ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2019, том 82, № 3, с. 267–276

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ CP-НАРУШЕНИЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ И СТАНДАРТНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ МАТРИЦЫ СМЕШИВАНИЯ НЕЙТРИНО

© 2019 г. А. А. Давыдова, К. В. Жуковский*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Россия

Поступила в редакцию 20.11.2018 г.; после доработки 20.11.2018 г.; принята к публикации 20.11.2018 г.

Проводится сравнительный анализ смешивания нейтрино в стандартной, кобимаксимальной, трибимаксимальной и экспоненциальной параметризациях. В соответствии с последними экспериментальными данными о смешивании нейтрино находится логарифм матрицы смешивания и точные значения каждого элемента экспоненциальной матрицы смешивания нейтрино, которая позволяет факторизовать вклады чисто вращательных компонент матрицы смешивания и ее элементов, отвечающих за CP-нарушение. Подтверждается гипотеза дополнительности смешивания кварков и нейтрино. С помощью инварианта Ярлског исследуется зависимость CP-нарушения от параметров матрицы смешивания в различных параметризациях, а также взаимосвязь между самими параметрами. С использованием экспоненциальной параметризации матрицы смешивания исследуются представление последней в качестве элемента группы $SU(3)$ с параметрами φ и θ и их зависимости от степени CP-нарушения.

DOI: 10.1134/S0044002719020041

1. ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель [1–3] успешно объясняет многие явления физики элементарных частиц. В ее рамках изначально предполагалось, что нейтрино имеют нулевую массу и левую киральность. Однако открытие нейтринных осцилляций [4, 5] позволило сделать вывод о том, что нейтрино не является безмассовой частицей, при том, что ее масса оказывается на много порядков меньше масс других элементарных частиц. Наиболее естественным способом введения в стандартную модель малой массы нейтрино является добавление в лагранжиан модели правых (RH) или стерильных нейтрино:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\bar{e}_L v_d Y_e^* e_R - \bar{v}_L v_u Y_v^* v_R - \\ - \frac{1}{2} v_R^T M_{RR}^* v_R + \text{H.c.}, \tag{1}$$

где e_L, e_R, v_L, v_R — поля левых и правых заряженных лептонов и нейтрино, Y_e, Y_v — матрицы из безразмерных констант юкавского взаимодействия для заряженных лептонов и нейтрино, M_{RR} — майорановская массовая матрица, $\langle H_u^2 \rangle = v_u$, $\langle H_d^1 \rangle = v_d$ — вакуумные средние значения поля Хиггса. Правые нейтрино являются скалярами относительно группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ и имеют массу порядка 10^{16} ГэВ, что не позволяет их наблюдать в современных экспериментах. Такой механизм возникновения малой массы наблюдаемых нейтрино называется качельным механизмом [6, 7]. Массовое слагаемое для нейтрино после исключения из него правых нейтрино с помощью уравнений движения будет содержать недиагональную комплексную массовую матрицу [7]:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}(\nu)} = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_{eL}\bar{\nu}_{\mu L}\bar{\nu}_{\tau L}) \times \\ \times m_{LL}^{\nu}(\nu_{eL}^e \nu_{\mu L}^e \nu_{\tau L}^e) + \text{H.c.}, \tag{2}$$

где $m_{LL}^{\nu} = -\nu_u^2 Y_\nu \text{diag}\left(M_1^{-1}, M_2^{-1}, M_3^{-1}\right) Y_\nu^T$ и $\text{diag}\,(M_1, M_2, M_3) = V_{\nu_R} M_{RR}^* V_{\nu_R}^T$. Это обуславливает нарушение CP-инвариантности действия в стандартной модели и нарушение закона сохранения лептонных чисел для каждого поколения. Наличие недиагональных компонент в массовой матрице приводит к смешиванию нейтрино. Это означает, что существует такое унитарное преобразование нейтринных полей, после которого массовая матрица становится диагональной. Новые поля будут собственными массовыми состояниями нейтрино, т.е. имеющими определенную массу. Наблюдаемые флейворные состояния нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ представляют собой линейную комбинацию массовых состояний нейтрино ν_1, ν_2, ν_3, переход к которым описывается унитарной матрицей смешивания $\mathbf{U}$ Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты

*E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

(PMNS) [8]:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,2,3} \mathbf{U}^*_{\alpha i}|\nu_i\rangle, \quad \mathbf{U}_{\alpha i} \equiv \langle\nu_\alpha|\nu_i\rangle, \qquad (3)$$
$$\alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

Амплитуда вероятности перехода данного флейвора α в массовое собственное состояние i пропорциональна $|U_{\alpha i}|^2$. Аналогичное смешивание присутствует и в кварковом секторе; оно несколько меньше и описывается матрицей $\mathbf{V}$ Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (CKM). Наиболее распространенной формой матрицы смешивания является трехфлейворное стандартное смешивание по схеме Chau–Keung (CK) [9]:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta_{CP}} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\alpha} & \\ & & e^{i\beta} \end{pmatrix} = \qquad (4)$$
$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\alpha} & \\ & & e^{i\beta} \end{pmatrix} = \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{st}}\mathbf{P}_{\text{Mjr}},$$

где $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $i = 1, 2, 3$, θ_{ij} — углы смешивания (см. рис. 1), δ_{CP} — CP-нарушающая фаза, $\mathbf{P}_{\text{Mjr}} = \text{diag}(1, e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ — матрица фаз майорановского нейтрино.

