

---

---

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ**

---

---

УДК 519.612

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, К КОТОРЫМ РЕДУЦИРУЮТСЯ  
ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ:  
РЕГИОНАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ<sup>1)</sup>**

© 2023 г. И. И. Колотов<sup>1</sup>, Д. В. Лукьяненко<sup>1</sup>, И. Э. Степанова<sup>1,2,\*</sup>,  
А. В. Щепетиллов<sup>1</sup>, А. Г. Ягола<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 119992 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра математики, Россия

<sup>2</sup> 123995 Москва, ул. Б. Грузинская, 10, стр. 1, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Россия

\*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 06.02.2023 г.  
Переработанный вариант 06.02.2023 г.  
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Рассматриваются условия однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, к решению которых редуцируются многие обратные задачи гравимагниторазведки. Математические постановки обратных задач выполняются с учетом сферичности планеты. Библ. 11. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** разрешимость, вырожденные системы, интегральные представления.

**DOI:** 10.31857/S0044466923090119, **EDN:** JJFWYJ

## ВВЕДЕНИЕ

При решении обратных геофизических задач интерпретационного характера необходимо находить скалярные и векторные функции, описывающие плотности распределения источников поля. В общем случае указанные функции зависят от бесконечного (зачастую, несчетного) числа параметров и, согласно результатам, приведенным, например, в [1], однозначно не могут быть восстановлены. Если перейти к конечномерным аппроксимациям как наблюдаемых элементов аномальных физических полей, так и самих источников, то единственное решение условно-вариационных задач, возникающих при интерпретации данных гравиметрии и магнитометрии, можно получить при выполнении ряда условий. Мы попытаемся сформулировать условия однозначной разрешимости соответствующих систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в региональном варианте, т.е. тогда, когда необходимо учитывать сферичность Земли. Постановки такого рода появляются при исследованиях физических полей на больших полигонах, размеры которых превышают 1 градус (приблизительно 111 км для Земли) в двух направлениях.

### 1. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СЛАУ В РЕГИОНАЛЬНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА S-АППРОКСИМАЦИЙ

Основные характеристики метода S-аппроксимаций в двух случаях (локальном и региональном) были изложены в работах первого автора (см., например, [1–5]). Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении самых разнообразных обратных геофизических и геодезических задач и был модифицирован с целью нахождения более адекватных реальности распределений эквивалентных по внешнему полю источников.

Напомним основные положения регионального варианта метода S-аппроксимаций.

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 23-41-00002).

Для нахождения производных гравитационного поля в некоторой совокупности точек  $M_v$  с координатами  $x^{(v)} = (x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, x_3^{(v)})$ , из внешности  $CE$  некоторой области  $E \subset R^3$  в рамках метода линейных интегральных представлений (см. [1]) необходимо действовать следующим образом.

Пусть  $D$  – сфера, описываемая уравнением  $r = \text{const} = R$ .

По заданным плотностям  $\rho_1(\xi_1, \xi_2) \in L_2(D)$  и  $\rho_2(\xi_1, \xi_2) \in L_2(D)$  простого и двойного слоев мы должны найти совокупность ограниченных линейных функционалов вида

$$p_s = \int_D \rho_1(\xi_1, \xi_2) P_1^{(s)}(\xi_1, \xi_2) \mu(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \int_D \rho_2(\xi_1, \xi_2) P_2^{(s)}(\xi_1, \xi_2) \mu(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \tag{1.1}$$

$$s = 1, 2, \dots, S,$$

где для всех  $s$

$$\|P_1^{(s)}\|^2 = \int_D (P_1^{(s)})^2(\xi_1, \xi_2) d\mu(\xi_1, \xi_2) < +\infty, \tag{1.2}$$

$$\|P_2^{(s)}\|^2 = \int_D (P_2^{(s)})^2(\xi_1, \xi_2) d\mu(\xi_1, \xi_2) < +\infty.$$

В формулах (1.1) и (1.2)  $\mu(\xi_1, \xi_2)$  – мера на поверхности  $D$ ,  $\xi_1, \xi_2$  – координаты на поверхности  $D$ . В случае сферы в роли  $\xi_1, \xi_2$  выступают  $\vartheta, \varphi$ ,  $d\mu(\xi_1, \xi_2) = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ .

В дальнейшем в роли области  $E$  у нас будет выступать “идеальная” Земля, а в роли внешности такой идеальной Земли – реальная Земля.

Представим себе идеализированную Землю как внутренность сферы радиуса  $R_0$ . Реальная Земля тогда может трактоваться как область трехмерного пространства, ограниченная замкнутой кусочно-непрерывной поверхностью  $S$ , незначительно отклоняющейся от сферы радиуса  $R_0$ . Предполагается, что приближенные значения функции  $G(x)$ , гармонической вне этой сферы, заданы в произвольном множестве точек  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , на поверхности  $S$ :

$$f_{i,\delta} = f_i + \delta f_i, \quad f_i = G(x^{(i)}). \tag{1.3}$$

Так как  $G(x)$  гармонична при  $r > R_0$ , она имеет следующее интегральное представление:

$$G(x) = \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) \widetilde{\sin \vartheta d\vartheta d\tilde{\varphi}}}{R(\xi - x)} + \frac{R_0^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}) (R_0 - r \cos \vartheta') \widetilde{\sin \vartheta d\tilde{\varphi}}}{R^3(\xi - x)},$$

$$R(\xi - x) = (R_0^2 - 2R_0 r \cos \vartheta' + r^2)^{1/2}, \quad \xi = (R_0 \widetilde{\cos \varphi \sin \vartheta}, R_0 \widetilde{\sin \varphi \sin \vartheta}, R_0 \widetilde{\cos \varphi}), \tag{1.4}$$

$$x = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \quad \cos \vartheta' = \sin \vartheta \sin \tilde{\vartheta} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}) + \cos \vartheta \cos \tilde{\vartheta}.$$

