

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

ВЛИЯНИЕ ДЕМПФИРОВАНИЯ ПОДАТЛИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА НЕВЯЗКУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НАД НЕЙ

© 2023 г. И. В. Савенков^{1,*}

¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: isavenkov@mail.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.
Переработанный вариант 14.05.2023 г.
Принята к публикации 29.05.2023 г.

В рамках асимптотической теории свободного взаимодействия изучена неустойчивость несжимаемого пограничного слоя над податливой пластиной по отношению к невязким возмущениям в пределе высоких чисел Рейнольдса. Показано, что неустойчивые невязкие возмущения могут существовать только при учете инерционности и/или демпфирования пластины. Выявлена двоякая роль демпфирования: при одних условиях она приводит к подавлению неустойчивости, при других — к ее возникновению. Библ. 18. Фиг. 6.

Ключевые слова: несжимаемый пограничный слой, неустойчивость, волны Толлмина—Шлихтинга, податливая поверхность, инерционность, демпфирование, изгибная жесткость, продольное натяжение, асимптотические разложения, теория свободного взаимодействия.

DOI: 10.31857/S0044466923090144, EDN: SGZLHK

ВВЕДЕНИЕ

Податливые поверхности стали объектом довольно пристального внимания с ранних экспериментов (см. [1]), в которых было показано, что значительное затягивание процесса ламинарно-турбулентного перехода может быть достигнуто путем замены жесткой поверхности на деформируемую. Последовавшие исследования в рамках линейной теории устойчивости (см., например, [2–5]) показали, что инкременты нарастания неустойчивых волн в пограничном слое на податливой поверхности действительно могут быть меньше, чем на жесткой поверхности.

Несмотря на прогресс, достигнутый к настоящему времени (см. [6–9] и ссылки в них), остается немало вопросов из-за сложности уравнений, описывающих взаимодействие течения с податливой поверхностью. Первая сложность вызвана тем, что характерные числа Рейнольдса, при которых происходит ламинарно-турбулентный переход, довольно высоки, так что в уравнениях движения появляется малый параметр при старшей производной. Вторая сложность связана с большим числом параметров, характеризующим свойства податливой поверхности, к числу которых относятся ее инерционность, демпфирование, упругость, продольное натяжение и изгибная жесткость, так что трудно выявить характерные закономерности при таком обилии параметров.

Первую сложность можно преодолеть, используя концепцию свободно взаимодействующего пограничного слоя (см. [10–12]), справедливую при высоких числах Рейнольдса. Чтобы обойти вторую сложность, можно зафиксировать все параметры податливой поверхности (или пренебречь некоторыми из них), кроме одного, и смотреть, как течение реагирует на изменение этого параметра. В рамках такого подхода в ряде работ и изучалась неустойчивость несжимаемого пограничного слоя на базе концепции свободного взаимодействия (см. [13–17]). Настоящая работа является дальнейшим развитием [17].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерное обтекание податливой пластины равномерным потоком несжимаемой жидкости плотности ρ_∞^* и вязкости μ_∞^* со скоростью U_∞^* . Введем ортогональную систему ко-

ординат, поместив ее начало на некотором расстоянии L^* от передней кромки и направив ось x^* вниз по потоку. Введем малый параметр $\varepsilon = R^{-1/8}$, считая число Рейнольдса $R = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^*$ очень большим. Здесь и далее звездочками вверху обозначаются размерные величины.

Пусть на пластину локально воздействует внешнее давление $\Delta p^* \sim \delta^2 \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ на участке $\Delta x^* \sim \varepsilon^4 / \delta L^*$ с характерным временем $\Delta t^* \sim \varepsilon^4 / \delta^2 L^* / U_\infty^*$, вызывая локальные деформации стенки высотой $\Delta y^* \sim \varepsilon^4 \delta L^*$, где малый параметр δ таков, что $\varepsilon \ll \delta \ll 1$. Тогда возмущенное движение можно описать с помощью концепции свободного взаимодействия (см. [10–12]), развитой применительно к локально-невязким возмущениям (см., например, [18]). Согласно этой теории, вся область течения разбивается на следующие четыре характерные области.

