

ФОРМФАКТОР ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ: СЛУЧАЙ РАВНЫХ МАСС И ВЕКТОРНОГО ТОКА

© 2019 г. Ю. Д. Черниченко*

*Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого;
Международный центр перспективных исследований, Гомель, Беларусь*

Поступила в редакцию 13.12.2018 г.; после доработки 13.12.2018 г.; принята к публикации 13.12.2018 г.

Получены новые выражения компонент формфактора составной системы двух релятивистских фермионов равных масс для случая векторного тока. Рассмотрение проводится в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

DOI: 10.1134/S0044002719040068

1. ВВЕДЕНИЕ

Для описания поведения формфакторов составных систем были предложены различные подходы (см., например, работы [1–5]). Однако остается актуальной задача ковариантного описания формфакторов составных систем во всей области энергий, а для этого необходимо знать ковариантные волновые функции относительного движения кварков. Такой ковариантный метод был предложен в работах [6–10]. Развитый в этих работах метод основан на релятивистском квазипотенциальном (РКП) подходе [11] в квантовой теории поля, который был предложен Логуновым и Тавхелидзе в рамках одновременной формулировки проблемы двух тел. Естественным развитием этого метода является модель, рассмотренная в работе [12]. Эта модель использует РКП-подход [13], возникающий в терминах ковариантной гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [14], путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в работе [15] для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс m . В этой модели учитывается как вклад в формфактор протона векторных мезонов, так и вклад от его центральной части, радиус которой равен комптоновской длине волны протона, играющей роль естественного масштаба.

В рамках трехмерного ковариантного формализма описания составных систем из двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс, развитого в [16], были получены выражения формфак-

торов релятивистских двухчастичных систем [17, 18]. Выражения упругих формфакторов связанной системы двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс для случая скалярного и векторного токов были получены в работах [19, 20]. Здесь также был использован РКП-подход на основе гамильтоновой формулировки квантовой теории поля [13, 14] путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс [21, 22].

Настоящая работа посвящена формфактору составной системы двух фермионов равных масс для случая векторного тока и может рассматриваться как продолжение работы [23], в которой исследовался формфактор для случая скалярного тока. Как и в работе [23], мы будем использовать РКП-подход [13, 24], основанный на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [14], путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс m [15].

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

В рамках РКП-подхода [13, 14, 24] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m_1 = m_2 = m$ полностью ковариантное двухчастичное трехмерное РКП-уравнение для волновой функции в конфигурационном представлении [15] для сферически

*E-mail: chyud@mail.ru; chern@gstu.by

симметричных потенциалов имеет вид [23, 25]¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(M_Q - \hat{H}_0)\psi_{M_Q}(\mathbf{r}) &= \\ &= V(\mathbf{r}; M_Q)\hat{A}\left(\frac{\hat{H}_0}{2m}\right)\psi_{M_Q}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $M_Q^2 = s_q = Q^2 = (q_1 + q_2)^2 = Q_0^2 - Q^2$, где $q_i, i = 1, 2$ — 4-импульсы составляющих, оператор

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= 2m \left[\text{ch} \left(i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{i\lambda}{r} \text{sh} \left(i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda^2}{2r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \exp \left(i\lambda \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

— оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\lambda\partial/\partial r)$, в то время как $\Delta_{\theta, \varphi}$ — его угловая часть, причем $\lambda = 1/m$ — комптоновская длина волны; квазипотенциал $V(\mathbf{r}; M_Q)$ является локальным в смысле геометрии Лобачевского, причем модуль радиуса-вектора \mathbf{r} ($\mathbf{r} = r\mathbf{n}, |\mathbf{n}| = 1$) — релятивистский инвариант, а оператор \hat{A} дается выражением

$$\hat{A}\left(\frac{\hat{H}_0}{2m}\right) = \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^2 + b \right], \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -\frac{1}{2} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases} \\ b &= \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ \frac{1}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ \frac{3}{4} & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \gamma_\mu \text{ (псевдовектор).} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение для радиальной волновой функции с относительным орбитальным моментом ℓ имеет вид²⁾

$$\begin{aligned} \left(\hat{H}_{0, \ell}^{\text{rad}} - \text{ch } \chi \right) \varphi_\ell(r, \chi) &= \\ &= -V(r)\hat{A}\left(\hat{H}_{0, \ell}^{\text{rad}}\right) \varphi_\ell(r, \chi), \end{aligned} \quad (5)$$

¹⁾Мы будем всюду использовать систему единиц, в которой положено: $\hbar = c = 1$.

²⁾Аналогичное уравнение для случая двух спиновых кварков равных масс было получено в [26] при ином определении волновой функции и квазипотенциала.

