ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2019, том 82, № 1, с. 87–90

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕНУЛЕВЫМИ МОМЕНТАМИ НА ПОТЕНЦИАЛЕ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА

© 2019 г. Ю. М. Брук*

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

Поступила в редакцию 09.06.2018 г.; после доработки 09.06.2018 г.; принята к публикации 09.06.2018 г.

Рассмотрена ситуация для рассеяния медленных частиц с ненулевыми орбитальными моментами и с ограниченным потенциалом. Решается задача в приближении Пайса. Построено решение обратной задачи для уравнения Пешля–Теллера, сформулирована общая схема для пайсовских резонансов и методика вычислений сечений рассеяния резонансных частиц.

DOI: 10.1134/S0044002718060077

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи о вычислениях характеристик и сечений рассеяния медленных частиц с ненулевыми моментами в последние годы научились эффективно решать, используя интегро-функциональное уравнение Пайса [1]. Такое уравнение было получено вариационным методом еще в середине прошлого века, но оказалось надолго забытым. Эта явная несправедливость была исправлена в работах [2–6] и сейчас уже не пугает ни своей нетривиальностью, ни математическими сложностями. Автору, тем не менее, известно всего две книги по квантовой механике, где приведено уравнение Пайса [7, 8]. Решения этого уравнения в указанных книгах, однако, не обсуждаются. Около двух лет назад в ЖЭТФ опубликованы еще две статьи [9, 10], идейно близкие к настоящей работе.

Первоначально записанное в [1] уравнение Пайса выглядит так:

$$\frac{2l+1-\frac{2}{\pi}\delta_l}{2l+1-\frac{4}{\pi}\delta_l}\cdot\delta_l = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty U(r)J^2_{l+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\delta_l}(kr)rdr. \tag{1}$$

Здесь l — момент рассеивающейся частицы, δ_l — фаза рассеяния, $U(r)$ — потенциал, k^2 — энергия частицы, $J^2_\mu(kr)$ — квадрат бесселевой функции с индексом $\mu = l + \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\delta_l$. Существенно, что фаза δ_l включена в индекс μ, а $l \neq 0$. Мы пользуемся системой единиц, в которой удвоенная масса частицы $2m$ и постоянная Планка $\hbar$ равны единице.

Вывод уравнения Пайса вариационным путем изложен в работах [1, 3, 5, 6]. Другой вывод (1) предложен Титцем и воспроизведен в [2, 9]. Процедура вычисления произвольных фаз (решения (1)) описана в [3, 4]. Если фазы $\delta_l \ll 1$, то уравнение (1) переходит в уравнение Борна

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\infty U(r)J^2_{l+\frac{1}{2}}(kr)rdr. \tag{2}$$

Существует, однако, принципиальное различие приближений Пайса и Борна. Последнее, будучи следствием теории возмущений, годится только для малых значений δ_l и уж во всяком случае не может описывать резонансные ситуации. Пайсовское приближение можно эффективно использовать для резонансных случаев. Дальше мы будем отыскивать возможные решения при $\delta_l \sim 1$ (или $\dfrac{\pi}{2}$) при $k\alpha \ll 1$. Здесь α — эффективный радиус потенциала. Этому и будет посвящена данная работа. В следующем разделе мы сформулируем общую схему классификации допустимых значений резонансных фаз δ_l^{res} рассеяния на короткодействующих потенциалах при низких энергиях рассеивающихся частиц и при ненулевых орбитальных моментах. Одновременно рассматривается ситуация для подобных же вычислений для парциальных фаз δ_l^{PRE} (эффектов Рамзауэра — ПЭР, partial Ramsauer effects — PRE). В случае резонансов фазы $\delta_l^{\text{res}} = \dfrac{\pi}{2}\ (\text{mod}\pi)$, для ПЭР-фазы $\delta_l^{\text{PRE}} = n\pi$ (n — целые числа).

*E-mail: yubruk@gmail.com

Поэтому последние не дадут вклада в сечение рассеяния.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЗОНАНСОВ И ПЭР-ФАЗ В ПАЙСОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Для сходимости интеграла в уравнении Пайса (1) потребуем, чтобы индекс функции Бесселя μ был положительным, т.е. чтобы

$$\mu = l + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\delta_l > 0. \tag{3}$$

Но это означает, что при $l = 1$ может быть только один резонанс $\frac{\pi}{2}$, при $l = 2$ может быть один резонанс $\frac{\pi}{2}$ и одна фаза $\delta_2^{\mathrm{PRE}} = \pi$, при $l = 3$ есть три интересующие нас точки: резонансы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ и одна фаза $\delta_3^{\mathrm{PRE}} = \pi$ и т.д.