1.1. Основная толщина пограничного слоя

В основной толще пограничного слоя, т.е. на расстояниях $y^* = R^{-1/2} L^* Y_m$ от стенки ($Y_m = O(1)$), течение в пограничном слое будет лишь слабовозмущенным:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = U_0 + \delta u_{1m} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^2 v_{1m} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1m} + \dots, \quad (1.1)$$

где $U_0(Y_m)$ — профиль продольной компоненты скорости основного течения и функции с индексами $1m$ зависят от безразмерных переменных

$$t = \frac{\delta^2 \varepsilon^{-4} U_\infty^{*2} t^*}{L^*}, \quad x = \delta \varepsilon^{-4} \frac{x^* - L^*}{L^*}, \quad Y_m = \frac{\varepsilon^{-4} y^*}{L^*}.$$

Время t и продольная координата x будут “сквозными” для всех областей взаимодействия, тогда как поперечная координата меняется при переходе между ними.

После подстановки (1.1) в уравнения Навье—Стокса и тривиального интегрирования имеем

$$u_{1m} = A_1(t, x) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial x} U_0(Y_m), \quad p_{1m} = p_{1m}(t, x), \quad (1.2)$$

где функции $A_1(t, x)$ и $p_{1m}(t, x)$ пока остаются произвольными. Заметим, что функция $A_1(t, x)$ имеет физический смысл мгновенного смещения линий тока в основной толще пограничного слоя.

1.2. Нелинейный слой

В силу предельного поведения, $U_0 = \lambda_1 Y_m + \dots$ ($\lambda_1 = \text{const}$) при $Y_m \rightarrow 0$, разложения (1.1) нарушаются вблизи стенки: при $Y_m = O(\delta)$ первые два слагаемых в разложении для u^* становятся величинами одного порядка. Поэтому в нижнем подслое с $Y_a = \delta^{-1} Y_m = \delta^{-1} \varepsilon^{-4} y^* / L^* \sim 1$ возмущения становятся нелинейными, а ряды (1.1) трансформируются в

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \delta u_{1a} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^3 v_{1a} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1a} + \dots, \quad (1.3)$$

где все функции с индексом $1a$ зависят от аргументов t, x, Y_a . Подстановка (1.3) в уравнения Навье—Стокса ведет к системе

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{\partial p_{1a}}{\partial x}, \quad (1.4)$$

в которой, в отличие от классической системы Прандтля, отсутствует член $\partial^2 u_{1a} / \partial Y_a^2$.

Сращивание разложений (1.1) и (1.3) с учетом решения (1.2) ведет к предельному условию

$$u_{1a} - \lambda_1 Y_a \rightarrow \lambda_1 A_1(t, x) \quad \text{при} \quad Y_a \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Если предположить, что пограничный слой был изначально невозмущенным, то можно выписать точное решение системы (1.4), удовлетворяющее граничному условию (1.5):

$$u_{1a} = \lambda_1 Y_a + \lambda_1 A_1(t, x), \quad v_{1a} = -\frac{\partial A_1}{\partial t} - \lambda_1 Y_a \frac{\partial A_1}{\partial x} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Учитывая условие непротекания на стенке

$$v^* = \frac{\partial F^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial F^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad Y^* = F^*(t^*, x^*) = \varepsilon^4 \delta L^* F_1(t, x),$$

преобразующееся в безразмерных переменных в

$$v_{1a} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + u_{1a} \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \text{при} \quad Y_a = F_1(t, x),$$

из (1.6) получаем одно уравнение движения:

$$\frac{\partial(A_1 + F_1)}{\partial t} + \lambda_1(A_1 + F_1) \frac{\partial(A_1 + F_1)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x}, \quad (1.7)$$

связывающее три неизвестные функции: $A_1(t, x)$, $p_{1a}(t, x)$ и $F_1(t, x)$.

