ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2019, том 82, № 2, с. 167–171

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛА НУЛЕВОГО РАДИУСА

© 2019 г. Ю. В. Грац*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20.11.2018 г.; после доработки 20.11.2018 г.; принята к публикации 21.11.2018 г.

Рассматривается эффект поляризации вакуума безмассового скалярного поля $\phi(x)$ вблизи точечного источника с потенциалом нулевого радиуса в четырехмерном пространстве Минковского. С использованием техники самосопряженных расширений получено точное выражение для регуляризованной функции Адамара скалярного поля и вычислены перенормированные вакуумные средние квадрата поля $\langle\phi^2(x)\rangle_{\rm ren}$ и оператора тензора энергии-импульса $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_{\rm ren}$.

DOI: 10.1134/S0044002719020089

1. ВВЕДЕНИЕ

Классической для квантовой теории поля проблемой, изучением которой занимаются уже не один десяток лет, является эффект поляризации вакуума квантованных полей на пространствах с нетривиальной топологией, при наличии границ, в присутствии внешних полей. Этот эффект обладает целым рядом нетривиальных особенностей, одной из которых является его эффективная нелокальность. Последняя проявляется в том, что уравнения поля, как уравнения в частных производных, "чувствуют" структуру пространства в целом. Эта нелокальность дает себя знать, даже если рассматривается евклидово пространство с дискретным (конечным или бесконечным) числом выколотых точек. В этом случае наложение адекватных граничных условий позволяет исследовать квантовые системы, гамильтониан которых на эвристическом уровне записывается в виде

$$H = -\Delta + \sum_y \lambda_y \delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \qquad (1)$$

где Δ — самосопряженный лапласиан на $L^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 1, 2, 3$ — размерность конфигурационного пространства, $\delta^d(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ — дираковская δ-функция, локализованная в точке $\mathbf{y}$, λ_y — соответствующая константа связи.

Модели такого типа широко обсуждались в литературе в связи с задачами, возникающими в физике твердого тела [1], атомной и ядерной физике [2]. Аналогичный подход позволил рассмотреть казимировское взаимодействие двух параллельных идеально проводящих пластин [3–5], двух точечных или линейных источников с потенциалом нулевого радиуса [6]. Похожая ситуация возникает при рассмотрении теоретико-полевых эффектов в окрестности космических струн. Действительно, при подходящем выборе координат уравнение для безмассового скалярного поля с неминимальной связью приобретает вид полевого уравнения с линейным δ-образным потенциалом, что требует корректного учета этой особенности [7].

Ниже мы рассмотрим эффект поляризации вакуума вблизи точечного источника в пространстве Минковского в рамках подхода, основанного на построении самосопряженных расширений.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$ и метрика пространства-времени с сигнатурой $(+,-,-,-)$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$(\Box + \lambda\delta^3(\mathbf{x}))\phi(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \Box = \partial_t^2 - \Delta, \qquad (2)$$

которое на эвристическом уровне трактуется как гейзенберговское уравнение движения безмассового скалярного поля $\phi(t,\mathbf{x})$ в поле локализованного в начале координат источника нулевого радиуса.

Подстановка

$$\phi_\omega^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) = e^{\mp i\omega t} u_\omega(\mathbf{x}) \qquad (3)$$

сводит нахождение положительно и отрицательно частотных решений этого уравнения к исследованию стационарного уравнения Шредингера для частицы в поле с потенциалом нулевого радиуса

$$H u_\omega(\mathbf{x}) = \omega^2 u_\omega(\mathbf{x}), \quad H = -\Delta + \lambda\delta^3(\mathbf{x}). \qquad (4)$$

*E-mail: grats@phys.msu.ru

Известно, что формальная запись потенциала в виде $\lambda\delta^d(\mathbf{x})$ требует расшифровки. Математически корректное описание δ^d-образных взаимодействий при $d = 1, 2, 3$ достигается построением самосопряженного расширения неотрицательно определенного оператора $-\Delta$, рассматриваемого на $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ [8–10]. В случае одного пространственного измерения ($d = 1$) это достигается наложением условия на разрыв первой производной волновой функции в точке расположения источника (в нашем случае в начале координат). При надлежащем выборе параметра самосопряженного расширения он совпадает с интенсивностью одномерного δ-взаимодействия λ. В случае двух и трех измерений оператор $-\Delta$ остается самосопряженным, даже если собственные функции расходятся в точке локализации центра, но при условии, что они остаются локально квадратично интегрируемыми и удовлетворяют соответствующим граничным условиям. Для этих двух размерностей конфигурационного пространства имеются однопараметрические семейства самосопряженных операторов. При этом параметр самосопряженного расширения α не связан напрямую с интенсивностью взаимодействия, а определяет длину s-волнового рассеяния [8, 9] (см. также [11]). В этом состоит принципиальное отличие двух- и трехмерного случаев от случая одного пространственного измерения. При $d \geq 4$ оператор $-\Delta$ является самосопряженным и точечные взаимодействия отсутствуют.