Заметим, что здесь происходит чередование для фаз: в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ есть резонанс, в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ новые резонансы не появляются, но возникает фаза $\delta_2^{\mathrm{PRE}} = \pi$, в интервале $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ появляется резонанс $\frac{3\pi}{2}$ и т.д. Эта закономерность может быть прослежена и дальше при $l > 3$.

Таким образом решается задача о перечислении всех возможных значений δ^{res} и δ^{PRE} для всех l.

Эти рассуждения справедливы при любых допустимых потенциалах в приближении Пайса.

Удобно составить простую таблицу, ограничиваясь для наших целей значениями $l = 1, 2, 3$; $\mu = l + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\delta_l$.

Таблица

№	l	δ_l	μ	2μ
1	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
2	2	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
3	2	π	$\frac{1}{2}$	1
4	3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{2}$	5
5	3	π	$\frac{3}{2}$	3
6	3	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

3. АСИМПТОТИКА КВАДРАТА БЕССЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Квадрат функции Бесселя, стоящей под интегралом в (1), можно разложить в ряд [11]:

$$J_\mu^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(2\mu + 2n + 1) \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2\mu+2n}}{n![\Gamma(\mu + n + 1)]^2 \Gamma(2\mu + n + 1)}. \tag{4}$$

Здесь $z = kr$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, $\mu = l + \frac{1}{2} - \frac{2\delta_l}{\pi}$.

Учитывая ограниченность потенциала, и при достаточно малых энергиях k^2 можно ограничиться первым членом разложения (4). При этом получается при $n = 0$ асимптотика

$$J_\mu^2(kr) = \left(\frac{kr}{2}\right)^{2\mu} \frac{1}{\Gamma^2(\mu + 1)}. \tag{5}$$

Уравнение Пайса (1) теперь превратится в следующее:

$$\frac{2l + 1 - \frac{2}{\pi}\delta_l}{2l + 1 - \frac{4}{\pi}\delta_l} \cdot \delta_l = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty U(r) \left(\frac{kr}{2}\right)^{2\mu} \frac{rdr}{\Gamma^2(\mu + 1)}. \tag{6}$$

Параметры μ и 2μ уже вычислены в таблице:

$$\mu = l + \frac{1}{2} - \frac{2\delta_l}{\pi}; \quad 2\mu = 2l + 1 - \frac{4\delta_l}{\pi}. \tag{7}$$

Производя вычисления в (6) при заданных значениях l и δ_l, мы получаем условия существования резонансов и ПЭР-фаз. Из таких формул мы можем определить энергию k^2 для резонансов. После этого легко найти сечения рассеяния σ, используя известную формулу [12]:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \delta_l. \tag{8}$$

Случай рассеяния с $l = 0$ мы в этой работе не обсуждаем. Можно предположить, что сечение определяется резонансами, и пренебречь малыми фазами $\delta_l \ll 1$.

Кроме того, напомним, что рамзауэровские фазы равны $\pi n \quad (n = 1, 2, 3, ...)$ и поэтому в сечение не войдут.

И более того, уже из структуры ряда (4) и формулы (6) ясно, что можно ограничиться случаем $2\mu = 1$. Для тех случаев, когда в формулы входят $(kr)^3, (kr)^5$ и т.д., т.е. $2\mu = 3, 5, ...$, будут получаться поправки к решениям (6) $\sim(kr)$ (или $2\mu = 1$).

Это следует из того, что

$$(kr)^5 \ll (kr)^3 \ll (kr) \ll 1.$$

Поэтому вычисления значительно упрощаются и сокращаются. И еще одно утверждение. При увеличении таблицы, т.е. продолжении ее при $l > 3$, даже и для $2\mu = 1$, мы легко убеждаемся, что поправки к сечениям рассеяния становятся совсем малыми. Другими словами, ряд для сечения рассеяния сходится достаточно быстро. Пример мы приведем в следующем разделе.