1.3. Вязкий подслой

Нетрудно видеть, что решение (1.6) не удовлетворяет условиям прилипания на стенке (должно быть $u_{1a} = 0$ при $Y_a = 0$), из-за чего требуется ввести вязкий подслой со своими асимптотическими разложениями следующего вида:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = \delta u_{1l} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^3 \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + u_{1l} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) + \delta \varepsilon^2 v_{1l} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1l} + \dots,$$

где функции с нижним индексом $1l$ зависят от переменных t, x и $Y_l = \delta \varepsilon^{-6} (y^* - F^*)/L^*$. Подстановка этого разложения в уравнения Навье–Стокса ведет к классической системе Прандтля

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1l}}{\partial Y_l} &= 0, \quad \frac{\partial p_{1l}}{\partial Y_l} = 0, \\ \frac{\partial u_{1l}}{\partial t} + u_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x} + v_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial Y_l} &= -\frac{\partial p_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial Y_l^2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Сращивание разложений (1.3) и (1.8) дает

$$p_{1l}(t, x) = p_{1a}(t, x) \quad \text{и} \quad u_{1l}(t, x, Y_l) \rightarrow A_1 \quad \text{при} \quad Y_l \rightarrow \infty,$$

откуда видно, что в данном случае вязкий подслой играет пассивную роль: решение (1.8) с соответствующими граничными условиями ($u_{1l}(t, x, 0) = 0$, $v_{1l}(t, x, 0) = 0$) определяется после нахождения функций $A_1(t, x)$ и $p_{1a}(t, x)$. Мы оставляем в стороне вопросы существования и единственности полной нелинейной задачи, формулирующейся на базе уравнений (1.8), поскольку в дальнейшем будем изучать только линеаризованные уравнения.

1.4. Внешняя область

В этой области течения, примыкающей сверху к пограничному слою, введем следующие асимптотические разложения:

$$\frac{u^*}{U_\infty^*} = 1 + \delta^2 u_{1u} + \dots, \quad \frac{v^*}{U_\infty^*} = \delta^2 v_{1u} + \dots, \quad \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}} = \delta^2 p_{1u} + \dots, \quad (1.9)$$

с функциями, зависящими от t, x и $Y_u = \delta \varepsilon^{-4} y^*/L^*$.

Подстановка разложений (1.9) в уравнения Навье–Стокса ведет к уравнению Лапласа для давления

$$\partial^2 p_{lu} / \partial x^2 + \partial^2 p_{lu} / \partial Y_u^2 = 0 \quad (1.10)$$

со следующими зависимостями:

$$u_{lu} = -p_{lu}, \quad \partial v_{lu} / \partial x = -\partial p_{lu} / \partial Y_u. \quad (1.11)$$

Сращивание разложений (1.9) и (1.1) с учетом (1.10) и (1.11) дает так называемое условие свободного взаимодействия, связывающее давление $p_{la}(t, x)$ с функцией $A_1(t, x)$:

$$p_{la}(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_1(t, \xi) / \partial \xi}{x - \xi} d\xi. \quad (1.12)$$

1.5. Податливая поверхность

Будем считать, что податливая поверхность описывается моделью Крамера (см. [1]), тогда уравнение движения такой поверхности принимает следующий вид:

$$p^* - p_0^* = -K^* F^* + T^* \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^{*2}} - B^* \frac{\partial^4 F^*}{\partial x^{*4}} - \rho_s^* h_s^* \frac{\partial^2 F^*}{\partial t^{*2}} - d^* \frac{\partial F^*}{\partial t^*}, \quad (1.13)$$

где K^* , T^* , B^* , d^* , ρ_s^* и h_s^* — коэффициент упругости, продольное натяжение, изгибная жесткость, коэффициент демпфирования, плотность и толщина обтекаемой пластины соответственно, а p_0^* — внешнее давление под пластиной. С учетом этого уравнение движения пластины в безразмерных переменных принимает вид

$$\gamma_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} + d_1 \frac{\partial F_1}{\partial t} - \alpha_1 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} + K_1 F_1 = -p_{la}(t, x) + p_0(t, x), \quad (1.14)$$

где безразмерные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\gamma = \delta^3 \varepsilon^{-2} \frac{\rho_s^* h_s^*}{\rho_\infty^* L^*}, \quad d_1 = \delta^{-1} \varepsilon^2 \frac{d^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}, \quad \alpha_1 = \delta \varepsilon^{-4} \frac{T^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2} L^*},$$

$$\beta_1 = \delta^3 \varepsilon^{-12} \frac{B}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2} L^{*3}}, \quad K_1 = \delta^{-1} \varepsilon^4 \frac{K^* L^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}.$$

В дальнейшем будем считать их величинами порядка единицы.

