$(\mathbf{E}_m \cdot \nabla\rho_m, h) - (\mathbf{E}^* \cdot \nabla\rho^*, h) = ((\mathbf{E}_m - \mathbf{E}^*) \cdot \nabla\rho_m, h) + (\mathbf{E}^* \cdot \nabla(\rho_m - \rho^*), h).$$

В силу (42), используя лемму 2.1 и (41), получаем для первого слагаемого

$$|((\mathbf{E}_m - \mathbf{E}^*) \cdot \nabla\rho_m, h)| \le \gamma_1' \|\mathbf{E}_m - \mathbf{E}^*\|_{L^4(\Omega)^3} \|\rho_m\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Поскольку $\mathbf{E}^*h \in L^2(\Omega)^3$, то для второго слагаемого в силу (42) имеем

$$(\mathbf{E}^* \cdot \nabla(\rho_m - \rho^*), h) = (\nabla(\rho_m - \rho^*), \mathbf{E}^*h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Тем самым, $(\mathbf{E}_m \cdot \nabla\rho_m, h) \to (\mathbf{E}^* \cdot \nabla\rho^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Далее рассмотрим третье слагаемое:

$$(\beta_m|\rho_m|\rho_m, h) - (\beta^*|\rho^*|\rho^*, h) = (\beta_m(|\rho_m|\rho_m - |\rho^*|\rho^*), h) + (\beta_m - \beta^*, |\rho^*|\rho^* h). \tag{50}$$

Так как $|\rho^*|\rho^* h \in L^2(\Omega)$, то согласно (42) для второго слагаемого в (50) имеем

$$(\beta_m - \beta^*, |\rho^*|\rho^* h) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Первое слагаемое в (50) перепишем в виде

$$(\beta_m(|\rho_m|\rho_m - |\rho^*|\rho^*), h) = (\beta_m|\rho_m|(\rho_m - \rho^*), h) + (\beta_m\rho^* (|\rho_m| - |\rho^*|), h). \tag{51}$$

В силу (42) и равномерной ограниченности по m величин $\|\beta_m\|_{L^4(\Omega)}$, $\|\rho_m\|_{L^4(\Omega)}$ для каждого слагаемого в правой части (51) получаем

$$\left|(\beta_m|\rho_m|(\rho_m - \rho^*), h)\right| \le \|\beta_m\|_{L^4(\Omega)} \|\rho_m\|_{L^4(\Omega)} \|\rho_m - \rho^*\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{L^4(\Omega)} \to 0$$
$$\text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$
$$\left|(\beta_m\rho^* (|\rho_m| - |\rho^*|), h)\right| \le \|\beta_m\|_{L^4(\Omega)} \|\rho^*\|_{L^4(\Omega)} \|\rho_m - \rho^*\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{L^4(\Omega)} \to 0$$
$$\text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Следовательно, $(\beta_m|\rho_m|\rho_m, h) \to (\beta^*|\rho^*|\rho^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $X \times K$, то из (41) получаем, что $J(\mathbf{x}^*, u^*) = J^*$. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Ясно, что все функционалы качества из (40) удовлетворяют условиям теоремы 4.1.

5. ВЫВОД СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Через

$$X^* = H^{-1}(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega)^*, \quad Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

обозначим пространства, двойственные к пространствам X и Y, введенным в разд. 4.

Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F : X \times K \to Y$ по состоянию $\mathbf{x}$ в любой точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}}, \hat{d}, \hat{\beta}, \hat{f})$ является линейным непрерывным оператором $F_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$, который каждому элементу $(\tau, \mathbf{e}) \in X$ ставит в соответствие элемент

$$F_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})(\tau, \mathbf{e}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y.$$

Здесь $\hat{y}_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat{y}_2 \in L_0^2(\Omega)$ определяются по паре $(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $(\tau, \mathbf{e})$ с помощью следующих соотношений:

$$\begin{gathered} \langle \hat{y}_1, (\tau, \mathbf{e}) \rangle = (\hat{d}\nabla\tau, \nabla h) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla\tau, h) + \mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\hat{\rho}, h) + (2/\varepsilon\varepsilon_0)\mu_n(\hat{\beta}|\hat{\rho}|\tau, h) \quad \forall(\tau, \mathbf{e}) \in X, \\ \hat{y}_2 = \operatorname{div}\mathbf{e} - (1/\varepsilon\varepsilon_0)\tau. \end{gathered} \tag{52}$$

Через $F_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* : Y^* \to X^*$ обозначим сопряженный к $F_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач (см. [23]), введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^* = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, на который будем ссылаться, как на сопряженное состояние, и введем Лагранжиан $\mathscr{L} : X \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \langle F_1(\mathbf{x}, u), \theta \rangle + (F_2(\mathbf{x}), \sigma). \tag{53}$$

Доказательство следующей теоремы проведем по схеме, предложенной в гл. 6 из [19].