4. УРАВНЕНИЕ ПЕШЛЯ–ТЕЛЛЕРА И СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Ниже мы будем иметь дело со сферически симметричным потенциалом Пешля–Теллера [13]:

$$U(r) = -\frac{\alpha^2\lambda(\lambda-1)}{\mathrm{ch}^2\alpha r}, \quad \lambda > 1. \tag{9}$$

Уравнение (6) определяет условия существования узких резонансов. Ширина резонансов, конечно, не учитывается. И мы не обсуждаем вопрос об интерференции потенциального рассеяния с рассеянием, обусловленным резонансами. И в конечном счете мы снова ограничимся случаем $2\mu = 1$. Но сначала скажем о всех условиях существования резонансов из таблицы. Для этого сделаем в (9) замену $\alpha r = z$. Тогда $\alpha dr = dz$, а $\frac{kr}{2} = \frac{1}{2}\frac{k}{\alpha}z$.

В (6) придется вычислять интегралы

$$\int\limits_0^\infty \frac{z^2dz}{\mathrm{ch}^2 z}, \int\limits_0^\infty \frac{z^4dz}{\mathrm{ch}^2 z}, \int\limits_0^\infty \frac{z^6dz}{\mathrm{ch}^2 z}.$$

Общая формула для таких интегралов [14]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{z^{\nu-1}}{\mathrm{ch}^2 z}dz = \frac{4}{2^\nu}(1-2^{2-\nu})\Gamma(\nu)\zeta(\nu-1), \tag{10}$$

$\nu = 3, 5, 7$. Выпишем здесь значения дзета-функции:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}. \tag{11}$$

Значения гамма-функций $\Gamma(\nu)$ легко доступны. Подставляя для каждой строки той же таблицы соответствующие значения l и δ_l, а также $\Gamma^2(\mu + 1)$, в (6) мы находим полный набор условий существования резонансов для $2\mu = 1, 3, 5$. В таблице только первая, третья и шестая строки соответствуют $2\mu = 1$. Приведем результаты вычислений из (6) только для них. Для первой и шестой строк мы выписываем также вклады в сечения рассеяния, вычисленные по формуле (8), в третьей строке фаза равна π, и поэтому условие существования для нее есть, а вклада в сечение рассеяния нет.

Результаты вычислений такие:

для $l = 1$ и $\delta_l = \delta_1 = \frac{\pi}{2}$ ответ из (6) $\frac{k\pi}{\alpha}\lambda(\lambda - 1) = 12$; для $l = 2$ и фазы $\delta_l = \delta_2 = \pi$ уравнение (6) дает $\frac{k\pi}{\alpha}\lambda(\lambda-1) = 36$; для $l = 3$ и фазы $\delta_l = \delta_3 = \frac{3\pi}{2}$ получается $\frac{k\pi}{\alpha}\lambda(\lambda-1) = 72$.

Выражения для сечений рассеяния:

$\sigma_1 = \frac{12}{12^2}\pi(\frac{\pi}{\alpha})^2\lambda^2(\lambda-1)^2$ соответствует первой строке таблицы, $\sigma_6 = \frac{28}{72^2}\pi(\frac{\pi}{\alpha})^2\lambda^2(\lambda-1)^2$ соответствует шестой строке. Понятно, что $\sigma_6 \ll \sigma_1$, и это хорошая иллюстрация быстрой сходимости ряда для сечения рассеяния. Заметим еще, что в [13] существует подробный и корректный анализ вычисления сечения рассеяния на потенциале Пешля–Теллера в случае s-рассеяния (с $l = 0$). Такая задача, естественно, никак не связана с уравнением Пайса и является предметом отдельного независимого рассмотрения.

5. ПОДОБИЕ ПАЙСОВСКИХ РЕЗОНАНСОВ И “3–6”-ПРАВИЛО

Обсудим для разных потенциалов подобие условий существования пайсовских резонансов для $l = 1, 2, 3$ и $2\mu = 1$.

Такие уравнения для резонансов вычисляются по формуле (6) с учетом таблицы. Перечислим соответствующие формулы [9, 10].

Для потенциала Юкавы $U(r) = -e^{-\lambda r}\frac{z}{r}$:

1) при $l = 1$, $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\left(\frac{z}{\lambda}\right)\left(\frac{k}{\lambda}\right) = \pi$,

2) при $l = 2$, $\delta_2 = \pi$, $\left(\frac{z}{\lambda}\right)\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 3\pi$,

3) при $l = 3$, $\delta_3 = \frac{3\pi}{2}$, $\left(\frac{z}{\lambda}\right)\left(\frac{k}{\lambda}\right) = 6\pi$.