Функция  $\sigma(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$  в (1.4) – плотность простого слоя, распределенного на сфере радиуса  $R_0$ ,  $w(\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi})$  – плотность двойного слоя, распределенного на той же сфере;  $R(\xi - x)$  – расстояние между текущей точкой сферы  $\xi$  и точкой наблюдения  $x$ . Дифференцирование правой части (1.4) – по различным координатам точки наблюдения  $G(x)$ , даже если эти производные (например,  $\partial V / \partial r$  – радиальная производная гравитационного потенциала) не являются гармоническими функциями.

Формула (1.4) является одной из форм интегрального представления гармонической функции вне сферы радиуса  $R$  (см. [6]):

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \frac{\partial V(\xi)}{\partial \mathbf{n}} - V(\xi) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{R(\xi - x)} \right) \right) \widetilde{\sin \vartheta d\tilde{\varphi}}, \tag{1.5}$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к единичной сфере (мы можем написать  $\partial / \partial r$ ,  $r$  – радиальная координата радиус-вектора  $x$ ).

Условно-вариационная задача для  $\sigma$  и  $w$  (см. [4, 7]) имеет следующее решение:

$$\sigma(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(1)}(\xi), \quad w(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_i^{(2)}(\xi), \quad \hat{\xi} = (\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \quad \xi = (R, \tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}), \tag{1.6}$$

где  $Q_i^{(1)}(\xi)$  и  $Q_i^{(2)}(\xi)$  представляются в виде

$$Q_i^{(1)}(\xi) = \frac{1}{R(\xi - x^{(i)})}, \quad Q_i^{(2)}(\xi) = \frac{R_0 - r_i \cos \vartheta_i'}{R^3(\xi - x^{(i)})}. \tag{1.7}$$

Величины  $\lambda_i$  являются компонентами  $N$ -вектора  $\lambda$ , дающего решение системы линейных уравнений

$$A\lambda = f_\delta, \quad f_\delta = f + \delta f, \tag{1.8}$$

где  $f_\delta$  имеет компоненты  $f_{i,\delta}$  (см. (1.3)) и элементы матрицы  $A = A^T \geq 0$  записываются как

$$a_{ij} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [Q_i^{(1)}(\xi)Q_j^{(1)}(\xi) + Q_i^{(2)}(\xi)Q_j^{(2)}(\xi)] \widetilde{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} \left( 1 + \frac{0.25}{r_i r_j h_i h_j} \right) \times \tag{1.9}$$

$$\times F(2 \arctg(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{0.5(1 + \cos \alpha_{ij})}) - \frac{\pi(3(h_i h_j)^2 - 4h_i h_j \cos \alpha_{ij} + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos \alpha_{ij}} + (h_i h_j)^2)^3}.$$

Здесь  $h_i = R_0/r_i$ ,  $h_j = R_0/r_j$ .  $\alpha_{ij}$  – угол между векторами  $x_i$  и  $x_j$ . Предполагаем, что вектор  $x_i$  параллелен оси  $Oz$ , а вектор  $x_j$  лежит в плоскости  $zOx$  (мы всегда так можем выбрать систему координат). Тогда указанные векторы будут иметь координаты

$$x_i = (r_i, 0, 0) \quad \text{и} \quad x_j = (r_j \sin \alpha_{ij}, 0, r_j \cos \alpha_{ij}).$$

Функция  $F(\varphi, k)$  – это эллиптический интеграл I рода.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением представления элементов аномального гравитационного поля в региональном и глобальном масштабах в виде потенциала простого слоя. Элементы матрицы системы (1.9) принимают тогда вид

$$a_{ij} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} F(2 \arctg(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{0.5(1 + \cos \alpha_{ij})}). \tag{1.10}$$

Покажем, что в размерности 2 СЛАУ не вырождена.

Для этого выпишем явное выражение для элементов матрицы (1.10):

$$a_{ij} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \frac{dh}{\sqrt{h} \sqrt{1 - 2h \cos \alpha_{ij} + h^2}}. \tag{1.11}$$

Для того чтобы матрица системы (1.8) с элементами (1.10) или (1.11) была вырождена, достаточно, чтобы какие-либо две строки этой матрицы были пропорциональны. Пусть это будут строки с номерами  $i$  и  $j$ . Покажем, что если соответствующие этим индексам точки наблюдения различны, то пропорциональность не может иметь места. Сначала докажем следующие две леммы.