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и* (j)–(jjj) *и элемент* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \in X \times K$ *является точкой локального минимума для задачи* (39). *Предположим, что функционал качества* $I : X \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию* $\mathbf{x}$ *в точке* $\hat{\mathbf{x}}$. *Тогда:*

1) *существует ненулевой множитель Лагранжа* $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) = (\lambda_0, \theta, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$, *с которым выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа* $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \, \mathbf{y}^* = -\lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ *в* X^*, *эквивалентное соотношениям*

$$(\hat{d} \nabla \tau, \nabla \theta) + \mu_n (\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon \varepsilon_0} (\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, \theta) - \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} (\tau, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_\rho(\hat{\mathbf{x}}), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H_0^1(\Omega), \tag{54}$$

$$\mu_n (\mathbf{E} \cdot \nabla \hat{\rho}, \theta) + (\operatorname{div} \mathbf{e}, \sigma) = -\lambda_0 \frac{\mu_0}{2} \langle I'_{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{e} \rangle \quad \forall \mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega), \tag{55}$$

и справедлив принцип минимума $\mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \le \mathscr{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*)$ *для всех* $u \in K$, *эквивалентный неравенствам*

$$\lambda_0 \mu_1 (\hat{d}, d - \hat{d})_{s,\Omega} + ((d - \hat{d}) \nabla \hat{\rho}, \nabla \theta) \ge 0 \quad \forall d \in K_1, \quad s \ge 1/2, \tag{56}$$

$$((\beta - \hat{\beta}) |\hat{\rho}| \hat{\rho}, \theta) \ge 0 \quad \forall \beta \in K_2, \tag{57}$$

$$\lambda_0 \mu_2 (\hat{f}, f - \hat{f}) - (f - \hat{f}, \theta) \ge 0 \quad \forall f \in K_3; \tag{58}$$

2) *если, к тому же, выполняется условие*

$$\frac{\gamma_1 \mu_n C_N}{\varepsilon \varepsilon_0} \|f\|_\Omega \le \lambda_*^2, \tag{59}$$

то любой нетривиальный множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, *удовлетворяющий* (54)–(58), *является регулярным, т.е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$ *и определяется единственным образом по заданной паре* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$.

Доказательство. Согласно гл. 2 из [23] для доказательства существования множителя Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$ достаточно показать, что $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$ – фредгольмов оператор. В силу (52) оператор $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$ можно представить в следующем виде:

$$F'_{\mathbf{x}} = \Phi + \hat{\Phi} \equiv (\Phi_1, \Phi_2) + (\hat{\Phi}_1, 0).$$

Здесь $\Phi_2(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{E} - (1/\varepsilon\varepsilon_0)\tau$ для всех $\mathbf{x} = (\tau, \mathbf{E}) \in X$ и операторы Φ_1 и $\hat{\Phi}_1 : X \to Y$ определяются формулами

$$\begin{gathered} \langle \Phi_1(\tau), h \rangle = (\hat{d} \nabla \tau, \nabla h) + \mu_n (\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, h) + (2\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)(\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, h), \\ \langle \hat{\Phi}_1(\mathbf{e}), h \rangle = \mu_n (\mathbf{e} \cdot \nabla \hat{\rho}, h). \end{gathered} \tag{60}$$

Покажем, что оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : X \to Y$ является изоморфизмом. Для этого достаточно показать, что для любой пары $(f, s) \in Y$ существует единственное решение $(\tau, \mathbf{e}) \in X$ линейной задачи

$$a_1(\tau, h) = (\hat{d} \nabla \tau, \nabla h) + \mu_n (\hat{\mathbf{E}} \cdot \nabla \tau, h) + (2\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)(\hat{\beta} |\hat{\rho}| \tau, h) = \langle f, h \rangle \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{61}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} - (1/\varepsilon\varepsilon_0)\tau = s \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{62}$$