Рассмотрим неотрицательно определенный оператор $H = -\Delta$, рассматриваемый на $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

В сферических координатах пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ представляется в виде прямой суммы

$$L^2(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} L^2((0,\infty); r^2dr) \bigotimes \bigotimes [Y_{l,-l}, \ldots, Y_{l,l}], \tag{5}$$

где $\{Y_{l,m} | l = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l\}$ — сферические гармоники, а символом $[\ldots]$ обозначена линейная оболочка векторов $Y_{l,-l}, \ldots, Y_{l,l}$.

По отношению к этому разложению оператор H разлагается в сумму (см. [8–10] и процитированную там литературу)

$$H = \bigoplus_{l=0}^{\infty} h_l \bigotimes \mathbf{1}, \tag{6}$$

где

$$h_l = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r > 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Известно, что операторы h_l при $l \geq 1$ являются самосопряженными, в то время как однопараметрическое семейство самосопряженных расширений оператора h_0 имеет вид

$$h_{0,\alpha} = -\Delta_{0,\alpha} = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr}, \tag{8}$$
$$\mathcal{D}(h_{0,\alpha}) = \{u_\alpha \in L^2((0,\infty); r^2dr);$$
$$4\pi\alpha \lim_{r\downarrow 0} r u_\alpha(r) = \lim_{r\downarrow 0}[u_\alpha + r u'_\alpha]\},$$

где $-\infty < \alpha \leq \infty$. При этом свободный гамильтониан соответствует случаю $\alpha = \infty$.

Таким образом, самосопряженное расширение оператора $H = -\Delta$ задает точечное взаимодействие только в s-волне.

Известно, что если $0 \leq \alpha \leq \infty$, спектр самосопряженного оператора $h_{0,\alpha}$ непрерывный, а его собственные значения E покрывают всю неотрицательную полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. При этом радиальная часть соответствующих собственных функций отличается от регулярной функции $u_E \sim \sin\sqrt{E}r/r$ и имеет вид

$$u_{E,\alpha}(r) = C\left[\frac{\sin\sqrt{E}r}{r} + \operatorname{tg}\delta\frac{\cos\sqrt{E}r}{r}\right], \quad E \subset \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Относительный коэффициент $\operatorname{tg}\delta$ однозначно определяется граничным условием (8) и при выбранном способе параметризации расширений равен:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sqrt{E}}{4\pi\alpha}. \tag{10}$$

При $-\infty < \alpha < 0$ оператор $h_{0,\alpha}$ наряду с непрерывным спектром, который по-прежнему покрывает всю неотрицательную полупрямую, имеет в точности одно невырожденное отрицательное собственное значение

$$E_- = -(4\pi\alpha)^2.$$

Соответствующая собственная функция имеет вид

$$u_\alpha^{(-)}(r) \sim (|\alpha|)^{1/2} e^{-4\pi|\alpha|r}/r.$$

Понятно, что это решение описывает связанное состояние, а самосопряженное расширение оператора $-\Delta$ при $-\infty < \alpha < 0$ соответствует введению притягивающего точечного потенциала.

3. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА ВБЛИЗИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Вернемся к поставленной задаче и воспользуемся изложенными в предыдущем разделе результатами. Ограничимся рассмотрением случая отталкивающего потенциала ($0 \leq \alpha \leq \infty$).

Возвращаясь к уравнению (4), мы видим, что в этом случае в s-волновом решении (9) и (10) следует положить $\sqrt{E} = \omega$. После чего, нормируя s-волновые положительно и отрицательно частотные решения $\phi^{(\pm)}_{\omega,\alpha}(t,r) = e^{\mp i\omega t} u_{\omega,\alpha}(r)$ в соответствии с требованием, чтобы

$$i \int d\mathbf{x} \phi^{(\pm)*}_{\omega,\alpha} \overleftrightarrow{\partial_t} \phi^{(\pm)}_{\omega',\alpha} = \pm\delta(\omega - \omega'),$$

или, что эквивалентно,

$$\int d\mathbf{x} u_{\omega,\alpha} u_{\omega',\alpha} = \frac{\delta(\omega - \omega')}{2\omega},$$