**Лемма 1.** Для произвольной непрерывно дифференцируемой на отрезке  $[c, d]$ ,  $0 < c < d$ , функции  $F(y)$ , не обращающейся в нуль на этом отрезке вместе со своей производной, строго возрастающей и логарифмически выпуклой вниз, для любых  $a, b \in [c, d]$ ,  $0 < a < b$ , выполняется неравенство

$$F(a)F(b) \geq [F(\sqrt{ab})]^2. \tag{1.12}$$

**Доказательство.** Введем вспомогательную переменную  $x$  и рассмотрим выражение

$$\Phi(x) = F(a/x)F(bx).$$

Будем считать, что переменная  $x$  меняется таким образом, что аргумент функции  $F(a/x)$  или  $F(bx)$  лежит на отрезке  $[c, d]$ .

Вычислим производную функции  $\Phi(x)$  и приравняем ее нулю:

$$\Phi'(x) = -\frac{a}{x^2} F'(a/x)F(bx) + bF(a/x)F'(bx) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{a F'(a/x)F(bx)}{b F(a/x)F'(bx)}. \tag{1.13}$$

Легко видеть, что при  $x^2 = a/b$  аргументы функций в числителе и знаменателе (1.13) совпадают и равны  $\sqrt{ab}$ . При этом производная функции  $\Phi(x)$  в точке  $x = \sqrt{ab}$  равна нулю. Следовательно, эта функция достигает в указанной точке экстремума. Для логарифмически выпуклой вниз функции это — минимум.

В самом деле, вторая производная от логарифма такой функции положительна:

$$\ln(F(x))'' = \left(\frac{F'(x)}{F(x)}\right)' > 0.$$

Если  $x = \sqrt{a/b}$ ,  $a < b$ , то  $x$  меньше единицы, а при  $x = 1$  будем иметь  $\Phi'(1) = -aF'(a)F(b) + bF(a)F'(b) > 0$  для логарифмически выпуклой вниз функции  $F(x)$  при  $b > a$ . На отрезке  $[\sqrt{a/b}, 1]$  производная функции  $\Phi'(x)$  также положительна вследствие логарифмической выпуклости функции  $F(x)$ .

**Лемма 2.** Для любой функции  $F(x)$ , представляющейся на отрезке  $[c, d]$ ,  $0 < c < d$ , абсолютно сходящимся степенным рядом с положительными коэффициентами, справедливо неравенство (1.12) при любых  $a, b \in [c, d]$ ,  $0 < a < b$ .

**Доказательство.** Выпишем неравенство (1.12) для частичных сумм соответствующих степенных рядов и учтем тот факт, что произведение абсолютно сходящихся степенных рядов есть абсолютно сходящийся степенной ряд:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad F(y) = \sum_{k=0}^n a_k y^k,$$

$$F(x)F(y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_i a_k x^i y^k \geq \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n a_i a_k (\sqrt{xy})^{i+k} = (F(\sqrt{xy}))^2,$$

так как  $a_i a_k (x^i y^k + x^k y^i) \geq 2a_i a_k (x^{i+k/2} y^{i+k/2})$ ,  $i, k = 0, \dots, n$ .

Устремим теперь  $n \rightarrow \infty$  и получим требуемое утверждение при  $x = a$  и  $y = b$ .

Теперь перейдем к доказательству невырожденности системы (1.8)–(1.10). Нам нужно убедиться в том, что

$$a_{ii} a_{jj} \geq (a_{ij})^2, \tag{1.14}$$

причем знак равенства имеет место лишь в случае совпадения двух точек наблюдения. Рассмотрим неравенство (1.14):

$$a_{ii} a_{jj} = \frac{4\pi^2}{h_i^2 h_j^2 r_i^2 r_j^2} \int_0^{h_i} \int_0^{h_j} \frac{dx dy}{\sqrt{xy(1-x)(1-y)}},$$

$$a_{ij}^2 = \frac{4\pi^2}{h_i^2 h_j^2 r_i^2 r_j^2} \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \frac{dx dy}{\sqrt{xy} \sqrt{1 - 2h_i \cos \alpha_{ij} + h_i^2} \sqrt{1 - 2h_j \cos \alpha_{ij} + h_j^2}}, \tag{1.15}$$

$$a_{ii} a_{jj} \geq a_{ij}^2 \Rightarrow \int_0^{h_i} \int_0^{h_j} \frac{dx dy}{\sqrt{xy(1-x)(1-y)}} \geq \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \frac{dx dy}{\sqrt{xy} \sqrt{1 - 2h_i \cos \alpha_{ij} + h_i^2} \sqrt{1 - 2h_j \cos \alpha_{ij} + h_j^2}}.$$

Надо доказать, что строгое неравенство в формуле (1.15) выполняется всегда, если  $\cos \alpha_{ij} \neq 1$ . Подынтегральная функция в левой части (1.15) в каждой точке по  $(x, y)$  больше подынтегральной функции в правой части, если точки наблюдения не совпадают ( $\cos \alpha_{ij} \neq 1$ ,  $h_i \neq h_j$ ). По этой причине мы можем оценить интегралы только одной из этих функций (соответствующей произведению диагональных элементов) по двум областям. Но интеграл в левой части (1.15) вычисляется в явном виде:

$$\int_0^{h_i} \int_0^{h_j} \frac{dx dy}{\sqrt{xy(1-x)(1-y)}} = \ln\left(\frac{1+h_i}{1-h_i}\right) \ln\left(\frac{1+h_j}{1-h_j}\right),$$

$$\int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \int_0^{\sqrt{h_i h_j}} \frac{dx dy}{\sqrt{xy(1-x)(1-y)}} = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{h_i h_j}}{1 - \sqrt{h_i h_j}} \right)^2.$$