Из леммы 2.1 и условия (iii) вытекают непрерывность и коэрцитивность билинейной формы a_1 с константой $\lambda_* = d_0\delta_1$. Тогда по теореме Лакса–Мильграма существует единственное решение $\tau \in H_0^1(\Omega)$ задачи (61), для которого справедлива оценка

$$\|\tau\|_{1,\Omega} \le C_* \|f\|_{-1,\Omega}, \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{63}$$

Тогда в силу леммы 2.2 для любой функции $s \in L^2(\Omega)$ существует единственное решение $\mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega)$ задачи (62) и справедлива оценка

$$\|\mathbf{e}\|_{1,\Omega} \le C_N \left((C_*/\varepsilon\varepsilon_0)\|f\|_{-1,\Omega} + \|s\|_\Omega\right). \tag{64}$$

Докажем, что оператор $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, 0) : X \to Y$, определенный формулой (60), является непрерывным и компактным. Поскольку пространство $H^1(\Omega)^3$ непрерывно и компактно вложено в $L^4(\Omega)^3$, то данное утверждение вытекает из оценки

$$|(\mathbf{e}\cdot\hat{\rho}, h)| \le \gamma_2' \|\mathbf{e}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\hat{\rho}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega}.$$

В таком случае оператор $F_{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}, u) : X \to Y$ является фредгольмовым, как сумма изоморфизма $\Phi : X \to Y$ и компактного оператора $\hat{\Phi} : X \to Y$.

Для доказательства второго утверждения теоремы 5.1 достаточно доказать, что однородная система (54), (55) (при $\lambda_0 = 0$) имеет только тривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \equiv \mathbf{0}$.

Предположим противное, т.е., что существует по крайней мере одно нетривиальное решение $\mathbf{y}^* = (\theta, \sigma) \in Y^*$ системы (54), (55) при $\lambda_0 = 0$, в которой элементы $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\rho}, \hat{\mathbf{E}})$ и $\hat{u} = (\hat{d}, \hat{\beta}, \hat{f})$ связаны соотношением $F(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = 0$.

Подставим $\tau = \theta$ и $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}$, такое что $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{e}} = \sigma$ в Ω, в (54), (55). Существование указанной функции $\tilde{\mathbf{e}}$ вытекает из леммы 2.2, причем справедлива оценка $\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1,\Omega} \le C_N \|\sigma\|_\Omega$. В результате приходим к соотношениям

$$(\hat{d}\nabla\theta, \nabla\theta) + \mu_n(\hat{\mathbf{E}}\cdot\nabla\theta, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\hat{\beta}|\hat{\rho}|\theta, \theta) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\theta, \sigma) = 0, \tag{65}$$

$$\mu_n(\tilde{\mathbf{e}}\cdot\nabla\hat{\rho}, \theta) + (\sigma, \sigma) = 0. \tag{66}$$

Из (66) с учетом (7) и (19) выводим оценку

$$\|\sigma\|_\Omega \le \gamma_1\mu_n C_* C_N \|f\|_\Omega \|\theta\|_{1,\Omega}. \tag{67}$$

Используя (67) и коэрцитивность формы a_1, из (65) приходим к неравенству

$$\lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega}^2 \le (1/\varepsilon\varepsilon_0)\gamma_1\mu_n C_* C_N \|f\|_\Omega \|\theta\|_{1,\Omega}^2. \tag{68}$$

Из (68) вытекает, что если выполняется (59), то $\|\theta\|_{1,\Omega} = 0$ или $\theta = 0$ в Ω. Тогда из (67) получаем, что $\sigma = 0$, но это противоречит предполагаемой нетривиальности множителя Лагранжа (θ, σ). Единственность и регулярность множителя Лагранжа $(1, \mathbf{y}^*)$ при условии (59) вытекают из фредгольмовости оператора $F_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$. Теорема 5.1 доказана.