Можно построить еще 11 матриц смешивания, похожих на (4) и различающихся только положением комплексной фазы и порядком сомножителей (см. [9]). Также были предложены модели смешивания, основанные на различных симметриях, например, бимаксимальная (BM) матрица, связанная с дискретной группой симметрий тетраэдра S_4, для которой $\sin\theta_{13} = 0$, $\sin^2\theta_{12} = \sin^2\theta_{23} = 1/2$, и трибимаксимальная (TBM) матрица, основанная на группах симметрий A_4 и S_4 [10], где $\sin\theta_{13} = 0$, $\sin^2\theta_{23} = 1/2, \sin\theta_{12} = 1/\sqrt{3}$:

$$\mathbf{U}_{\text{BM}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{U}_{\text{TBM}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

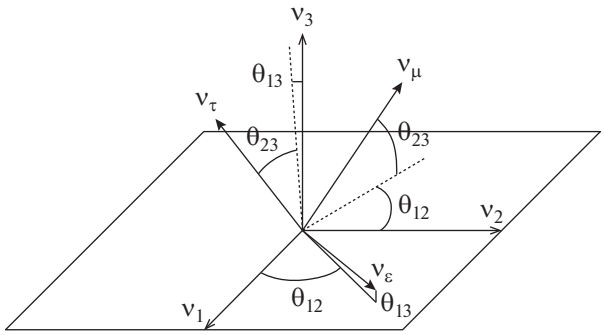

Рис. 1. Углы смешивания нейтрино (без CP-нарушения) могут быть представлены как углы Эйлера, связывающие базис ν_1, ν_2, ν_3 с базисом ν_e, ν_μ, ν_τ.

Трибимаксимальная матрица $\mathbf{U}_{\text{TBM}}$ (5) (см. [10]) согласуется с экспериментальными данными лучше, чем $\mathbf{U}_{\text{BM}}$, но она не вполне точно описывает измеренные углы смешивания. В связи с этим были введены малые поправки, описывающие отклонения от TBM матрицы [9]. Существует также кобимаксимальная (CBM) форма записи матрицы смешивания [11], в которой фиксируются два параметра: $\theta_{23} = \frac{\pi}{4}$ и $\delta_{CP} = \pm\frac{\pi}{2}$. Она получается из стандартной параметризации (4):

$$\mathbf{U}_{\text{CBM}} = \qquad (6)$$
$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & \mp is_{13} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(s_{12} \pm ic_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}(c_{12} \mp is_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{13} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(s_{12} \mp ic_{12}) & -\frac{\sqrt{2}}{2}(c_{12} \pm is_{12}) & \frac{\sqrt{2}}{2}c_{13} \end{pmatrix}.$$

Для кварков из-за малого смешивания и CP-нарушения соответствующая матрица смешивания

V близка к единичной. Малые параметры отклонения от единичной матрицы λ, A, ρ, η были введены Вольфенштейном [12]. Для нейтрино был также предложен способ определения малых поправок, выраженных через параметры Вольфенштейна с использованием эмпирических соотношений [13], — кварк-лептонная комплементарность (Quark-lepton complementarity (QLC)) и лептонная комплементарность (Self-lepton complementarity (SC)) — которые связывают углы смешивания для кварков и нейтрино. В настоящей работе проверяется кварк-лептонная комплементарность с помощью параметризации матрицы смешивания в виде матричной экспоненты [14–20]. Мы будем рассматривать дираковские нейтрино, так что $\alpha = \beta = 0$. Таким образом, матрица смешивания $\mathbf{U}$ полностью определяется четырьмя параметрами: углами смешивания θ_{12}, θ_{23}, θ_{13} и фазой δ_{CP}, соответствующей CP-нарушению. С экспериментальными данными [21] матрица смешивания имеет следующее численное значение:

$$\mathbf{U}_{\text{best fit}} = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.548 & -0.087+0.120i \\ -0.323+0.073i & 0.601+0.049i & 0.726 \\ 0.456+0.068i & -0.578+0.045i & 0.672 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Абсолютные значения ее элементов изменяются в следующих пределах:

$$|\mathbf{U}|_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0.799 \to 0.844 & 0.516 \to 0.582 & 0.141 \to 0.156 \\ 0.242 \to 0.494 & 0.467 \to 0.678 & 0.639 \to 0.774 \\ 0.284 \to 0.521 & 0.490 \to 0.695 & 0.615 \to 0.754 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

2. ИНВАРИАНТ ЯРЛСКОГ

В силу унитарности матрицы смешивания справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{i=1,2,3} U_{i\alpha} U^*_{j\alpha} = \delta_{ij}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=e,\mu,\tau} U_{i\alpha} U^*_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

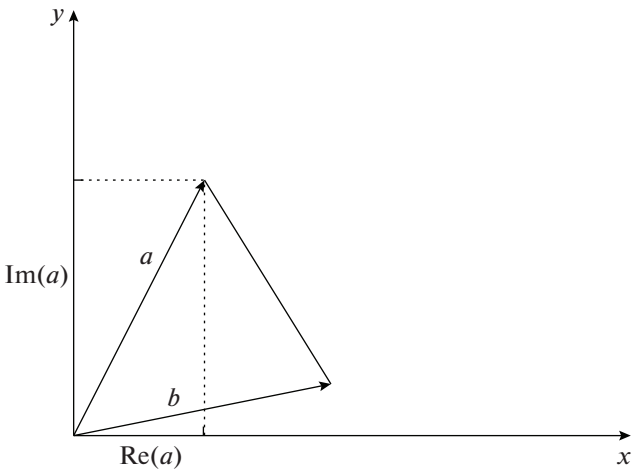

Рис. 2. Визуализация треугольника Ярлског на комплексной плоскости.

где $U_{\alpha i} \equiv \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle, \alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3$. Соотношения (9) можно представить как треугольники на комплексной плоскости (см. рис. 2) в трехмерном пространстве. Площадь такого треугольника (см. рис. 2) равна половине модуля векторного произведения векторов $\{\mathrm{Re}a, \mathrm{Im}a, 0\}$ и $\{\mathrm{Re}b, \mathrm{Im}b, 0\}$:

$$S = \frac{1}{2} \left| (\mathrm{Re}a)\,(\mathrm{Im}b) - (\mathrm{Re}b)\,(\mathrm{Im}a) \right| = \tag{10}$$
$$= \frac{1}{2} \left| \mathrm{Im}\,(ab^*) \right| = \frac{1}{2} \left| \mathrm{Im}\,(a^*b) \right|.$$