Положим теперь  $F(x) = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  и применим лемму 1 или лемму 2. Получим требуемое утверждение. Таким образом, доказана следующая

**Теорема 1.** Система (1.8)–(1.10) не вырождена в размерности 2, если точки наблюдения различны.

Рассмотрим теперь случай двойного слоя. Элементы матрицы тогда выражаются формулой

$$a_{ij} = \frac{2\pi}{(h_i h_j)^{1/2} r_i r_j} F(2 \arctg(\sqrt{h_i h_j}), \sqrt{0.5(1 + \cos \alpha_{ij})}) - \frac{\pi(3(h_i h_j)^2 - 4h_i h_j \cos \alpha_{ij} + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos \alpha_{ij}} + (h_i h_j)^2)^3}. \quad (1.16)$$

Попробуем оценить второе слагаемое в (1.16). Заметим сначала, что при выполнении условия

$$\frac{1}{3} \leq h_i h_j < 1 \quad (1.17)$$

числитель второго слагаемого в (1.16) всегда неотрицателен.

Числитель  $-\frac{\pi(3(h_i h_j)^2 - 4h_i h_j \cos \alpha_{ij} + 1)}{r_i^2 r_j^2 h_i h_j (\sqrt{1 - 2h_i h_j \cos \alpha_{ij}} + (h_i h_j)^2)^3}$  меньше для внедиагональных элементов (когда  $\cos \alpha_{ij} \neq 1$  или  $h_i \neq h_j$ ), а знаменатель — соответственно, больше, чем у диагональных: вычитается большее по модулю число. Поскольку для любых четырех положительных чисел  $a_1, a_2, b_1, b_2$ , удовлетворяющих условиям  $a_1 a_2 \geq a^2$ ,  $b_1 b_2 \geq b^2$ , где  $a$  и  $b$  — также положительные заданные числа, справедливо неравенство

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \geq (a + b)^2, \quad (1.18)$$

то верна следующая

**Теорема 2.** Система (1.8), (1.16) не вырождена в размерности 2, если координаты точек наблюдения не совпадают.

**Замечание.** Точки наблюдения могут иметь одинаковые угловые координаты, но тогда они должны находиться на разных расстояниях от начала координат. Неравенство (1.18) доказывается элементарно. В самом деле,

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \geq a_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2,$$

так как  $a_1 b_2 + a_2 b_1 \geq 2\sqrt{a_1 a_2 b_1 b_2} \geq 2ab$ .

## 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТОМЕТРИИ

Обратные задачи магниторазведки (особенно нелинейные, когда требуется определить не только плотность распределения источников аномального магнитного поля, но и локализовать носители масс) являются весьма сложными и требуют применения различных регулирующих алгоритмов (см. [8–11]). В настоящей статье мы ограничимся исследованием парамагнитных сред, когда зависимость вектора намагниченности от напряженности внешнего магнитного поля считается линейной. Для ферромагнетиков интегральные уравнения, связывающие результаты наблюдений (компоненты вектора магнитной индукции) и свойства среды, будут нелинейными, и для анализа однозначной разрешимости таких постановок требуется несколько иной математический аппарат.

Мы полагаем, что для магнитной индукции имеет место следующее интегральное представление (см. [8, 9]):

$$\bar{B}(\bar{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V K(\bar{r}_s, \bar{r}) M(\bar{r}) dv, \quad \bar{r} = (r, \vartheta, \phi); \quad \bar{r}_s = (r_s, \vartheta_s, \phi_s),$$

$$K(\bar{r}_s, \bar{r}) = \frac{1}{\rho^5} \begin{bmatrix} 2\rho_r^2 - \rho_\vartheta^2 - \rho_\phi^2 & 3\rho_r\rho_\vartheta & 3\rho_r\rho_\phi \\ 3\rho_r\rho_\vartheta & 2\rho_\vartheta^2 - \rho_r^2 - \rho_\phi^2 & 3\rho_\vartheta\rho_\phi \\ 3\rho_r\rho_\phi & 3\rho_\vartheta\rho_\phi & 2\rho_\phi^2 - \rho_r^2 - \rho_\vartheta^2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\bar{\rho} = \bar{r} - \bar{r}_s, \quad \rho \equiv |\bar{r} - \bar{r}_s|.$$

Здесь  $\bar{r}_s$  – радиус-вектор точки наблюдения  $P_s$  в сферической системе координат,  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки внутри носителя  $V$ ,  $\bar{B}(\bar{r}_s)$  – магнитная индукция в системе СИ, измеренная в точке, характеризующейся радиус-вектором  $\bar{r}_s$ ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная в системе СИ. Через  $K(\bar{r}_s, \bar{r})$  обозначена матричная функция координат точки наблюдения и точки, принадлежащей носителю,  $M(\bar{r})$  – вектор-функция, характеризующая намагниченность среды. В отличие от локального варианта, сферическая система координат фиксирована и связана с общеземной, в противном случае результаты наблюдений магнитного поля в разных точках планеты не были бы согласованы. Начало координат расположено в центре Земли. Необходимо также подчеркнуть, всюду в данном разделе статьи предполагается, что компоненты вектора магнитной индукции измеряются в точке наблюдения, с которой связан репер криволинейной системы координат, гладко зависящий от координат этой точки. Фактически, мы имеем дело с некоторым расслоением реперов. Поменять местами магнитные диполи и точки наблюдения нельзя, в отличие от локального случая, когда все измерения выполняются в некоторой декартовой системе координат и базисные векторы зафиксированы в пространстве.