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В данном разделе докажем локальную единственность решения задачи управления

$$J(\mathbf{x}, f) \equiv \frac{\mu_0}{2}\|\rho - \rho^d\|_Q^2 + \frac{\mu_1}{2}\|f\|_\Omega^2 \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, f) = 0, \quad (\mathbf{x}, f) \in X \times K, \tag{69}$$

отвечающую функционалу качества I_1 в (40), роль управления в которой играет только одна функция f.

Пусть выполняются следующие условия:

(j)' $K \subset L^2(\Omega)$ – непустое выпуклое замкнутое множество;

(jj)' $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, множество K ограничено или $\mu_i > 0$, $i = 0,1$.

Из теоремы 2.1 вытекают оценки

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq M_\rho \equiv \sup_{f\in K} C_* \|f\|_\Omega, \quad \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{E}} \equiv \sup_{f\in K} (1/\varepsilon\varepsilon_0) C_N C_* \|f\|_\Omega, \quad C_* = \lambda_*^{-1}. \tag{70}$$

Положим

$$\rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad f = f_1 - f_2. \tag{71}$$

Для удобства разобьем доказательство единственности решения задачи (69) на отдельные этапы.

1. Вывод оценок норм разностей ρ и $\mathbf{E}$ через норму разности управлений f.

Для этого вычтем уравнения (11), (12), записанные при $(\rho_2, \mathbf{E}_2, f_2)$, из уравнений (11), (12) для $(\rho_1, \mathbf{E}_1, f_1)$. Рассуждая, как при выводе (21), (22), получаем

$$\begin{gathered}(d\nabla\rho, \nabla h) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, h) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, h) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E}\cdot\nabla\rho_2, h) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, h) + (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{72}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{73}$$

Из (73) в силу леммы 2.2 вытекает оценка

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq (1/\varepsilon\varepsilon_0) C_N \|\rho\|_{1,\Omega}. \tag{74}$$

С учетом (74), рассуждая как при доказательстве локальной единственности решения задачи 1, при выполнении условия

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}\right) M_\rho \leq \frac{\lambda_*}{2} \tag{75}$$

из неравенства

$$\lambda_* \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \leq (\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0)(\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}) M_\rho \|\rho\|_{1,\Omega}^2 + \|f\|_\Omega \|\rho\|_{1,\Omega} \tag{76}$$

приходим к следующей оценке:

$$\|\rho\|_{1,\Omega} \leq 2C_* \|f\|_\Omega. \tag{77}$$

С учетом (77) оценка (74) примет вид

$$\|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} \leq (2/\varepsilon\varepsilon_0) C_N C_* \|f\|_\Omega. \tag{78}$$

2. Вывод оценок для множителей Лагранжа θ_i и σ_i, $i = 1, 2$.

Предполагая, что выполняются условия теоремы 5.1, запишем (54), (55) при $I = I_1(\rho) = \left\|\rho - \rho^d\right\|_Q^2$, $\lambda_0 = 1$ для $(\rho_i, \mathbf{E}_i, \theta_i, \sigma_i)$. Будем иметь

$$\begin{gathered}(d\nabla\tau, \nabla\theta_i) + \mu_n(\mathbf{E}_i \cdot \nabla\tau, \theta_i) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_i|\tau, \theta_i) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma_i) = \\ = -\mu_0(\rho_i - \rho^d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{79}$$

$$\mu_n(\mathbf{e}\cdot\nabla\rho_i, \theta_i) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma_i) = 0 \quad \forall \mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \tag{80}$$

В силу леммы 2.2 существуют функции $\tilde{\mathbf{e}}_i$ такие, что $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{e}}_i = \sigma_i$ и $\|\tilde{\mathbf{e}}_i\|_{1,\Omega} \leq C_N \|\sigma_i\|_\Omega$, $i = 1, 2$. Полагая $\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}_i$ в (80), приходим к неравенству

$$\|\sigma_i\|_\Omega \leq \mu_n \gamma_1 C_N M_\rho \|\theta_i\|_{1,\Omega}, \quad i = 1, 2. \tag{81}$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (79), с учетом лемм 2.1 и 2.2 и оценки (81) при выполнении условия

$$\frac{\mu_n \gamma_1 C_N}{\varepsilon\varepsilon_0} M_\rho \le \frac{\lambda_*}{2} \tag{82}$$

получаем оценку для θ_i:

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \le \mu_0 M_\theta \equiv 2\mu_0 C_* \left(M_\rho + \|\rho^d\|_Q\right), \quad i = 1, 2. \tag{83}$$

С учетом (83) из (81) получаем оценку для σ_i:

$$\|\sigma_i\|_\Omega \le \mu_0 M_\sigma \equiv 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 C_N M_\rho M_\theta, \quad i = 1, 2. \tag{84}$$

3. Вывод оценок норм θ и σ через норму f.