Таким образом, мы получили три уравнения: (1.7), (1.12) и (1.14) для трех неизвестных функций F_1 , A_1 и p_{la} . Сделаем еще аффинное преобразование

$$t = \lambda_1^{-3/2} T, \quad x = \lambda_1^{-5/4} X, \quad A_1 = \lambda_1^{-3/4} A, \quad F_1 = \lambda_1^{-3/4} F, \quad p_{la} = \lambda_1^{1/2} P,$$

позволяющее избавиться от константы λ_1 , после чего эти уравнения принимают следующий вид:

$$\gamma \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} - \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \beta \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + KF = -(P(T, X) - P_0(T, X)),$$

$$\frac{\partial(A + F)}{\partial T} + (A + F) \frac{\partial(A + F)}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X}, \quad P(T, X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A(T, \xi) / \partial \xi}{X - \xi} d\xi, \quad (1.15)$$

где параметры $d = \lambda_1^{-3/2} d_1$, $\alpha = \lambda_1^{-1/2} \alpha_1$, $\beta = \lambda_1^2 \beta_1$ и $K = \lambda_1^{-3} K_1$.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Изучим собственные малые колебания течения, линеаризовав систему (1.15) по малому амплитудному параметру $\delta_1 \rightarrow 0$ и положив внешнее давление $P_0 = 0$:

$$(F, P, A) = \delta_1 (F', P', A'). \quad (2.1)$$

Выделив в явном виде гармоническую зависимость

$$(F', P', A') = (\bar{F}, \bar{P}, \bar{A}) \exp(\omega t + ikx),$$

получаем следующее уравнение относительно ω :

$$(\omega + k|k|)(\gamma\omega^2 + d\omega + \Lambda) - |k|\omega = 0,$$

где $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ зависит только от волнового числа k и является параметром, если рассматривать k в качестве параметра. Решения этого уравнения обладают свойством $\omega(-k) = c.c.\omega(k)$ (где *c.c.* означает операцию комплексного сопряжения), в силу чего достаточно ограничиться рассмотрением только диапазона $k \geq 0$. Полагая далее $k \geq 0$ и переходя для удобства к переменной $\omega_0 = i\omega$, получаем кубическое уравнение относительно ω_0 :

$$(\omega_0 - k^2)(\gamma\omega_0^2 + id\omega_0 - \Lambda) + k\omega_0 = 0. \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что при $d \neq 0$ корни уравнения (2.2) не могут быть вещественными, откуда следует, что при учете демпфирования в рассматриваемой системе не может быть нейтральных колебаний. Значит, каждый из трех корней уравнения (2.2) может быть только целиком (при всех k) устойчивым или целиком неустойчивым.

2.1. Безынерционная пластина

Начнем исследование неустойчивости с более простого случая, когда $\gamma = 0$, что соответствует безынерционной пластине. В этом случае уравнение (2.2) вырождается в квадратное уравнение

$$(\omega_0 - k^2)(id\omega_0 - \Lambda) + k\omega_0 = 0, \quad (2.3)$$

в котором без ограничения общности можно считать $d = 1$, поскольку от параметра d можно избавиться путем аффинного преобразования $\omega_0 \rightarrow d^{-2}\omega_0$, $k \rightarrow d^{-1}k$, $\Lambda \rightarrow d^{-1}\Lambda$, $K \rightarrow d^{-1}K$, $\alpha \rightarrow d\alpha$, $\beta \rightarrow d^3\beta$. Считая это преобразование выполненным, имеем два корня (2.3):

$$\omega_{0,\pm} = \frac{ik - i\Lambda + k^2 \pm i\sqrt{(ik^2 - k + \Lambda)^2 - 4i\Lambda k^2}}{2}, \quad (2.4)$$

где $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$.

Нетрудно получить следующие асимптотики корней (2.4):

– для $\beta \neq 0$:

$$\omega_{0,+} = k^2 + \frac{1}{\beta}k^{-1} + \frac{i-\alpha}{\beta^2}k^{-3} + \dots, \quad \omega_{0,-} = -i\beta k^4 + \dots \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty; \quad (2.5)$$

– для $\beta = 0$:

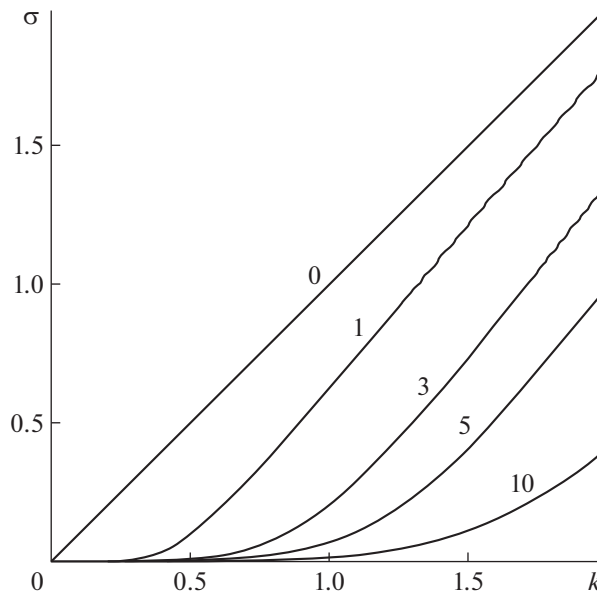
$$\omega_{0,+} = k^2 + \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}k + \dots, \quad \omega_{0,-} = -i\alpha k^2 + \dots \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Несмотря на разный характер поведения решения при $k \rightarrow \infty$, эти асимптотики объединяет одно: инкремент нарастания “плюсового” корня

$$(\sigma = \text{Im } \omega_{0,+} \sim \frac{1}{\beta^2}k^{-3} \text{ или } \sigma = \text{Im } \omega_{0,+} \sim \frac{1}{\alpha^2+1}k) \text{ положителен в пределе больших } k, \text{ а значит,}$$

этот корень неустойчив при всех k (как было отмечено ранее, все корни или целиком неустойчивы, или целиком устойчивы, поскольку нейтральных решений не существует). По этой же причине “минусовой” корень всегда устойчив (ведь $\text{Im } \omega_{0,-} \sim -\beta k^4 < 0$ или $\text{Im } \omega_{0,-} \sim -\alpha k^2$ в пределе больших k).

Таким образом, можно сразу сделать вывод общего характера: наличие демпфирования безынерционной пластины всегда ведет к появлению неустойчивости, причем единственный неустойчивый корень неустойчив во всем диапазоне волновых чисел k .



Фиг. 1.

Далее, асимптотика (2.6) говорит о том, что инкремент нарастания $\sigma \sim \frac{1}{\alpha^2 + 1}k$ может стать сколь угодно большим с увеличением k , если пренебречь изгибной жесткостью пластины ($\beta = 0$). Сказанное иллюстрируют зависимости инкремента нарастания σ от k при $\alpha = \beta = 0$ для ряда значений K , приведенные на фиг. 1. Видно, что σ довольно быстро выходит на свою линейную асимптотику (2.6). Учет продольного натяжения ($\alpha \neq 0$) может только уменьшить скорость этого роста, но не подавить линейную зависимость (см. фиг. 2 для ряда значений α при $K = 1, \beta = 0$). И только наличие изгибной жесткости радикально меняет ситуацию, уводя σ на алгебраическое затухание $\sim \frac{1}{\beta^2}k^{-3}$ в пределе больших k , согласно асимптотике (2.5). Насколько сильно подавляется неустойчивость уже при малых β , можно проследить по фиг. 3 для ряда значений β (при $K = 1, \alpha = 0$).

2.2. Общий случай

Рассмотрим общий случай инерционной пластины, когда $\gamma \neq 0$. Путем аффинного преобразования

$$\begin{aligned} \omega_0 &\rightarrow \gamma^{-2/3}\omega_0, & k &\rightarrow \gamma^{-1/3}k, & d &\rightarrow \gamma^{1/3}d, & \Lambda &\rightarrow \gamma^{-1/3}\Lambda, \\ K &\rightarrow \gamma^{-1/3}K, & \alpha &\rightarrow \gamma^{1/3}\alpha, & \beta &\rightarrow \gamma\beta \end{aligned} \quad (2.7)$$

можно избавиться от коэффициента γ в уравнении (2.2), которое тогда принимает вид

$$(\omega_0 - k^2)(\omega_0^2 + id\omega_0 - \Lambda) + k\omega_0 = 0. \quad (2.8)$$