Поле, создаваемое одним магнитным диполем, выражается формулой

$$B(\bar{r}_s) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\bar{m}, \bar{r} - \bar{r}_s)(\bar{r} - \bar{r}_s) - \rho^2 \bar{m}}{\rho^5}. \quad (2.2)$$

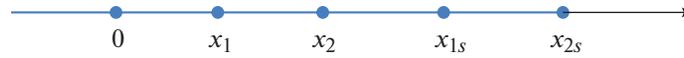
В (2.2) приняты такие же обозначения, что и в (2.1). Через  $\bar{m} = (m_r, m_\vartheta, m_\phi)^T$  обозначен магнитный момент точечного диполя в указанной сферической системе координат. Как и в локальном случае, установим в точках наблюдения условные “сенсоры”. В результате дискретизации интегрального представления (2.1) мы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta} + m_{i\phi}\rho_{ki,\phi}\}\rho_{ki,r} - \frac{m_{ir}}{\rho_{ki}^3}}{\rho_{ki}^5} \right) &= B_{kr}, \\ \sum_{i=1}^M \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta} + m_{i\phi}\rho_{ki,\phi}\}\rho_{ki,\vartheta} - \frac{m_{i\vartheta}}{\rho_{ki}^3}}{\rho_{ki}^5} \right) &= B_{k\vartheta}, \\ \sum_{i=1}^M \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta} + m_{i\phi}\rho_{ki,\phi}\}\rho_{ki,\phi} - \frac{m_{i\phi}}{\rho_{ki}^3}}{\rho_{ki}^5} \right) &= B_{k\phi}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В общем случае число сенсоров  $N$  не совпадает с числом неизвестных дипольных моментов  $M$ . В (2.3) через  $\rho_{ki}$  обозначено расстояние между  $k$ -м сенсором и  $i$ -м диполем, а через  $\bar{\rho}_{ki} = (\rho_{ki,r}, \rho_{ki,\vartheta}, \rho_{ki,\phi})$  – вектор, соединяющий  $k$ -й сенсор с  $i$ -м диполем с компонентами в сферической системе координат,  $\bar{m}_i = (m_{ir}, m_{i\vartheta}, m_{i\phi})^T$  – магнитный момент  $i$ -го диполя в сферической системе координат.

Система (3) имеет блочный вид

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \\ \dots \\ \bar{m}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \dots \\ \bar{B}_N \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$



Фиг. 1. Расположение двух сенсоров и двух магнитных диполей. Диполи не разделяют сенсоры.

где блок  $K_{il}$  соответствует  $i$ -му сенсору и  $l$ -му диполю,  $\bar{m}_i$  – вектор компонент  $i$ -го диполя,  $\bar{B}_l$  – вектор-функция, измеренная в  $l$ -м сенсоре:

$$K_{il} = \begin{bmatrix} \frac{2\rho_{il,r}^2 - \rho_{il,\vartheta}^2 - \rho_{il,\varphi}^2}{\rho_{il}^5} & \frac{3\rho_{il,r}\rho_{il,\vartheta}}{\rho_{il}^5} & \frac{3\rho_{il,r}\rho_{il,\varphi}}{\rho_{il}^5} \\ \frac{3\rho_{il,\vartheta}\rho_{il,r}}{\rho_{il}^5} & \frac{2\rho_{il,\vartheta}^2 - \rho_{il,r}^2 - \rho_{il,\varphi}^2}{\rho_{il}^5} & \frac{3\rho_{il,\vartheta}\rho_{il,\varphi}}{\rho_{il}^5} \\ \frac{3\rho_{il,\varphi}\rho_{il,r}}{\rho_{il}^5} & \frac{3\rho_{il,\varphi}\rho_{il,\vartheta}}{\rho_{il}^5} & \frac{2\rho_{il,\varphi}^2 - \rho_{il,\vartheta}^2 - \rho_{il,r}^2}{\rho_{il}^5} \end{bmatrix}, \quad \rho_{il} = |\bar{r}_i - \bar{r}_l| = \rho_{il,r}. \quad (2.5)$$

Попытаемся выяснить, по аналогии с рассмотренными нами ранее в локальном варианте, условия однозначной разрешимости системы (2.4).

2.1. Два диполя и  $N$  сенсоров, расположенных на одной прямой, проходящей через начало координат

Пусть и сенсоры, и диполи располагаются на одной прямой  $OX$ , проходящей через центр фиксированной сферической системы координат. Координаты диполей обозначим через  $x_1, x_2$ , а координаты сенсоров – через  $x_1^s, x_2^s$ . Предположим сначала, что диполи и сенсоры не разделяют друг друга (см. фиг. 1). В начале координат не могут находиться ни сенсоры, ни диполи ввиду неоднозначности задания координат в указанной точке.