В дополнение к (71) положим $\theta = \theta_1 - \theta_2$ и $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ и вычтем равенства (79), (80), записанные при $i = 2$, из (79), (80) при $i = 1$. Будем иметь

$$\begin{gathered}(d\nabla\tau, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\tau, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\tau, \theta) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\tau, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\tau, \theta_2) + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\tau, \sigma) - \mu_0(\rho, \tau)_Q \quad \forall\tau \in H_0^1(\Omega),\end{gathered} \tag{85}$$

$$\mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\rho, \theta_1) + \mu_n(\mathbf{e} \cdot \nabla\rho_2, \theta) + (\operatorname{div}\mathbf{e}, \sigma) = 0 \quad \forall\mathbf{e} \in \tilde{H}_N^1(\Omega). \tag{86}$$

Рассуждая, как при выводе (84), из (86) с учетом (77) приходим к неравенству

$$\|\sigma\|_\Omega \le \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta C_N \|\rho\|_{1,\Omega} + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega} \le 2\mu_0 \mu_n \gamma_1 C_* M_\theta C_N \|f\|_\Omega + \mu_n \gamma_1 M_\rho C_N \|\theta\|_{1,\Omega}. \tag{87}$$

Подставим $\tau = \theta$ в (85). Применяя неравенство Гёльдера и оценки леммы 2.1, с учетом (77), (78) будем иметь

$$\begin{gathered}\lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} \le \mu_0 \mu_n \gamma_1 M_\theta \|\mathbf{E}\|_{1,\Omega} + \mu_0 (2/\varepsilon\varepsilon_0) \mu_n C_4^3 M_\theta \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \|\rho\|_{1,\Omega} + \\ + (1/\varepsilon\varepsilon_0)\|\sigma\|_\Omega + \mu_0 \|\rho\|_{1,\Omega} \le \mu_0 \omega_1 \|f\|_\Omega + (1/\varepsilon\varepsilon_0)\mu_n \gamma_1 C_N M_\rho \|\theta\|_{1,\Omega}, \\ \omega_1 = (4/\varepsilon\varepsilon_0)\mu_n M_\theta C_* \left(\gamma_1 C_N + C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)}\right) + 2C_*.\end{gathered} \tag{88}$$

При выполнении условия (82) из (88) выводим оценку для разности θ:

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \le 2\mu_0 C_* \omega_1 \|f\|_\Omega. \tag{89}$$

С учетом (89) из (87) получаем оценку для разности σ:

$$\|\sigma\|_\Omega \le \mu_0 \omega_2 \|f\|_\Omega, \quad \omega_2 = 2\mu_n \gamma_1 C_* C_N (M_\theta + \omega_1 M_\rho). \tag{90}$$

4. Вывод основного неравенства.

Полагая в (85) $\tau = \rho$, получим

$$\begin{gathered}(d\nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) = \\ = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2) - \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2) + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) - \mu_0(\rho, \rho)_Q.\end{gathered} \tag{91}$$

Положим теперь $h = \theta$ в (72). Будем иметь

$$(d\nabla\rho, \nabla\theta) + \mu_n(\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\rho, \theta) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) = -\mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta) + (f, \theta). \tag{92}$$

Вычитая (92) из (91), получим

$$\begin{gathered}\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) + \mu_0\|\rho\|_Q^2 + (f, \theta) = \\ = \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2) + \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta\right).\end{gathered} \tag{93}$$

Положим $f = f_1$ в неравенстве (58) (при $\lambda_0 = 1$ и при $\mu_2 = \mu_1$ согласно (70)), записанном для (f_2, θ_2), и положим $f = f_2$ в (58) при (f_1, θ_1). Будем иметь

$$\mu_1(f_2, f) - (f, \theta_2) \geq 0, \quad -\mu_1(f_1, f) + (f, \theta_1) \geq 0. \tag{94}$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке

$$(f, \theta)' \geq \mu_1 \|f\|_\Omega. \tag{95}$$

С учетом (95) из (93) получаем основное неравенство

$$\begin{gathered}\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta|\rho_1|\rho, \theta) + \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2) - \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta) - \\ - \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta) + \mu_n(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2) - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}(\rho, \sigma) + \mu_0\|\rho\|_Q^2 + \mu_1\|f\|_\Omega^2 \leq 0.\end{gathered} \tag{96}$$

5. Оценка слагаемых в (96) через норму разности f.