мы получаем, что нормировочный коэффициент

$$C = \frac{\cos\delta}{2\pi\sqrt{\omega}}.$$

Таким образом, s-волновая обобщенная собственная функция оператора $h_{0,\alpha}$ (8) имеет вид

$$u_{\omega,\alpha}(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\sin(\omega r + \delta)}{\sqrt{\omega}}. \qquad (11)$$

Пусть $\{u_{\omega,l,m}\}$ — полный ортонормированный набор обобщенных собственных функций свободного гамильтониана H. Тогда полный ортонормированный набор обобщенных собственных функций его самосопряженного расширения H_α при $0 \le \alpha \le \infty$ состоит из $\{u_{\omega,l,m} | l \in \mathbb{N}, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm l\}$ и функции $u_{\omega,\alpha}(r)$ (11). При этом функция Адамара скалярного безмассового поля может быть представлена в виде

$$D^{(1)}(x,x') = \frac{1}{2}\langle \phi(x)\phi(x') + \phi(x')\phi(x)\rangle_{\text{vac}} = \qquad (12)$$
$$= \text{Re} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \Big[u_{\omega,\alpha}(x) u^*_{\omega,\alpha}(x') +$$
$$+ \sum_{m=-l}^{l} \sum_{l=1}^{\infty} u_{\omega,l,m}(x) u^*_{\omega,l,m}(x') \Big].$$

Учтем, что $u_{\omega,0,0} \equiv u_{\omega,\alpha}|_{\alpha=\infty}$, и запишем функцию (12) как сумму

$$D^{(1)}(x,x') = D^{(1)}_\infty(x,x') + D^{(1)}_\alpha(x,x'),$$

где $D^{(1)}_\infty(x,x')$ — функция Адамара безмассового скалярного поля в пустом пространстве Минковского ($\alpha = \infty$):

$$D^{(1)}_\infty(x,x') = \text{Re} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \times$$
$$\times \sum_{m=-l}^{l} \sum_{l=0}^{\infty} u_{\omega,l,m}(x) u^*_{\omega,l,m}(x'),$$

а генерируемая самосопряженным расширением поправка

$$D^{(1)}_\alpha(x,x') = \text{Re} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} \times \qquad (13)$$
$$\times [u_{\omega,\alpha}(x) u^*_{\omega,\alpha}(x') - u_{\omega,\infty}(x) u^*_{\omega,\infty}(x')].$$

Функция $D^{(1)}_\infty$ не представляет интереса, поскольку, взятые в пределе совпадающих точек, эту функцию и ее производные принято считать равными нулю и соответствующие выражения отбрасываются при регуляризации. Таким образом, регуляризованное значение функции Адамара дается разностью

$$D^{(1)}_{\text{reg}} = D^{(1)} - D^{(1)}_\infty = D^{(1)}_\alpha,$$

откуда после подстановки (11) в (13) мы получаем

$$D^{(1)}_\alpha(x,x') = \qquad (14)$$
$$= \frac{1}{16\pi^3 \alpha r r'} \int_0^\infty d\omega \frac{\cos\omega(t-t')}{1 + (\omega/4\pi\alpha)^2} \times$$
$$\times \left[\sin\omega(r+r') + \frac{\omega}{4\pi\alpha} \cos\omega(r+r') \right].$$

Дальнейшие вычисления традиционны (см., например, [12]).

Вакуумное среднее квадрата поля определяется непосредственно взятой в пределе совпадающих точек регуляризованной функцией Адамара (14)

$$\langle \phi^2 \rangle_{\text{ren}} = \lim_{x' \to x} D^{(1)}_\alpha(x,x') = \frac{\mathcal{J}(\beta)}{4\pi^2 r^2}, \qquad (15)$$

где

$$\mathcal{J}(\beta) = \int_0^\infty dz \frac{1}{1+z^2} \Big[\sin\beta z + z\cos\beta z \Big],$$
$$\beta = 8\pi\alpha r.$$

В рассматриваемом случае, когда $\beta > 0$, этот интеграл выражается через интегральную показательную функцию $\text{Ei}(-x)$ [13]:

$$\mathcal{J}(\beta) = -e^\beta \text{Ei}(-\beta). \qquad (16)$$

Вакуумное среднее оператора тензора энергии-импульса $\langle T^\nu_\mu(x) \rangle_{\text{ren}}$ получается действием на регуляризованную функцию Адамара дифференциальным оператором, вид которого определяется классическим выражением для тензора энергии-импульса, с последующим переходом к пределу совпадающих точек. В случае метрического тензора в плоском пространстве и при использовании