Система (2.4) принимает тогда вид

$$A_{22}\bar{x} = \bar{B}_2, \quad (2.6)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r_{11}^3} & 0 & 0 & \frac{2}{r_{12}^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_{11}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} \\ \frac{2}{r_{21}^3} & 0 & 0 & \frac{2}{r_{22}^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r_{21}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r_{12}^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{r_{22}^3} \end{bmatrix},$$

$$r_{11} = |x_1 - x_{1s}|, \quad r_{12} = |x_1 - x_{2s}|, \quad r_{21} = |x_2 - x_{1s}|, \quad r_{22} = |x_2 - x_{2s}|, \quad (2.7)$$

$$\bar{B}_2 = \begin{pmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \\ B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} m_{1x} \\ m_{1y} \\ m_{1z} \\ m_{2x} \\ m_{2y} \\ m_{2z} \end{pmatrix}.$$



Фиг. 2. Расположение двух сенсоров и двух магнитных диполей. Диполи разделяют сенсоры.

Переобозначим элементы в матрице системы (2.7):

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Для того чтобы детерминант матрицы (2.8) был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы координаты сенсоров совпадали (при различных координатах диполей):

$$\begin{aligned} \det A = 0 &\Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a_{ij} = -2b_{ij} &\Rightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 0 \Leftrightarrow (x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_{2s} - x_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1s}(x_1 - x_2) = x_{2s}(x_1 - x_2) \Rightarrow (x_{1s} - x_{2s})(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, нами доказана следующая

**Теорема 3.** *Решение системы (2.4) единственно, если два сенсора и два диполя расположены в различных точках на одной и той же прямой, проходящей через начало координат фиксированной сферической системы. Диполи и сенсоры при этом не “разделяют друг друга”.*

Рассмотрим теперь случай, когда в начале координат расположен первый диполь, затем идет второй сенсор, потом – второй диполь, и последний – первый сенсор (см. фиг. 2). В этом случае для равенства нулю детерминанта матрицы получаем равенство

$$x_{1s}x_{2s} + x_1x_2 = 0.5(x_2 + x_1)(x_{1s} + x_{2s}).$$

Если координаты диполей связаны с координатами сенсоров данным соотношением, то получим, что в таком случае система уравнений вырождена, и компоненты двух диполей определить однозначно нельзя.

**Замечание.** Можно, безусловно, рассмотреть сразу общий случай расположения диполей. Детерминант обращается в нуль при выполнении либо условия

$$(x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_{2s} - x_1),$$

что соответствует случаю “неразделенных” диполей, либо условия

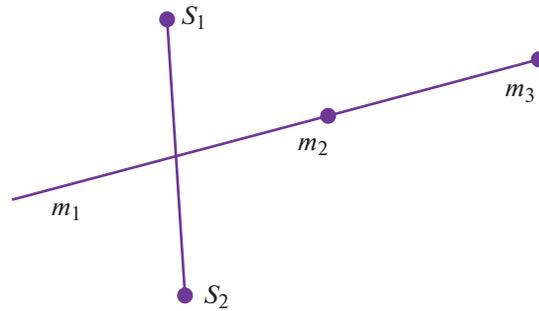
$$(x_{1s} - x_1)(x_{2s} - x_2) = (x_{1s} - x_2)(x_1 - x_{2s}),$$

и в последнем случае система уравнений может быть вырождена.

### 2.2. *N* диполей и *N* сенсоров, расположенных в одной вертикальной плоскости, проходящей через ось *OZ*

Рассмотрим теперь случай, когда у всех векторов, соединяющих диполи и сенсоры, отсутствует компонента вдоль  $\bar{e}_\varphi$ .

Пусть требуется определить компоненты *N* магнитных диполей  $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_N$  по измеренным в *N* произвольных точках некоторой вертикальной плоскости, содержащей ось *OZ*, трем компонентам вектора магнитной индукции (т.е. известным векторам  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_N$ ). Принимая во внимание особенности сферической системы координат, здесь и далее будем предполагать, что сенсоры не размещаются вдоль оси *OZ*, а также что ни сенсоры, ни диполи не находятся в начале координат выбранной нами (фиксированной) сферической системы координат.



Фиг. 3. Расположение сенсоров и магнитных диполей в вертикальной плоскости.