Применяя неравенство Гёльдера, оценки леммы 2.1 и используя (70), (77), (78), (83), (89) и (90), оценим слагаемые в левой части последнего неравенства:

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}|(\beta|\rho_1|\rho, \theta)| \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\rho \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \|\rho\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \leq 4\mu_0 \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\rho \|\beta\|_{L^4(\Omega)} C_*^2 \omega_1 \|f\|_\Omega^2;$$

$$\frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}|(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho, \theta_2)| \leq \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \|\rho\|_{1,\Omega}^2 \|\theta_2\|_{1,\Omega} \leq 4\mu_0 \frac{2\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\theta \|\beta\|_{L^4(\Omega)} C_*^2 \|f\|_\Omega^2;$$

$$\frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0}|(\beta(|\rho_1| - |\rho_2|)\rho_2, \theta)| \leq \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\rho \|\beta\|_{L^4(\Omega)} \|\rho\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \leq 4\mu_0 \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} C_4^3 M_\rho |\|\beta\|_{L^4(\Omega)} C_*^2 \omega_1 \|f\|_\Omega^2;$$

$$\mu_n|(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho_2, \theta)| \leq 4\mu_0 \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \gamma_1 M_\rho C_N C_*^2 \omega_1 \|f\|_\Omega^2;$$

$$\mu_n|(\mathbf{E} \cdot \nabla\rho, \theta_2)| \leq 4\mu_0 \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \gamma_1 M_\theta C_N C_*^2 \|f\|_\Omega^2;$$

$$\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}|(\rho, \sigma)| \leq \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \|\rho\|_{1,\Omega} \|\sigma\|_{1,\Omega} \leq 2\mu_0 \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} C_* \omega_2 \|f\|_\Omega^2 = 4\mu_0 \frac{\mu_n}{\varepsilon\varepsilon_0} \gamma_1 (M_\theta + \omega_1 M_\rho) C_N C_*^2 \|f\|_\Omega^2.$$

Пусть выполняются условия

$$8(\mu_n/\varepsilon\varepsilon_0) C_*^2 \left(M_\theta + \omega_1 M_\rho\right) \left(C_4^3 \|\beta\|_{L^4(\Omega)} + \gamma_1 C_N\right) < \mu_1/\mu_0, \tag{97}$$

где параметры M_ρ, M_θ и ω_1 введены соответственно в (70), (83) и (88).

Тогда из (96), (77) и (78) вытекает, что $f = 0$, $\rho = 0$ и $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ в Ω.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть в дополнение к условиям* (i)–(iii) *и* (j)', (jj)' *выполняются условия* (75) *и* (97). *Тогда задача управления* (69) *имеет единственное решение* $(\rho, \mathbf{E}, f) \in H_0^1(\Omega) \times \tilde{H}_N^1(\Omega) \times K$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе обоснована корректность задачи моделирования зарядки неоднородного полярного диэлектрика и проведен качественый анализ свойств ее решения. При этом обобщены результаты [15] по исследованию разрешимости краевой задачи (1)–(3), полученные при $\beta \equiv 1$. Здесь отметим работы [24–26] по исследованию схожих реакционно-диффузионных моделей, также учитывающих зависимость аналогичной нелинейности от пространственных переменных, которая описывает неоднородность протекания химической реакции в рассматриваемой области.

Одним из основных результатов настоящей работы является доказательство разрешимости задачи управления при минимальной гладкости используемых в ней мультипликативных управлений и вывод для нее системы оптимальности. На основе анализа данной системы установлены достаточные условия локальной единственности решения задачи распределенного управления.