криволинейных координат это дается выражением [12]

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\rm ren} = \tag{17}$$
$$= \lim_{x'\to x}\left[(1-2\xi)\partial^\nu\partial'_\mu - \left(\frac{1}{2}-2\xi\right)\delta_\mu^\nu\partial^\lambda\partial'_\lambda - \right.$$
$$\left. - \xi\left(\nabla^\nu\partial_\mu + \nabla'^\nu\partial'_\mu\right)\right]D_\alpha^{(1)}(x,x'),$$

где ∂_μ и ∂'_μ — производные по x и x' соответственно, а ∇_μ и ∇'_μ — соответствующие ковариантные производные (ниже будут использоваться сферические координаты).

Пропорциональные ξ-члены возникают при введении в действие для скалярного поля члена $\xi R\phi^2$, описывающего связь между скалярным и гравитационным полями:

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}\left(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \xi R\phi^2\right),$$

где R — скалярная кривизна, ξ — константа связи.

Соответствующий вклад в действие и уравнение поля обращается в нуль, если метрика пространства-времени совпадает с метрикой пространства Минковского, но метрический тензор энергии-импульса определяется как

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}},$$

а функциональная производная по метрике в этой точке не равна нулю и дает соответствующие вклады в (17).

В результате для ненулевых компонент вакуумного среднего оператора тензора энергии-импульса мы получаем:

$$\langle T_0^0\rangle_{\rm ren} = \tag{18}$$
$$= \frac{1}{8\pi^2 r^4}\left[\mathcal{J} + \mathcal{J}_1 - 4\xi(\mathcal{J} + \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2)\right],$$
$$\langle T_r^r\rangle_{\rm ren} =$$
$$= -\frac{1}{8\pi^2 r^4}\left[\mathcal{J} + \mathcal{J}_1 - 4\xi(2\mathcal{J} + \mathcal{J}_1)\right],$$
$$\langle T_\theta^\theta\rangle_{\rm ren} = \langle T_\varphi^\varphi\rangle_{\rm ren} =$$
$$= \frac{1}{8\pi^2 r^4}\left[\mathcal{J} + \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - 2\xi(4\mathcal{J} + 3\mathcal{J}_1 - 2\mathcal{J}_2)\right],$$

где

$$\mathcal{J}_1(\beta) = \beta\left(\frac{1}{\beta} - \mathcal{J}(\beta)\right),$$
$$\mathcal{J}_2(\beta) = \frac{\beta^2}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} - \mathcal{J}(\beta)\right).$$

Из (18) следует, что перенормированное вакуумное среднее следа оператора тензора энергии-импульса

$$\langle T_\mu^\mu\rangle_{\rm ren} = (1-6\xi)\frac{\mathcal{J} + \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2}{4\pi^2 r^4}.$$

Таким образом, для конформного, $\xi = 1/6$, поля след равен нулю, аномалия следа, как это и должно быть в плоском пространстве, отсутствует.

Прямое вычисление позволяет показать, что также выполняется и закон сохранения:

$$\nabla_\mu\langle T_\nu^\mu\rangle_{\rm ren} = 0.$$

Далее, известно [13], что при больших значениях аргумента имеет место асимптотическое разложение

$$e^x{\rm Ei}(-x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k-1)!}{x^k}, \quad x \gg 1. \tag{19}$$

Откуда, в частности, следует, что что при $\alpha \to \to \infty$ (предельный случай пустого пространства Минковского) вакуумные средние (15) и (18) обращаются в нуль.

Отдельно рассмотрим предел больших, $r \gg \gg \alpha^{-1}$, расстояний от источника. Используя асимптотическое разложение (19), из (15) и (16) мы получаем, что на больших расстояниях вакуумное среднее $\langle\phi^2\rangle_{\rm ren}$ представимо в виде

$$\langle\phi^2\rangle_{\rm ren} = \frac{1}{32\pi^3\alpha r^3}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha r}\right)\right]. \tag{20}$$

Что касается тензора энергии-импульса, то в случае больших r (18) приобретает вид

$$\langle T_\mu^\nu\rangle_{\rm ren} = \frac{(1-6\xi)}{2^6\pi^3 r^5\alpha}{\rm diag}\left(1,-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) - \tag{21}$$
$$- \frac{3}{2^9\pi^4 r^6\alpha^2}\left[{\rm diag}\,(1,-1,2,2) - \right.$$
$$\left. - 8\xi{\rm diag}\left(1,-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^7\alpha^3}\right).$$