Для потенциала Хюльтена $U(r) = \frac{-U_0 e^{-\frac{r}{a}}}{1-e^{-\frac{r}{a}}}$, $U_0 > 0$:

1) при $l = 1$, $\delta_1 = \frac{\pi}{2}$, $(U_0a^2)(ka) = \frac{\pi}{2\zeta(3)}$,

2) при $l = 2$, $\delta_2 = \pi$, $(U_0a^2)(ka) = \frac{3\pi}{2\zeta(3)}$,

3) при $l = 3$, $\delta_3 = \dfrac{3\pi}{2}$, $(U_0 a^2)(ka) = \dfrac{3\pi}{\zeta(3)}$.

Значение дзета-функции здесь $\zeta(3) = 1.202$.

Для потенциала прямоугольной ямы $U = -U_0$ при $r < R, U = 0$ при $r > R, U_0 > 0$:

1) при $l = 1$, $\delta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $(U_0 R^2)(kR) = 3\pi$,

2) при $l = 2$, $\delta_2 = \pi$, $(U_0 R^2)(kR) = 9\pi$,

3) при $l = 3$, $\delta_3 = \dfrac{3\pi}{2}$, $(U_0 R^2)(kR) = 18\pi$.

Для каждого из обсуждаемых потенциалов мы выписали по три строки для условий существования резонансов. Первые и третьи строки позволяют вычислить сечения рассеяния. Вторые строки соответствуют фазам π, такие фазы в сечение рассеяния вкладов не дают. Однако вторые строки отличаются от первых множителем 3, а третьи от первых множителем 6. Эта общая закономерность иллюстрирует некое подобие условий для существования резонансов и может быть названа “3–6”-правилом. Такая же ситуация имеется для потенциала Пешля–Теллера, как было отмечено выше. Заметим еще, что максимальный вклад в сечение рассеяния получается при $l = 1, \delta_l = \delta_1 = \dfrac{\pi}{2}$, более малый вклад при $l = 3, \delta_l = \delta_3 = \dfrac{3\pi}{2}$. Все сечения рассеяния, как и раньше, вычисляются по формуле (8). И, конечно, все это справедливо только при $l \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Pais, Proc. Cambr. Phil. Soc. **42**, 45 (1946).
2. Т. Титц, ЖЭТФ **37**, 294 (1959) [JETP **10**, 207 (1960)].
3. Ю. М. Брук, А. Н. Волощук, УФН **182**, 173 (2012) [Phys. Usp. **55**, 161 (2012)].
4. Ю. М. Брук, ТМФ **66**, 392 (1986) [Theor. Math. Phys. **66**, 260 (1986)].
5. W. J. Romo and S. R. Valluri, J. Phys. B **23**, 4223 (1990).
6. W. J. Romo and S. R. Valluri, Phys. Scr. **71**, 572 (2005).
7. Н. Мотт, И. Снеддон, *Волновая механика и ее применения* (Наука, Москва, 1966).
8. Т. Ю. Ву, Т. Омура, *Квантовая теория рассеяния* (Наука, Москва, 1969).
9. Ю. М. Брук, А. Н. Волощук, ЖЭТФ **150**, 288 (2016) [JETP **123**, 249 (2016)].
10. Ю. М. Брук, А. Н. Волощук, ЖЭТФ **150**, 456 (2016) [JETP **123**, 391 (2016)].
11. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций* (Изд-во иностр. лит., Москва, 1949).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика* (Наука, Москва, 1974).
13. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, изд. 3-е (Изд-во ЛКИ, Москва, 2010), с. 253.
14. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. 7-е (Изд-во БХВ, С.-Петербург, 2011), с. 382.

RESONANT STATES AT THE SCATTERING OF SLOW PARTICLES WITH NONZERO ORBITAL MOMENTA BY THE PÖSCHL–TELLER POTENTIAL

Yu. M. Bruk

P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow

We study the scattering problem for slow particles with nonzero angular momenta in the presence of a finite potential. The solution is found in the framework of the Pais approximation. The inverse problem for the Pöschl–Teller equation is solved, the general scheme for determining Pais resonances is formulated, and the technique for calculation of scattering cross-sections for resonant particles is suggested.