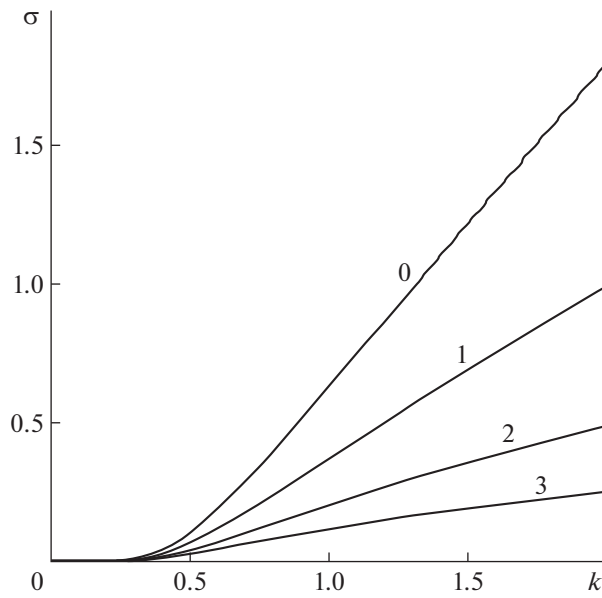
В дальнейшем будем считать такое преобразование выполненным и исследовать решения дисперсионного соотношения (2.8), представляющего собой кубическое уравнение.

Начнем изучение (2.8) с предельного случая волновых чисел k , стремящихся к бесконечности. В таком случае нетрудно получить следующие асимптотики дисперсионного соотношения (2.8).

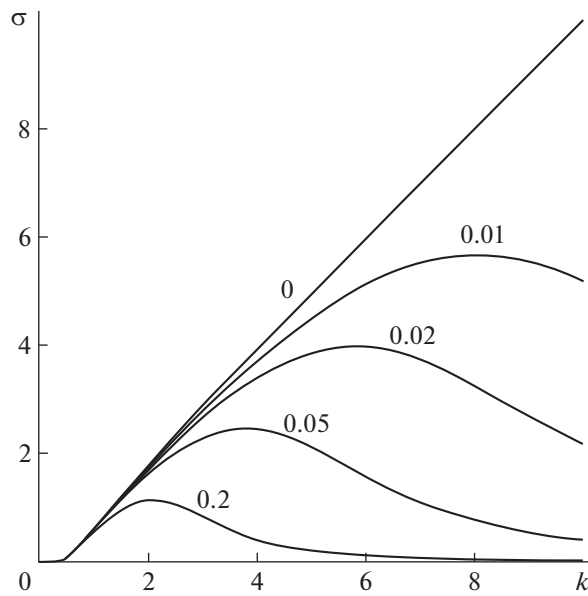
Для первого корня:

– при $\beta \neq 1$:

$$\omega_{0,1} = k^2 - \frac{1}{1-\beta}k + \frac{id - \alpha}{(1-\beta)^2}k^{-3} + \dots \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \quad (2.9)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

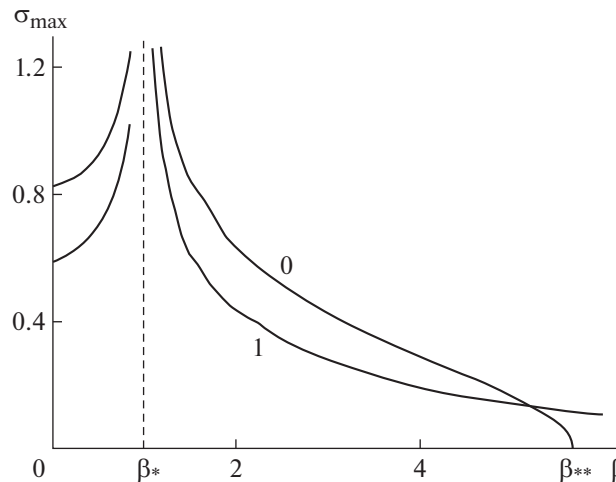
– при $\beta = 1$:

$$\omega_{0,1} = k^2 + i \frac{1}{\sqrt{2}} k^{1/2} + \frac{\alpha - id}{2} + \dots \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (2.10)$$

Для второго и третьего корней:

– при $\beta \neq 0$:

$$\omega_{0,2,3} = \pm \beta^{1/2} k^2 \pm \frac{\alpha}{2\beta^{1/2}} - \frac{1}{2} id + \dots \quad \text{при } k \rightarrow \infty; \quad (2.11)$$



Фиг. 4.