Взяв в качестве чисел $a = \mathbf{U}_{e1}\mathbf{U}^*_{e3}$ и $b = -\mathbf{U}_{\mu1}\mathbf{U}^*_{\mu3}$, получаем $S = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\mathbf{U}_{e1}\mathbf{U}^*_{e3}\mathbf{U}^*_{\mu1}\mathbf{U}_{\mu3})\right|$. В силу унитарности матрицы $\mathbf{U}$ справедливо равенство $\mathbf{U}^*_{e3}\mathbf{U}_{e3} = -\mathbf{U}^*_{e1}\mathbf{U}_{\mu1} - \mathbf{U}^*_{e2}\mathbf{U}_{\mu2}$, из которого следует, что площадь $S = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}(\mathbf{U}_{e1}\mathbf{U}_{\mu2}\mathbf{U}^*_{e2}\mathbf{U}^*_{\mu1})\right| = \frac{1}{2}J$. Аналогичным образом можно вычислить площади других треугольников и показать, что их площади равны $1/2J$, где J — инвариант Ярлског [22]. Для матрицы $\mathbf{U}$ в виде (4) получим:

$$J = \mathrm{Im}(\mathbf{U}_{e1}\mathbf{U}_{\mu2}\mathbf{U}^*_{e2}\mathbf{U}^*_{\mu1}) = \cos\theta_{12}\sin\theta_{12} \times \tag{11}$$
$$\times \cos^2\theta_{13}\sin\theta_{13}\cos\theta_{23}\sin\theta_{23}\sin\delta_{CP}.$$

Поскольку J пропорционален $\sin\delta_{CP}$, то он отличен от 0 тогда и только тогда, если имеет место

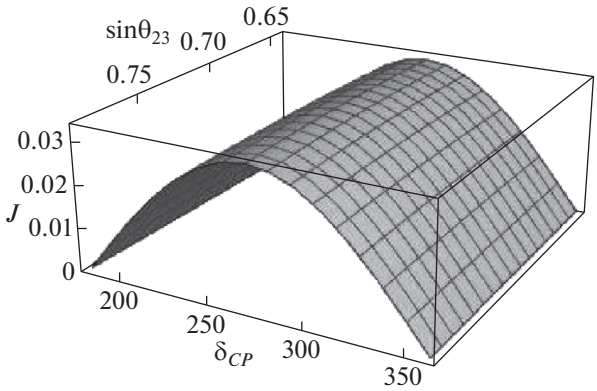

Рис. 3. Зависимость модуля J от $\sin\theta_{23}$ и δ_{CP} для нейтрино. Значения остальных параметров фиксированы в соответствии с экспериментальными данными [21].

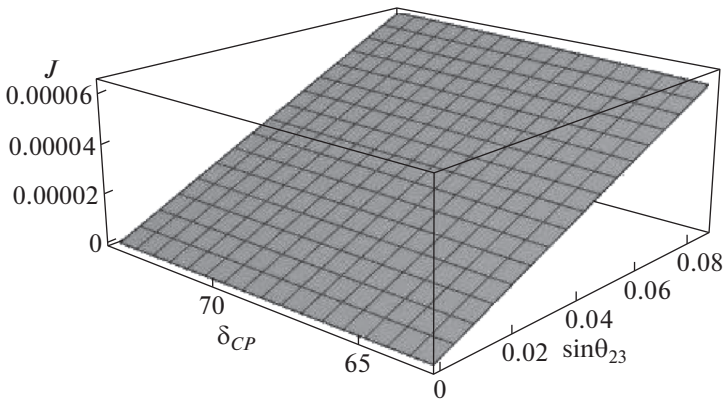

Рис. 4. Зависимость J от $\sin\theta_{23}$ и δ_{CP} для кварков.

нарушение CP-инвариантности. Фактически инвариант Ярлског представляет собой меру нарушения CP-инвариантности, которая не зависит от конкретного вида параметризации матрицы смешивания, и позволяет графически оценивать величину CP-нарушения; пример в стандартной параметризации на основе экспериментальных данных [21] приведен на рис. 3.

Выбор $\sin\theta_{23}$ и δ_{CP} в качестве изменяющихся величин на рис. 3 связан с тем, что они определены с меньшей точностью, чем другие. Диапазон изменения величин $\sin\theta_{23}$ и δ_{CP} совпадает с реальным разбросом их значений в пределах точности 3σ (см. (8)). Вычисления J для реальных углов смешивания дают абсолютное значение $J_\nu = 0.027^{+0.0065}_{-0.0270}$, что примерно совпадает со значением из [21]. Для кварков масштаб CP-нарушения оказывается примерно на три порядка меньше (см. рис. 4). По данным PDG 2018 г. для кварков экспериментальное значение инварианта Ярлског составляет $J_q = (3.18 \pm 0.15) \times 10^{-5}$ (см. рис. 4). Зависимость инварианта Ярлског J от соответствующих параметров $\sin\theta_{12}$ и $\sin\theta_{13}$ в СВМ-параметризации (6) на рис. 5 исправляет ранее полученный в [11] результат.

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Матрицу смешивания можно записать в виде матричной экспоненты [14]:

$$\mathbf{U}_{\exp} = \exp \mathbf{A}. \tag{12}$$

Достоинство экспоненциальной параметризации (12) заключается в том, что она позволяет факторизовать вклады вращения и CP-нарушения в виде новой унитарной параметризации:

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}_{\mathrm{Rot}}\mathbf{P}_{CP}\mathbf{P}_{\mathrm{Mjr}}, \tag{13}$$

где вращению отвечает $\mathbf{P}_{\mathrm{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}}$, $\mathbf{P}_{\mathrm{Mjr}}$ присутствует у майорановских нейтрино и нами не рассматривается, а за CP-нарушение отвечает экспоненциальная матрица $\mathbf{P}_{CP} = e^{\mathbf{A}_{CP}}$; ее показатель $\mathbf{A}_{CP}$ — соответственно CP-нарушающие компоненты матрицы $\mathbf{A}$. Зная экспериментальные значения для смешивания (7), можно получить матрицу $\mathbf{A}$ в показателе экспоненты, вычислив логарифм матрицы смешивания. Существует несколько

методов вычисления матричных логарифмов (см., например, [22, 23]); программы аналитических вычислений, такие как Mathematica, также позволяют это сделать. По данным на 2018 г. [21] углы смешивания для нейтрино составляют:

$$\theta_{12} \cong 33.62^{\circ+0.78^\circ}_{-0.76^\circ}, \theta_{23} \cong 47.2^{\circ+1.9^\circ}_{-3.9^\circ}, \qquad (14)$$

$$\theta_{13} \cong 8.54^{\circ+0.15^\circ}_{-0.15^\circ}, \delta_{CP} \cong 234^{\circ+43^\circ}_{-31^\circ}.$$