Система уравнений (21) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta}\}\rho_{ki,r}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{ir}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{kr},$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta}\}\rho_{ki,\vartheta}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{i\vartheta}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{k\vartheta},$$

$$\sum_{i=1}^N \left( -\frac{m_{i\varphi}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{k\varphi}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Если для каких-либо двух индексов  $k$  и  $l$  справедливы соотношения

$$\rho_{ki} = \rho_{li}, \quad i = 1, \dots, N,$$

то две строки в (2.10) будут совпадать (в  $k$ -м и  $l$ -м блоках для соответствующих сенсоров):

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho_{k1}^3}; & 0 & -\frac{1}{\rho_{k2}^3}; & \dots; & 0 & -\frac{1}{\rho_{kN}^3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_{l1}^3}; & 0 & -\frac{1}{\rho_{l2}^3}; & \dots; & 0 & -\frac{1}{\rho_{lN}^3} & 0 \end{bmatrix}.$$

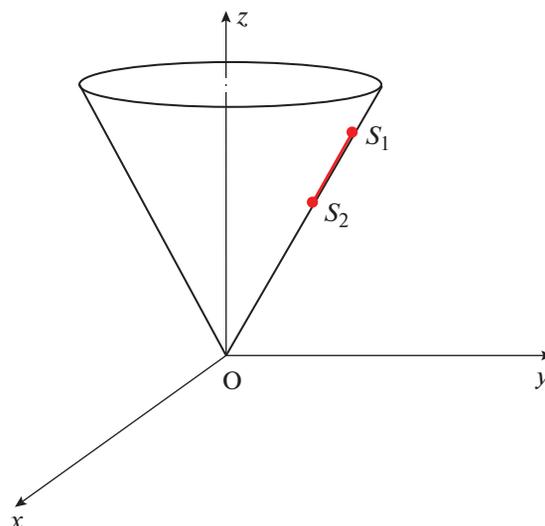
Такая ситуация может возникнуть в том случае, когда какие-либо два сенсора расположены симметрично относительно прямой, на которой лежат магнитные диполи (см. фиг. 3).

Таким образом, нами доказана аналогичная локальному варианту

**Теорема 4.** Если все сенсоры и диполи расположены в вертикальной плоскости, проходящей через ось  $OZ$ , все диполи лежат на одной прямой и для каких-то двух сенсоров имеет место ситуация, изображенная на фиг. 3, то решение системы (2.10) определяется неоднозначно.

### 2.3. Случай $N$ диполей на оси $OZ$ и $N$ сенсоров, расположенных в произвольных точках

Рассмотрим постановку обратной задачи по поиску компонент  $N$  магнитных диполей, которые находятся в точках вертикальной оси  $OZ$  (за исключением начала координат), по информации от  $N$  сенсоров, расположение которых более-менее произвольно. Из изложенного в п. 2.2 настоящего раздела следует, что если для каких-либо двух сенсоров выполняются условия теоремы 4, то решение системы уравнений (2.4) определяется неоднозначно. В частности, если какие-либо два из  $N$  сенсоров лежат на окружности произвольного радиуса с центром на  $OZ$ , а сама окружность расположена в горизонтальной плоскости. Тогда радиус-векторы, соединяющие эти два сенсора с каждым из диполей, имеют нулевую компоненту вдоль  $\vec{e}_\varphi$ , и строки матрицы системы (2.4), соответствующие указанным двум сенсорам, “выглядят” так же, как в (2.12), поскольку расстояния от выделенных сенсоров до диполя с произвольным номером  $l$  одинаковы. Таким образом, для рассмотренного варианта взаимного расположения диполей и сенсоров будет справедлив аналог теоремы 4.



Фиг. 4. Расположение сенсоров и магнитных диполей в плоскости, касательной к конусу  $\vartheta = \text{const}$ .

2.4. Случай  $N$  диполей и  $N$  сенсоров, расположенных в касательной плоскости к конусу  $\vartheta = \text{const}$

Перейдем теперь к изучению случая, когда сенсоры располагаются вдоль образующей конуса  $\vartheta = \text{const}$ . Диполи при этом должны лежать в касательной плоскости к конусу, содержащей указанную образующую (фиг. 4).

При таком расположении диполей и сенсоров у радиус-векторов, соединяющих диполи и сенсоры, будет отсутствовать компонента  $\bar{e}_\vartheta$ .

Система уравнений (21) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta}\}\rho_{ki,r}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{ir}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{kr}, \quad \sum_{i=1}^N \left( -\frac{m_{i\vartheta}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{k\vartheta},$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{3\{m_{ir}\rho_{ki,r} + m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta}\}\rho_{ki,\vartheta}}{\rho_{ki}^5} - \frac{m_{i\vartheta}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{k\varphi}, \quad k = 1, \dots, N. \tag{2.13}$$

Если диполи лежат на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему какие-то два сенсора, то опять мы оказываемся в ситуации, когда две строки матрицы системы (2.13) совпадают, поскольку имеют вид (2.12).

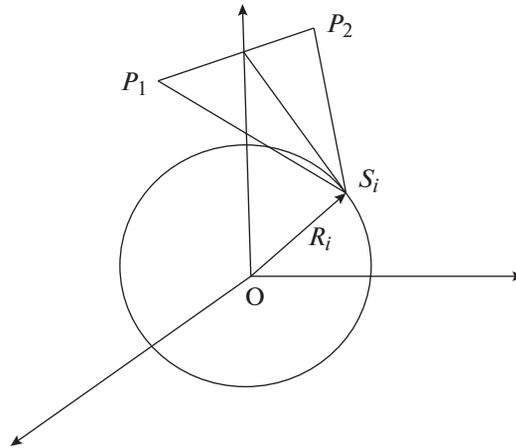
Следовательно, верна следующая

**Теорема 5.** При расположении  $N$  сенсоров и  $N$  диполей в касательной плоскости к какому-либо конусу  $\vartheta = \text{const}$  и выполнении следующего условия: диполи лежат на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему какие-либо два сенсора, решение системы (2.13) определяется неоднозначно.