Обращает на себя внимание тот факт, что перенормированное вакуумное среднее тензора энергии-импульса скалярного поля при конформной связи ($\xi = 1/6$) на больших расстояниях убывает быстрее, чем при других значениях константы ξ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача поляризации вакуума безмассового скалярного поля в поле с потенциалом нулевого радиуса. Задача формально

сводится к рассмотрению трехмерного стационарного уравнения Шредингера с δ-образным потенциалом. В случае двух- и трехпространственных измерений рассмотрение такого рода квантово-механических задач методами теории возмущений приводит к необходимости бесконечных перенормировок. В работе использовался альтернативный подход, основанный на построении самосопряженных расширений оператора $-\Delta$. В случае трехмерного конфигурационного пространства это позволяет ввести как отталкивающий контактный потенциал (неотрицательный параметр расширения), так и потенциал притяжения (отрицательный параметр расширения). Мы ограничились случаем отталкивающего потенциала. Следует подчеркнуть, что используемый подход позволяет выйти за рамки теории возмущений и не требует наложения каких-либо ограничений на интенсивность взаимодействия или на расстояние от источника, что заведомо пришлось бы сделать при использовании пертурбативных методов. В результате получены точные выражения для перенормированных вакуумных средних квадрата поля и оператора тензора энергии-импульса. Показано, что полученные результаты удовлетворяют естественным налагаемым на вакуумное среднее тензора энергии-импульса требованиям обращения в нуль дивергенции и равенства нулю следа в случае конформной связи. Показано, что на больших расстояниях среднее тензора энергии-импульса в случае конформного поля убывает значительно быстрее, чем при других значениях параметра ξ. Поведение конформного поля на искривленном пространственно-временном фоне обладает рядом особенностей, это известно. Неожиданным является появление такой особенности в плоском пространстве. Связь полученных результатов с в принципе измеримыми величинами определяется тем, что $4\pi\alpha$ совпадает со взятой со знаком минус обратной длиной рассеяния для гамильтониана $-\Delta_\alpha$.

В заключение отметим, что используемый метод применим и в случае притягивающего потенциала. Однако это потребует последовательного учета связанного состояния. Было бы интересно также рассмотреть и многоцентровый случай. Эти вопросы находятся в стадии рассмотрения.

Хотелось бы высказать искреннюю благодарность А.В. Борисову за обсуждение полученных результатов и высказанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. de I. Kronig and W. G. Penney, Proc. Roy. Soc. (London) **130 A**, 499 (1931).
2. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике* (Изд-во ЛГУ, 1975).
3. С. Г. Мамаев, Н. Н. Трунов, Изв. вузов, Физика **7**, 9 (1980) [Russ. Phys. J. **23**, 551 (1980)], ЯФ **35**, 1049 (1982) [Sov. J. Nucl. Phys. **35**, 612 (1982)].
4. M. Bordag, D. Henning, and D. Robaschik, J. Phys. A **25**, 4483 (1992).
5. J. M. Muños-Castañeda, J. Moteos Guilarte, and M. Mosquera, Phys. Rev. D **87**, 105020 (2013).
6. Ю. В. Грац, ЯФ **81**, 242 (2018) [Phys. Atom. Nucl. **81**, 253 (2018)].
7. Yu. V. Grats and P. Spirin, Eur. Phys. J. C **77**, 101 (2017).
8. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность* (Мир, Москва, 1978) [M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis. Self-Adjointness* (Academic-Press, New-York, London, 1975)].
9. С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике* (Мир, Москва, 1991) [S. Albeverio, F. Gesztezy, R. Hoeg-Krohn, H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics* (World Sci., Singapore, 1995)].
10. D. M. Gitman, I. V. Tyutin, and B. L. Voronov, *Self-Adjoint Extensions in Quantum Mechanics* (Springer, 2012).
11. R. W. Jackiw, *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics, Advanced Series in Mathematical Physics* (World Sci., Singapore, 1995), Sect. 13.
12. Н. Биррелл, П. Девис, *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени* (Мир, Москва, 1984) [N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982)].
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, Москва, 1971).

VACUUM POLARIZATION IN A ZERO-RANGE POTENTIAL FIELD

Yu. V. Grats

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia

We analyze the effects of vacuum polarization associated with a massless scalar field near a point source with a zero-range potential in a four-dimensional Minkowski space. With the use of the self-adjoint extension technique we compute the renormalized vacuum expectation value of the field square $\langle\phi^2(x)\rangle_{\rm ren}$ and the renormalized vacuum averaged of the scalar-field's energy-momentum tensor $\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle_{\rm ren}$.