– при $\beta = 0$:

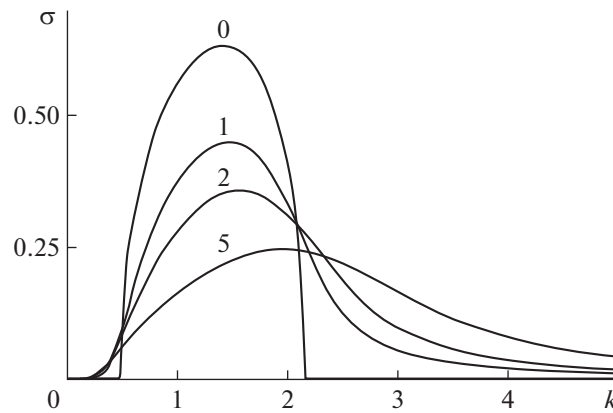
$$\omega_{0,2,3} = \pm \alpha^{1/2} k - \frac{1}{2} id + \dots \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Как видно из (2.11) и (2.12), инкремент нарастания $\sigma = \text{Im } \omega_{0,2,3} \sim -1/2d < 0$ в пределе $k \rightarrow \infty$, значит, и второй, и третий корень устойчивы при больших k и будут оставаться таковыми при всех k (как мы ранее заметили, корни могут быть только целиком устойчивыми или целиком неустойчивыми).

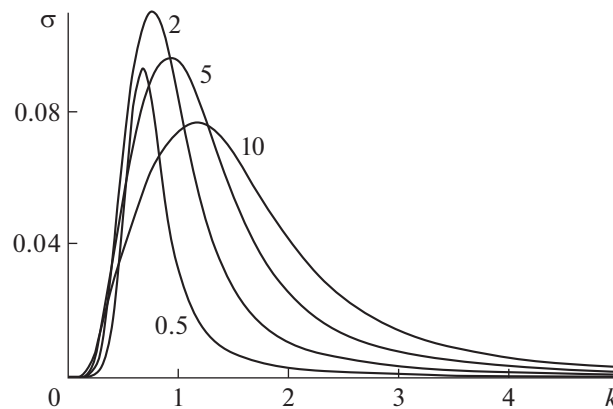
Первый же корень, напротив, всегда неустойчив (при всех $k \neq 0$, K , α , β и $d \neq 0$), причем согласно (2.9) он затухает алгебраически: $\sigma = \text{Im } \omega_{0,1} \sim \frac{d}{(1-\beta)^2} k^{-3}$ в пределе $k \rightarrow \infty$ при $\beta \neq 1$. Но самое интересное с точки зрения неустойчивости происходит при $\beta = 1$, когда этот корень согласно (2.10) неограниченно растет: $\sigma = \text{Im } \omega_{0,1} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} k^{1/2}$ в пределе $k \rightarrow \infty$. Собственно, этот эффект был обнаружен ранее в работе [17], в которой не учитывалось демпфирование пластины. Учет демпфирования в настоящей работе показывает, что хотя демпфирование и несколько подавляет этот рост (на постоянную величину $-1/2d$), но оно не в силах справиться с ним. Сказанное иллюстрирует фиг. 4, на которой представлены зависимости $\sigma_{\max}(\beta) = \max \sigma(-\infty < k < \infty)$ при $K = 1$ и $\alpha = 0$ для значений $d = 0, 1$ (отмечены соответствующими цифрами рядом).

Отметим еще одну характерную особенность, прослеживающуюся по фиг. 4. Как было выяснено в [17], в случае бездемпферной пластины ($d = 0$) существует пороговое значение $\beta = \beta_{**}$ (зависящее от K и α), при превышении которого неустойчивость пропадает ($\beta_{**} = 5.67$ для $K = 1$ и $\alpha = 0$ на фиг. 4). При учете демпфирования ($d \neq 0$) такое пороговое значение β_{**} не может существовать, поскольку тогда первый корень неустойчив всегда; и на фиг. 4 видно, что $\sigma_{\max}(\beta; d = 1)$ плавно затухает при $\beta \rightarrow \infty$, никак не “ощущая” переход через пороговое значение $\beta_{**} = 5.67$, при котором $\sigma_{\max}(\beta; d = 0)$ резко падает до нуля. Таким образом, хотя демпфирование при умеренных β подавляет неустойчивость, при достижении порогового значения β_{**} и выше оно оказывает противоположный эффект, приводя к появлению неустойчивости (хотя и слабой).