2.5. Случай двух диполей и  $N$  сенсоров, произвольным образом расположенных в пространстве

Рассмотрим, наконец, проблему интерпретации магнитометрических данных по информации от  $N$  сенсоров, расположенных в пространстве произвольным образом. В каком случае возможно вырождение системы (2.4) из-за обращения в нуль компоненты радиус-векторов  $\bar{\rho}_{ki} = (\rho_{ki,r}, \rho_{ki,\vartheta}, \rho_{ki,\varphi})$  вдоль  $\bar{e}_r$ ?

Пусть у нас два каких-либо диполя расположены в точках  $P_1, P_2$  (см. фиг. 5): на некоторой прямой, параллельной плоскости  $XOY$ , и симметрично относительно оси  $OZ$ . Предположим также, что касательная плоскость в точке сферы, на которой расположен один из сенсоров, проходит через эти два магнитных диполя (фиг. 5). В этом случае радиус-вектор сенсора  $S_1$ , как легко видеть, перпендикулярен указанной касательной плоскости, а векторы, соединяющие два диполя



Фиг. 5. Случай двух диполей и  $N$  сенсоров, произвольным образом расположенных в пространстве.

с этим сенсором, не имеют компоненты  $\bar{e}_r$  и равны по модулю. Система (2.4) модифицируется и имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^2 \left( -\frac{m_{ir}}{\rho_{ki}^3} \right) = B_{kr}, \quad \sum_{i=1}^2 \left( \frac{3\{m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta} + m_{i\varphi}\rho_{ki,\varphi}\}\rho_{ki,\vartheta} - \frac{m_{i\vartheta}}{\rho_{ki}^3}}{\rho_{ki}^5} \right) = B_{k\vartheta}, \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left( \frac{3\{m_{i\vartheta}\rho_{ki,\vartheta} + m_{i\varphi}\rho_{ki,\varphi}\}\rho_{ki,\varphi} - \frac{m_{i\varphi}}{\rho_{ki}^3}}{\rho_{ki}^5} \right) = B_{k\varphi}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Если все  $N$  сенсоров расположены подобным образом по отношению к выделенным двум диполям, то мы снова оказываемся в ситуации, аналогичной описанной выше, а именно, система (31) вырождается, поскольку, по крайней мере, две ее строки пропорциональны:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho_{k1}^3} & 0; & 0 & -\frac{1}{\rho_{k2}^3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_{l1}^3} & 0; & 0 & -\frac{1}{\rho_{l2}^3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_{k1} = \rho_{k2}; \quad \rho_{l1} = \rho_{l2}. \quad (2.15)$$

Таким образом, нами доказана следующая

**Теорема 6.** Если два диполя расположены в произвольной горизонтальной плоскости симметрично относительно оси  $OZ$  и одновременно на всех касательных плоскостях к сферам, на которых находятся  $N$  сенсоров, то система (2.14) вырождена.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в настоящей работе примеры вырожденных и невырожденных систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются многие геофизические задачи интерпретационного характера, могут быть полезны при планировании эксперимента, выборе оптимальной сети пунктов наблюдений при проведении гравиметрической или магнитометрической съемки. Перспективным представляется подход к решению обратных геофизических и геодезических задач, при котором координаты как источников, так и точек наблюдения рассматриваются “единым блоком” — возникает необходимость исследования свойств некоторой расширенной системы нелинейных уравнений, элементы которой являются сечениями некоторого гладкого расслоения.

Метод  $S$ -аппроксимаций является весьма простым и эффективным методом решения линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии и может применяться также для поиска нулевого или первого приближения к решению нелинейной обратной задачи по определению геометрии и местоположения источника аномального гравитационного или магнитного поля. При решении такого типа задач необходимо применение регуляризирующих алгоритмов (см. [10, 11]). Постановки, приведенные в разд. 2 настоящей статьи, могут быть рассмотрены и в рамках

метода линейных интегральных представлений: в случае магнитного поля вид линейных функционалов (1) изменится, но не кардинальным образом.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные рекомендации и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-41-00002).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
2. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физика Земли. 2002. № 2. С. 3–19.
3. *Степанова И.Э.* Апробация методики S-аппроксимаций на материалах детальной гравиметрической и магнитометрических съемок // Геофиз. журнал. 2007. Т. 28. № 1. С. 97–105.
4. *Stepanova I.E.* On the S-approximation of the Earth's gravity field. Regional version // Inverse Problem. Sci. and Engineer. 2009. V 17. № 8. P. 1095–1111.
5. *Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov A.V.* Density anomalies in subsurface layers of mars: model estimates for the site of the InSight mission seismometer // Solar System Res. 2020. V. 54. P. 15–19.
6. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 767 с.
7. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.—Л.: Гостоптехиздат, 1950.
8. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // Eurasian J. Math. and Comp. Appl. 2016. V. 4. № 3. P. 4–14.
9. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., et al.* Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations // J. of Imaging. 2021. V. 7. № 11. P. 234.
10. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
11. *Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. 214 с.