Исходя из значений (14), получаем экспоненту матрицы смешивания (12) в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.0195381i & 0.515348 + 0.043224i & -0.321446 + 0.110995i \\ -0.515346 + 0.043224i & 0.0387475i & 0.771994 + 0.026604i \\ 0.321446 + 0.110995i & -0.771994 + 0.026604i & -0.0192094i \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Таким образом, экспоненциальная параметризация матрицы (3) с данными (8) есть формула (12) с $\mathbf{A}$ (15); она *точно* воспроизводит экспериментальные данные (8). Диагональные элементы матрицы $\mathbf{A}$ (15) малы, ее след точно равен нулю: $\mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$, и она представима в виде следующей суммы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{Rot}} + \mathbf{A}_{CP_1} + \mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}, \qquad (16)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}} = \mathrm{Re}\,[\mathbf{A}] = \qquad (17)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.515348 & -0.321446 \\ -0.515348 & 0 & 0.771994 \\ 0.321446 & -0.771994 & 0 \end{pmatrix},$$

где (17) описывает действительное вращение, а CP-нарушение описывает матрица

$$\mathbf{A}_{CP_1} = i\mathrm{Im}[\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}] = \qquad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.0432243i & 0.110995i \\ 0.0432243i & 0 & 0.0266036i \\ 0.110995i & 0.0266036i & 0 \end{pmatrix}.$$

Мнимая диагональ матрицы $\mathbf{A}$ (15) в (16) представлена матрицей

$$\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}} = i\mathrm{diag}\,\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \qquad (19)$$

в которой элементы 1 и 3 почти точно равны друг другу и составляют практически точно половину величины матричного элемента $\mathbf{A}_{22}$:

$$\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2, \quad \alpha_2 = 0.0387475i. \qquad (20)$$

Заметим, что соотношения (20) для матричных элементов с экспериментальными результатами 2018 г. [21] выполняются точнее, чем с результатами 2016 г. [25]:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im2016}} = \qquad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.0253631i & 0 & 0 \\ 0 & 0.0502214i & 0 \\ 0 & 0 & -0.0248582i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im2018}} = \qquad (22)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.0195381i & 0 & 0 \\ 0 & 0.0387475i & 0 \\ 0 & 0 & -0.0192094i \end{pmatrix}.$$

По данным 2016 г. отклонение значений α_1 и α_3 от значения $-\alpha_2/2$ составляет 2.524×10^{-4} ($\approx$1%), на 2018 г. оно стало меньше: 1.6435×10^{-4}($\approx$0.8%). Мнимая диагональ $\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}$ (19) дает комплексную диагональную экспоненциальную матрицу

$$\mathbf{P}_{\mathrm{diag\,Im}} = \qquad (23)$$

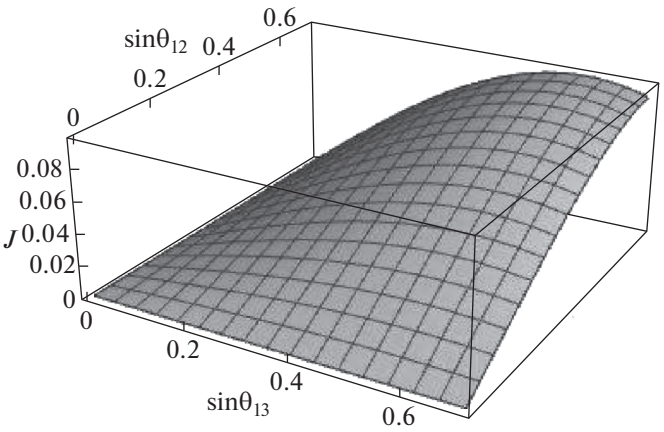

Рис. 5. Зависимость J от $\sin\theta_{12}$ и $\sin\theta_{13}$ в СВМ-параметризации (6).

$$= \exp[\mathbf{A}_{\text{diagIm}}] = \text{diag}\left\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}\right\}.$$

Матрица $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{CP_1}$ (см. (16)) представляет сумму слагаемого $\mathbf{A}_{\text{Rot}}$ (17), отвечающего за смешивание без CP-нарушения и соответствующее ему вращение вокруг действительной оси, и слагаемого $\mathbf{A}_{CP_1}$ (18), отвечающего за CP-нарушение и соответствующее ему вращение вокруг мнимой оси. Для $\delta_{CP} = 234°$ имеем:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{CP_1} = \tag{24}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.517e^{i5°} & 0.340e^{i161°} \\ -0.517e^{-i5°} & 0 & 0.772e^{i2°} \\ -0.340e^{-i161°} & -0.772e^{-i2°} & 0 \end{pmatrix}.$$

Абсолютные значения элементов матрицы $\mathbf{A}_1$ (24) с учетом экспериментального разброса 3σ (8) могут меняться в следующих пределах:

$$|\mathbf{A}_1|_{3\sigma} = \tag{25}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0.439 \to 0.552 & 0.324 \to 0.421 \\ 0.439 \to 0.552 & 0 & 0.629 \to 0.836 \\ 0.324 \to 0.421 & 0.629 \to 0.836 & 0 \end{pmatrix}.$$

Экспоненциальная матрица смешивания является антиэрмитовой, что обеспечивает унитарность матрицы смешивания: $\mathbf{U}_{\text{exp}}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{U}_{\text{exp}}^{+} \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{I}$.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ СМЕШИВАНИЯ НЕЙТРИНО И КВАРКОВ

Для действительной матрицы $\mathbf{A}_{\text{Rot}}$ вращения $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}}$ существует представление вращения вокруг выделенной оси в трехмерном пространстве в следующем виде:

$$\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}} = e^{\begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix}} = \tag{26}$$

$$= e^{\Phi\begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}}.$$

Легко посчитать координаты вектора $\mathbf{n} = \left(-\frac{\nu}{\Phi}, \frac{\mu}{\Phi}, -\frac{\lambda}{\Phi}\right)$, а также угол поворота $\Phi = \pm\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$. Так для трибимаксимальной матрицы получаем

$$\mathbf{n}_{\text{TBM}} = (0.7858, 0.2235, 0.5777), \tag{27}$$
$$\Phi_{\text{TBM}} \cong 56.6°.$$