Характер влияния демпфирования на неустойчивость при увеличении d можно проследить по типичным фиг. 5 и фиг. 6, на которых отображена зависимость инкремента нарастания $\sigma(k)$ при $K = 1$ и $\alpha = 0$ для ряда значений d (отмечены соответствующими цифрами рядом). Как показывают расчеты, в “допороговом” случае (см. фиг. 5 для $\beta = 2 < \beta_{**} = 5.67$) максимальный инкремент нарастания $\sigma_{\max}$ монотонно снижается с ростом d (т.е., чем больше демпфирование, тем больше оно подавляет неустойчивость), тогда как в “запороговом” случае (см. фиг. 6 для



Фиг. 5.



Фиг. 6.

$\beta = 6 > \beta_{**} = 5.67$) максимальный инкремент нарастания $\sigma_{\max}$ сначала растет, а затем падает (т.е. демпфирование сначала приводит к появлению и росту неустойчивости, а затем начинает давить ее).

3. ВЫВОДЫ

1. Итак, в рамках теории свободного взаимодействия показано, что в пределе высоких чисел Рейнольдса невязкая неустойчивость может существовать только за счет инерционности или демпфирования пластины (если инерционность и демпфирование пренебрежимо малы, то течение будет устойчивым по отношению к невязким возмущениям).

2. Если при наличии демпфирования инерционность и изгибная жесткость пренебрежимо малы, то это приводит к катастрофической потере неустойчивости: инкремент нарастания возмущений неограниченно растет в коротковолновом пределе ($k \rightarrow \infty$).

3. При наличии инерционности существует критическое значение изгибной жесткости $\beta = \beta_* = 1$, при которой инкремент нарастания возмущений неограниченно растет в коротковолновом пределе. Демпфирование не может справиться с этой “катастрофой” (только уменьшает инкремент нарастания на конечную величину).

4. При наличии демпфирования всегда (при любых $k \neq 0$, K , α и β) существует ровно одна неустойчивая мода собственных колебаний течения, в том числе и при превышении порогового значения $\beta = \beta_{**}$ (зависящего от K и α), когда неустойчивость пропадает, если пренебрегать демпфированием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramer M.O.* Boundary-layer stabilization by distributed damping // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24. P. 458–460.
2. *Benjamin T.B.* Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability // *J. Fluid Mech.* 1960. № 9. P. 513–532.
3. *Benjamin T.B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // *J. Fluid Mech.* 1963. № 16. P. 436–450.
4. *Landahl M.T.* On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // *J. Fluid Mech.* 1962. № 13. P. 609–632.
5. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
6. *Riley J.J., Gad-el-Hak, Metcalfe R.W.* Compliant coatings // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1988. № 20. P. 393–420.
7. Flow Past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes // *Proc. of the IUTAM Symp., University of Warwick, UK, 26–30 March 2001.* Kluwer Acad. Publ., 2003.
8. *Gad-el-Hak M.* Compliant coatings for drag reduction // *Progress in Aerospace Sciences.* 2002. V. 38. Iss. 1. January 2002. P. 77–99.
9. *Carpenter P.W.* Recent progress in the use of compliant walls for laminar flow control // *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006. Math. in Industry.* 2008. № 12. P. 178.
10. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа.* 1969. № 4. С. 53–58.
11. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. A.* 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
12. *Messiter A.F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // *SIAM J. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
13. *Савенков И.В.* Подавление роста нелинейных волновых пакетов упругостью обтекаемой поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. № 1. С. 95–103.
14. *Савенков И.В.* Об абсолютной неустойчивости несжимаемого пограничного слоя на податливой поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 2. С. 281–290.
15. *Савенков И.В.* Влияние инерционности податливой поверхности на вязкую неустойчивость несжимаемого пограничного слоя // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 4. С. 707–715.
16. *Walker J.D.A., Fletcher A., Ruban A.I.* Instabilities of a flexible surface in supersonic flow // *Q. Jl Mech. Appl. Math.* 2006. V. 59. № 2. P. 253–276.
17. *Савенков И.В.* Невязкая неустойчивость несжимаемого пограничного слоя на податливой поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 7. С. 1268–1280.
18. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.