Отметим также аналогичные результаты для близких моделей тепломассопереноса, сложного теплообмена и поляризационных процессов, полученные в работах [27–31].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chan D.S.H., Sim K.S., Phang J.C.H.* A simulation model for electron irradiation induced specimen charging in a scanning electron microscope // Scanning Spectroscopy. 1993. V. 7. № 31. P. 847–859.
2. *Sessler G.M., Yang G.M.* Charge dynamics in electron-irradiated polymers // Braz. J. Phys. 1999. V. 29. № 2. P. 233–240.
3. *Suga H., Tadokoro H., Kotera M.* A simulation of electron beam induced charging-up of insulators // Electron Microscopy. 1998. V. 1. P. 177–178.
4. *Cazaux J.* About the mechanisms of charging in EPMA, SEM, and ESEM with their time evolution // Microscopy and Microanalysis. 2004. V. 10. № 6. P. 670–680.
5. *Борисов С.С., Грачев Е.А., Зайцев С.И.* Моделирование поляризации диэлектрика в процессе облучения электронным пучком // Прикладная физика. 2004. № 1. С. 118–124.
6. *Kotera M., Yamaguchi K., Suga H.* Dynamic simulation of electron-beam-induced charging up of insulators // Japan J. Appl. Phys. 1999. V. 38. № 12 B. P. 7176–7179.
7. *Ohya K., Inai K., Kuwada H., Hauashi T., Saito M.* Dynamic simulation of secondary electron emission and charging up of an insulting material // Surface and Coating Technology. 2008. V. 202. P. 5310–5313.
8. *Maslovskaya A.G.* Physical and mathematical modeling of the electron-beam-induced charging of ferroelectrics during the process of domain structure switching // J. of Surface Investigation. 2013. V. 7. № 4. P. 680–684.
9. *Pavelchuk A.V., Maslovskaya A.G.* Approach to numerical implementation of the drift-diffusion model of field effects induced by a moving source // Russ. Phys. J. 2020. V. 63. P. 105–112.
10. *Raftari B., Budko N.V., Vuik C.* Self-consistence drift-diffusion-reaction model for the electron beam interaction with dielectric samples // J. Appl. Phys. 2015. V. 118. P. 204101 (17).
11. *Chezganov D.S., Kuznetsov D.K., Shur V.Ya.* Simulation of spatial distribution of electric field after electron beam irradiation of MgO-doped $LiNbO_3$ covered by resist layer // Ferroelectrics. 2016. V. 496. P. 70–78.
12. *Maslovskaya A., Pavelchuk A.* Simulation of dynamic charging processes in ferroelectrics irradiated with SEM // Ferroelectrics. 2015. V. 476. P. 157–167.
13. *Maslovskaya A., Sivunov A.V.* Simulation of electron injection and charging processes in ferroelectrics modified with SEM-techniques // Solid State Phenomena. 2014. V. 213. P. 119–124.
14. *Arat K.T., Klimpel T., Hagen C.W.* Model improvements to simulate charging in scanning electron microscope // J. of Micro/ Nanolithography, MEMS, and MOEMS, 2019. V. 18. № 4. P. 04403 (13).
15. *Бризицкий Р.В., Максимова Н.Н., Масловская А.Г.* Теоретический анализ и численная реализация стационарной диффузионно-дрейфовой модели зарядки полярных диэлектриков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 10. С. 1696–1706.
16. *Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А.* Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 5. С. 512–517.
17. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
18. *Maksimova N.N., Brizitskii R.V.* Inverse problem of recovering the electron diffusion coefficient // Дальневосточный матем. журн. 2022. Т. 22. № 2. С. 201–206.
19. *Алексеев Г.В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.
20. *Buffa A.* Some numerical and theoretical problems in computational electromagnetism. Thesis. 2000.
21. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 463 с.
22. *Berninger H.* Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators // Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII. Springer, 2009. P. 169–176.
23. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научн. книга, 1999. 352 с.
24. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 2. С. 3–16.
25. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.

26. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Задача граничного управления для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2139–2152 .

27. *Алексеев Г.В.* Коэффициентные обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 6. С. 1055–1076.

28. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. of Math. Analys. and Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.

29. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2018. V. 57. P. 290–298.

30. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM: Math. Model. and Numeric. Analys. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.

31. *Maslovskaya A.G., Moroz L.I., Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E.* Theoretical and numerical analysis of the Landau-Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2021. V. 93. P. 105524.