В зависимости от экспериментальных данных для нейтрино угол Φ и ось поворота $\mathbf{n}_\nu$ меняются. По данным PDG 2016 г. имеем (в диапазоне погрешности 3σ):

$$\mathbf{n}_\nu^{2016} = (0.8094, 0.2417, 0.5353), \tag{28}$$
$$\Phi_\nu^{2016} \cong 59.06^{\circ +4.36°}_{-9.67°};$$

по данным на 2018 г. получаем:

$$\mathbf{n}_\nu^{2018} = (0.7859, 0.3272, 0.5246), \tag{29}$$
$$\Phi_\nu^{2018} \cong 56.28^{\circ +4.58°}_{-6.48°}.$$

Для кварков на основе данных PDG за 2017 г. имеем:

$$\mathbf{n}_q^{2017} = (0.1810, 0.0141, 0.9834), \tag{30}$$
$$\Phi_q^{2017} = 13.23^{\circ +0.02°}_{-0.03°}.$$

Сопоставление координат вектора и угла вращения в (28), (29) друг с другом показывает, что они довольно сильно различаются из года в год. Угол поворота (27) для TBM-матрицы стал ближе по значению к углу поворота (29), вычисленного с новыми данными. Однако сравнение направления вектора действительного вращения для нейтрино в отсутствие CP-нарушения с направлением аналогичного вектора вращения для кварков в рамках той же экспоненциальной параметризации показывает, что угол между вектором для кварков $\mathbf{n}_q$ и вектором для нейтрино $\mathbf{n}_\nu$ составлял 45.8° по данным на май 2016 г., 48.5° на январь 2018 г. и 43.6° для TBM-матрицы. Таким образом, наблюдается постоянство величины угла между $\mathbf{n}_q$ и $\mathbf{n}_\nu$ (см. рис. 6), с хорошей точностью равного 45° даже при сильном разбросе экспериментальных данных по смешиванию нейтрино из года в год.

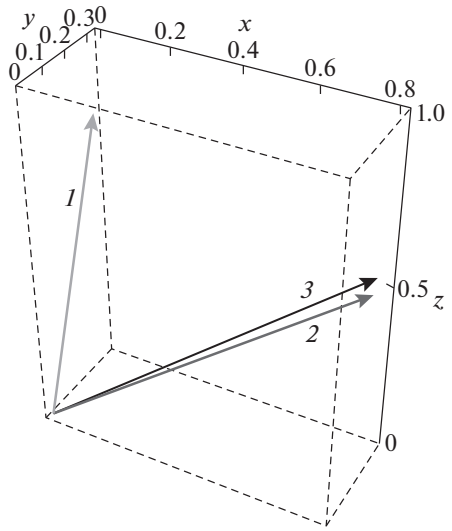

Рис. 6. Оси вращения в пространстве для смешивания кварков (*1*), нейтрино по данным на май 2016 г. (*2*) и январь 2018 г. (*3*).

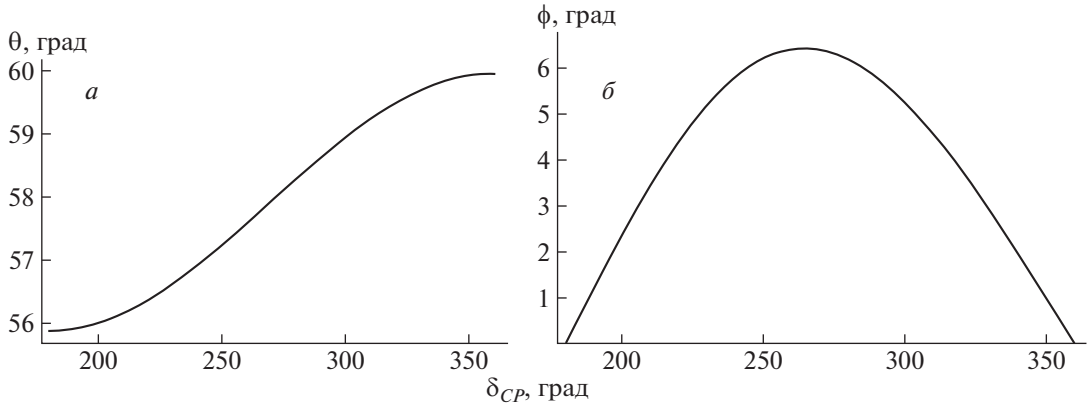

Рис. 7. *а* — Зависимость θ от CP-нарушающей фазы δ_{CP}. *б* — Та же зависимость для угла φ.

5. МАТРИЦА СМЕШИВАНИЯ КАК ЭЛЕМЕНТ ГРУППЫ $SU(3)$

Матрица смешивания $\mathbf{U}$, являясь элементом группы $SU(3)$, может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{U} = \exp[i\theta\mathbf{H}], \tag{31}$$

через параметр θ вращения группы и антиэрмитову матрицу $\mathbf{H}$, принадлежащую соответствующей алгебре группы с нормировкой $\mathrm{tr}[\mathbf{H}^2] = 2$. С помощью вычислений в программе Mathematica получаем в явном виде

$$\mathbf{H} = \tag{32}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.020 & 0.044 - 0.520i & 0.112 + 0.325i \\ 0.044 + 0.520i & 0.039 & 0.027 - 0.779i \\ 0.112 - 0.325i & 0.027 + 0.779i & -0.019 \end{pmatrix}.$$

Инвариант, $\det(\mathbf{H}) = -0.109$, может быть переопределен в терминах угла φ [26]:

$$\varphi = \frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\det(\mathbf{H})\right) - \frac{\pi}{2}\right). \tag{33}$$

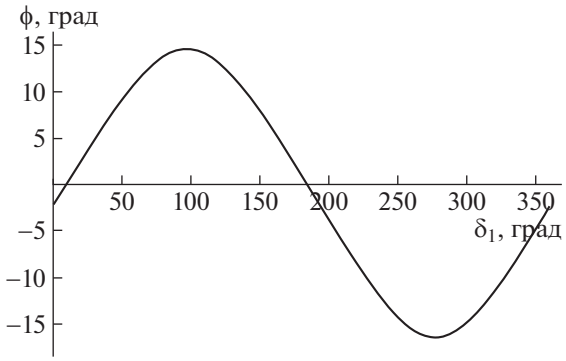

Рис. 8. Связь угла φ с фазой δ_1 в экспоненциальной матрице (24).

Выделим в экспоненциальной параметризации матрицы смешивания $\mathbf{U}_{\exp} = \exp\mathbf{A}$ множитель $i\theta$ так, чтобы привести (12) в соответствие с выражением (31). Тогда с учетом нормировки $\mathrm{tr}[\mathbf{H}^2] = 2$ получаем для параметра θ следующее выражение:

$$\theta = \left(-\mathrm{tr}\left[\mathbf{A}^2/2\right]\right)^{1/2}, \tag{34}$$

определяющее по существу угол поворота в группе $SU(3)$. Используя экспериментальные данные 2016 г., можно вычислить значения соответствующих углов для нейтрино [25]:

$$\theta_{\nu 2016} = 59.74^{\circ+4.15^\circ}_{-8.06^\circ}, \quad \varphi_\nu^{2016} = 6.05^{\circ+5.74^\circ}_{-6.05^\circ}. \tag{35}$$

По новым данным для нейтрино на 2018 г. [21]

$$\theta_{\nu 2018} = 56.75^{\circ+3.26^\circ}_{-7.23^\circ}, \quad \varphi_\nu^{2018} = 5.49^{\circ+4.36^\circ}_{-5.49^\circ}, \tag{36}$$

а для кварков получаем:

$$\theta_q = 13.23^{\circ+0.02^\circ}_{-0.02^\circ}, \quad \varphi_q = -0.25^{\circ+0.01^\circ}_{-0.01^\circ}. \tag{37}$$

Полученная нами зависимость параметров матрицы смешивания нейтрино как элемента группы $SU(3)$ от CP-нарушающей фазы δ_{CP} приведена на рис. 7.

Также можно исследовать связь элементов данной группы с параметрами экспоненциальной параметризации, в частности, с углами, находящимися в показателях экспонент матрицы (24). Установив в (31)–(34) соответствие матрицы смешивания как элемента группы $SU(3)$ (31) и ее экспоненциальной формы (12), мы продемонстрировали на рис. 8 зависимость параметра φ (33) от определяющего CP-нарушение угла δ_1 в элементах (1, 3) и (3, 1) матрицы $\mathbf{A}_1$ (24).

На основании экспериментальных данных с учетом вида (24) матрицы $\mathbf{A}_1$ имеем $\delta_1 = 161^\circ$, $\delta_2 = 5^\circ$, $\delta_3 = 2^\circ$. Угол θ по построению (34) не зависит от недиагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$, следовательно, он не будет зависеть от δ_1, δ_2,

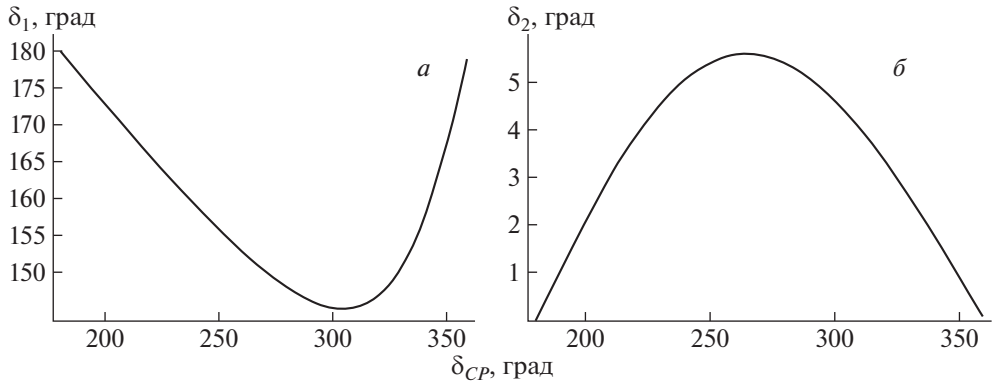

Рис. 9. Зависимость δ_1 (*а*) и $\delta_{2,3}$ (*б*) от δ_{CP}.

δ_3. Так как реальные значения угла δ_1 с учетом разброса лежат в пределах $[145.3°–180°]$, то видно, что φ (33) не будет достигать своего максимального значения и будет почти равен 0 для $\delta_1 = 180°$. Связь значений $\delta_{1,2}$ в матрице $\mathbf{A}_1$ (24) с CP-нарушающей фазой δ_{CP} представлена на рис. 9. Анализ зависимости δ_1 (рис. 9*а*) и $\delta_{2,3}$ (рис. 9*б*) от δ_{CP} показывает, что для δ_1 минимальным значением является 145.3°, при этом $\delta_{CP} = 305.7°$, а реальному значению $\delta_{CP} = 234°$ соответствует величина $\delta_1 = 160.6°$. Зависимости для δ_2 и для δ_3 от δ_{CP} получились практически одинаковыми.

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СВЯЗИ CP-НАРУШЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ МАТРИЦЫ СМЕШИВАНИЯ

Используя экспоненциальную параметризацию (12) матрицы $\mathbf{U}$, можно исследовать зависимость инварианта Ярлског J как меры CP-нарушения от элементов матрицы $\mathbf{A}$ (15) экспоненты (12).

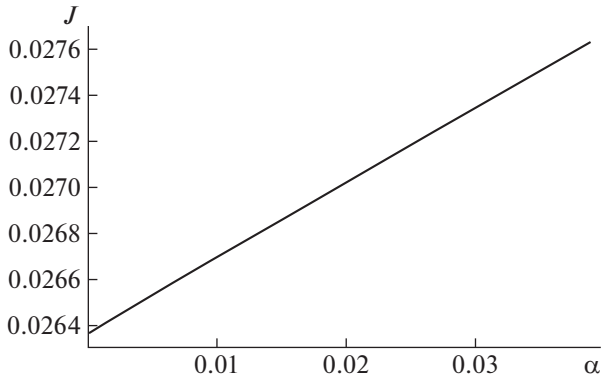

Рис. 10. Зависимость абсолютного значения инварианта Ярлског J от параметра мнимой диагонали α.

Представляет интерес вклад мнимой диагональной матрицы $\mathbf{A}_{\text{diag Im}} = i\text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, которая внешне напоминает вклад для майорановских частиц в (4), но происходит от CP-нарушения. Как было показано в (20), между элементами матрицы $\mathbf{A}_{\text{diag Im}}$ с высокой точностью выполняется соотношение $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2$. Поэтому матрицу $\mathbf{A}_{\text{diag Im}}$ можно параметризовать следующим образом:

$$\mathbf{A}_{\text{diag Im}} \cong i\text{diag}\{-\alpha, 2\alpha, -\alpha\}. \qquad (38)$$

Нами получена зависимость величины инварианта Ярлског от параметра α в (38), представленная на рис. 10, где величина α изменяется от 0 до значения α_2 в (20).

Поведение $J(\alpha)$ показывает (см. рис. 10), что, если положить элементы матрицы $\mathbf{A}_{\text{diag Im}}$ равными нулю, то инвариант Ярлског уменьшится несильно: он станет равным примерно $|J| = 0.0264$ (исходное значение $|J| = 0.027$); таким образом, оставшаяся кроме $\mathbf{A}_{\text{diag Im}}$ мнимая часть матрицы $\mathbf{A}$, т.е. матрица $\mathbf{A}_{CP_1}$ (18), в подавляющей степени отвечает за CP-нарушение. С учетом экспоненты $\mathbf{A}_{\text{Rot}}$ (17) матрицы действительного вращения $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{\text{Rot}} + \mathbf{A}_{CP_1}$ (см. (16)) CP-нарушение описывается в основном за счет $\delta_{1,2}$, в меньшей степени δ_3, в показателях экспонент в матрице (24). Построим зависимость $J(\delta_1, \delta_2)$. Результат представлен на рис. 11.

График на рис. 11 отражает разброс абсолютных значений инварианта Ярлског, который он может принимать, когда углы смешивания и CP-нарушающая фаза определены в интервале погрешности 3σ. Диапазон углов смешивания рассчитан в терминах δ_1, δ_2. Из рис. 11 очевидно, что определяющей для инварианта Ярлског J является зависимость от δ_1; влияние $\delta_{2,3}$ мало.

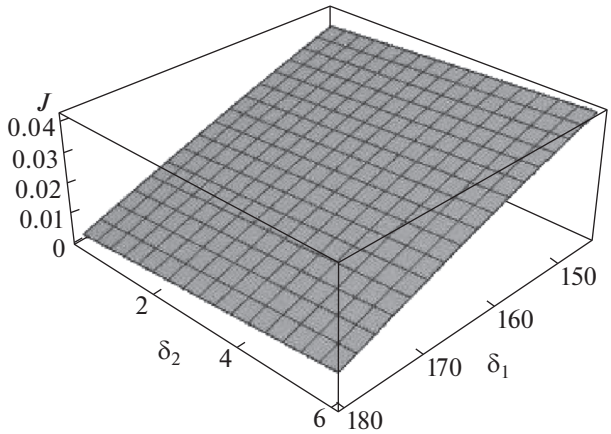

Рис. 11. Зависимость модуля J (δ_1, δ_2); δ_1 изменяется в диапазоне 145°–180°, для δ_2 от 0° до 6°, $\delta_3 = 2°$.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

С помощью экспоненциальной параметризации матрицы смешивания нейтрино проанализированы данные о смешивании из Particle Data Group 2016 и 2018 гг. Экспонента матрицы смешивания $\mathbf{A}$ содержит вещественную часть $\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}$, мнимую недиагональную часть $\mathbf{A}_{CP_1}$ и чисто мнимую диагональную часть $\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{Rot}} + \mathbf{A}_{CP_1} + \mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}$. Так как величины коммутаторов матриц $\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}$, $\mathbf{A}_{CP_1}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}$ малы, то можно факторизовать в экспоненциальной матрице смешивания $\mathbf{U}_{\exp} = \exp \mathbf{A}$ вклад CP-нарушения и вращения вокруг действительной оси: $\mathbf{U} = \mathbf{P}_{\mathrm{Rot}}\mathbf{P}_{CP}$, $\mathbf{P}_{\mathrm{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}}$, $\mathbf{P}_{CP} = e^{\mathbf{A}_{CP}} \cong e^{\mathbf{A}_{CP_1}}$. Экспонента $\mathbf{A}_{CP_1}$ матрицы CP-нарушения имеет нулевую диагональ и мнимые составляющие; она хорошо описывает CP-нарушение. Мнимая диагональ матрицы $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}} = i\mathrm{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_1 = -0.0195381$, $\alpha_2 = 0.0387475$, $\alpha_3 = -0.0192094$, напоминает вклад майорановских нейтрино, но происходит из-за CP-нарушения. Ее угловые элементы (1, 3) и (3, 1) примерно равны друг другу: $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2$, причем данное соотношение выполняется лучше, чем когда-либо ранее.

Проведено сравнение векторов и углов поворота для трибимаксимальной параметризации и для экспоненциальной параметризации по данным PDG 2016–2018 гг.: $\mathbf{n}_\nu^{\mathrm{TBM}} = (0.7858, 0.2235, 0.5777)$, $\Phi_\nu^{\mathrm{TBM}} \cong 56.6°$; $\mathbf{n}_\nu^{2016} = (0.809, 0.2417, 0.5353)$, $\Phi_\nu^{2016} \cong 59.06^{\circ+4.36^\circ}_{-9.67^\circ}$; $\mathbf{n}_\nu^{2018} = (0.786, 0.327, 0.5246)$, $\Phi_\nu^{2018} \cong 56.28^{\circ+4.58^\circ}_{-6.48^\circ}$. Несмотря на значительный разброс координат векторов $\mathbf{n}_\nu$ в разные года измерений (больше всего различаются $n_y \in [0.22, 0.33]$), взаимное расположение векторов $\mathbf{n}_\nu$ для нейтрино и $\mathbf{n}_q$ для кварков в экспоненциальной параметризации остается с высокой точностью $\approx 45°$, что подтверждает гипотезу кварк-лептонной дополнительности [27, 28].

Матрица смешивания нейтрино рассмотрена как элемент группы $SU(3)$: получены значения инварианта $\det(\mathbf{H}) = -0.109$, самой матрицы $\mathbf{H}$, соответствующего ей параметрического угла $\varphi_\nu^{2018} = 5.49^{\circ+4.36^\circ}_{-5.49^\circ}$ и значение угла $\theta_\nu^{2018} = 56.75^{\circ+3.26^\circ}_{-7.23^\circ}$ вращения в группе $SU(3)$. Разброс полученных значений соответствует экспериментальному разбросу 3σ. Исследована связь $SU(3)$ параметров θ и ϕ с углом δ_{CP} CP-нарушения в стандартной параметризации, а также связь ϕ с CP-нарушающей фазой в экспоненциальной параметризации (см. рис. 7–9). Угол θ по построению не зависит от значений $\delta_{1,2,3}$ в экспоненциальной параметризации.

Установлено соответствие между экспериментально определенной CP-фазой δ_{CP} в стандартной параметризации с CP-нарушением в экспоненциальной параметризации, для которой получена иерархия значений комплексных элементов (1, 3), (2, 3), (3, 2) матричной экспоненты с фазами $\delta_1 = 161°$, $\delta_2 = 5°$, $\delta_3 = 2°$. Наибольшее CP-нарушение приходится на смешивание электронных и таонных нейтрино. Для наиболее вероятного значения фазы $\delta_{CP} \approx 234°$ величина δ_1, определяющая главный вклад CP-нарушения в экспоненциальной параметризации, соответствует середине допустимого диапазона значений. Углы δ_2 и δ_3 зависят одинаково от δ_{CP} (см. рис. 9), что говорит о симметрии между процессами CP-нарушения при смешивании e- и μ-нейтрино и μ- и τ-нейтрино.

Проведен сравнительный анализ CP-нарушения в стандартной, трибимаксимальной, кобимаксимальной и экспоненциальной параметризациях с помощью инварианта Ярлског J. Исследована зависимость инварианта Ярлског J как меры нарушения CP-инвариантности от соответствующих фаз в стандартной и экспоненциальной формах матрицы смешивания (см. рис. 3–5 и рис. 10, 11). Сделан вывод, что определяющей для инварианта Ярлског является зависимость от $\sin\delta_{CP}$ в стандартной параметризации и от δ_1 в экспоненциальной параметризации.

Экспоненциальное представление матрицы смешивания и полученные на ее основе результаты и интерпретации могут быть полезны при анализе и обработке экспериментальных данных по осцилляциям нейтрино в экспериментах, проводимых как в настоящее время, так и планируемых в будущем.

Авторы благодарят проф. А.В. Борисова за ценные советы, полезные замечания и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
2. A. Salam, *Elementary Particle Theory*, Ed. by N. Svartholm (Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968).
3. S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
4. Б. Понтекорво, ЖЭТФ **33**, 549 (1958) [Sov. Phys. JETP **6**, 429 (1958)].
5. Б. М. Понтекорво, УФН **95**, 517 (1968) [Sov. Phys. Usp. **11**, 528 (1969)].
6. M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, in *Supergravity: Proceedings of the Supergravity Workshop, Stony Brook*, Ed. by D. Z. Freedman and P. van Nieuwenhuizen (North-Holland, Amsterdam, 1979), p. 315.
7. T. Fukuyama and H. Nishiura, hep-ph/9702253.
8. Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).
9. Y. Zhang, X. Zhang, and B.-Q. Ma, Phys. Rev. D **86**, 093019 (2012); arXiv: 1211.3198 [hep-ph].
10. S. F. King, J. Phys. G **42**, 123001 (2015); arXiv: 1510.02091.
11. A. Damanik, J. Phys.: Conf. Ser. **909**, 012024 (2017).
12. L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51**, 1945 (1983).
13. N. Li and B.-Q. Ma, Phys. Rev. D **71**, 097301 (2005); hep-ph/0501226.
14. G. Dattoli and K. Zhukovsky, Eur. Phys. J. C **50**, 817 (2007).
15. G. Dattoli and K. Zhukovsky, Eur. Phys. J. C **52**, 591 (2007).
16. K. Zhukovsky and F. Melazzini, Eur. Phys. J. C **76**, 462 (2016).
17. K. Zhukovsky and A. Borisov, Eur. Phys. J. C **76**, 637 (2016).
18. К. В. Жуковский, Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, Астрономия, № 5, 3 (2017) [Moscow Univ. Phys. Bull. **72**, 433 (2017)].
19. К. В. Жуковский, Ученые записки физического факультета Моск. ун-та, вып. 4, 1740902 (2017).
20. К. В. Жуковский, ЯФ **80**, 379 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 690 (2017)].
21. I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler, and Th. Schwetz, *NuFIT 3.2 (2018)*, www.nu-fit.org
22. C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. **55**, 1039 (1985).
23. A. Wouk, J. Math. Anal. Appl. **11**, 131 (1965).
24. T. A. Loring, Num. Linear Algebra Appl. **21**, 744 (2014).
25. M. C. Gonzalez-Garsia, M. Maltoni, and Th. Schwetz, *NuFIT 2.1 (2016)*, www.nu-fit.org
26. T. L. Curtright and C. K. Zachos, Rept. Math. Phys. **76**, 401 (2015).
27. H. Minakata and A. Yu. Smirnov, Phys. Rev. D **70**, 073009 (2004).
28. M. Raidal, Phys. Rev. Lett. **93**, 161801 (2004).

COMPARATIVE ANALYSIS OF *CP* VIOLATION FOR NEUTRINO IN THE EXPONENTIAL AND STANDARD PARAMETERIZATIONS OF MIXING MATRIX

A. A. Davydova, K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Russia

We perform the comparative analysis of neutrino mixing in standard, cobimaximal, tribimaximal, and exponential parameterizations. Using the latest experimental data on neutrino mixing, we find the logarithm of the mixing matrix and exact values for the entries of the exponential form of the PMNS matrix, which allows factorization of the terms, responsible for pure rotation and *CP* violation. We confirm quark—neutrino mixing complementarity. With Jarlskog invariant we study the dependence of the *CP* violation on mixing parameters in the considered parameterizations of the PMNS matrix; we also reveal the underlying relations between them. In the exponential parameterization we study the $SU(3)$ group presentation for the PMNS matrix, using the parameters θ and φ and their dependence on the *CP* violation.