где

$$\hat{H}_{0, \ell}^{\text{rad}} = \text{ch} \left(i\lambda \frac{d}{dr} \right) + \frac{\lambda^2 \ell(\ell + 1)}{2r(r + i\lambda)} \exp \left(i\lambda \frac{d}{dr} \right) \quad (6)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана (2), оператор \hat{A} по-прежнему определяется выражениями (3) и (4), а χ — быстрота, которая параметризует импульс и энергию:

$$\begin{aligned} \Delta_{q, m\lambda_Q} &= m \text{sh } \chi \mathbf{n}_{\Delta_{q, m\lambda_Q}}, \quad |\mathbf{n}_{\Delta_{q, m\lambda_Q}}| = 1, \\ M_Q &= 2\Delta_{q, m\lambda_Q}^0, \quad \Delta_{q, m\lambda_Q}^0 = m \text{ch } \chi. \end{aligned}$$

Здесь временная и пространственная компоненты 4-вектора $\Delta_{q, m\lambda_Q} = \Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q$ из пространства Лобачевского с 4-вектором скорости составной частицы $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \boldsymbol{\lambda}_Q) = Q/\sqrt{Q^2}$ подчиняются преобразованиям Лоренца³⁾

$$\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} \mathbf{q} = \Delta_{q, m\lambda_Q} = \mathbf{q}(-)m\lambda_Q = \quad (7)$$

$$= \mathbf{q} - \lambda_Q \left(q_0 - \frac{\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\lambda}_Q}{1 + \lambda_Q^0} \right),$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q)^0 &= \Delta_{q, m\lambda_Q}^0 = q_0 \lambda_Q^0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\lambda}_Q = \\ &= \sqrt{m^2 + \Delta_{q, m\lambda_Q}^2}, \end{aligned}$$

причем все 4-импульсы принадлежат верхней полё массового гиперболоида

$$\Delta_{q, m\lambda_Q}^2 = \Delta_{q, m\lambda_Q}^{02} - \Delta_{q, m\lambda_Q}^2 = m^2. \quad (8)$$

3. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ФОРМФАКТОР ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ТОКА

Следуя работам [17, 18], основанным на работах [6–10], матричному элементу локального оператора векторного тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний с 4-импульсами Q, P двух релятивистских спиновых частиц равных масс может быть сопоставлено инвариантное выражение

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} | J_\nu | \mathcal{Q} \rangle &= \\ &= -\frac{z_1}{(2\pi)^3} \int d\tau_{\mathcal{P}} d\tau_{\mathcal{Q}} d^{(4)}k_1 d^{(4)}k_2 \times \\ &\times \Gamma_{\mathcal{P}}^{\alpha\beta+}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) S_\gamma^{(+)\alpha}(k_1, m) \times \\ &\times \frac{(k_1 + k_2)_\nu}{(\tau_{\mathcal{P}} + i\varepsilon)(\tau_{\mathcal{Q}} - i\varepsilon)} S_\delta^{(+)\gamma}(k_1', m) \times \end{aligned} \quad (9)$$

³⁾Напомним, что обозначение $\mathbf{q}(-)m\lambda_Q$ мы используем здесь и далее для операции сдвига в пространстве Лобачевского как пространства постоянной кривизны (см., например, работы [15, 22]).

$$\begin{aligned} & \times \Gamma_{\mathcal{Q}}^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) S_{\kappa}^{(+)\beta}(k_2, -m) \times \\ & \times \delta^{(4)}(-\mathcal{Q} + k'_1 + k_2 - \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) \times \\ & \times \delta^{(4)}(\mathcal{P} - k_1 - k_2 + \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Здесь $S^{(+)}(k_i, m) = \theta(k_{i0})(\hat{k}_i + m)\delta(k_i^2 - m^2)$ — положительно-частотные части спинорных функций Грина i -й составляющей с массой $m_1 = m_2 = m$, которая переносит 4-импульс $k_i(p_i, q_i, i = 1, 2)$, где $\hat{k}_i = k_i^\mu \gamma_\mu$, а γ_μ — матрицы Дирака ($\mu = 0, 1, 2, 3$), причем все 4-импульсы принадлежат верхней полё массового гиперлоида

$$k_i^2 = k_{i0}^2 - \mathbf{k}_i^2 = m^2, i = 1, 2. \quad (10)$$

Вершинные функции $\Gamma_{\mathcal{P}}^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}})$ и $\Gamma_{\mathcal{Q}}^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}})$ для простоты рассмотрения, как и в работах [23, 25, 26], имеют заданную спинорную структуру, пропорциональную матрице \hat{O} , т.е.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{P}}^{\alpha\beta}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) &= \hat{O}^{\alpha\beta} \Gamma_{\mathcal{P}}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}), \quad (11) \\ \Gamma_{\mathcal{Q}}^{\delta\kappa}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) &= \hat{O}^{\delta\kappa} \Gamma_{\mathcal{Q}}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \dots, \kappa$ — биспинорные индексы, пробегающие значения 0, 1, 2, 3, причем матрица \hat{O} не зависит от импульсных переменных и шпур $\text{Sp}\hat{O}^2 \neq 0$, а в качестве \hat{O} выбираются матрицы Дирака $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Такой выбор матрицы \hat{O} позволил найти точные решения РКП-уравнения (1) и получить выражение для формфактора в случае скалярного тока [23, 25].

Выражению (9) отвечает диаграмма на рис. 1. Сплошные линии соответствуют ее составляющим, которые переносят 4-импульсы $k'_1, k_i, i = 1, 2$, а штриховые линии — квазичастицам-шпурионам. В качестве векторов 4-скорости составной частицы выбрали векторы $\lambda_{\mathcal{Q}} = (\lambda_{\mathcal{Q}}^0; \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{Q}/\sqrt{\mathcal{Q}^2} = \mathcal{Q}/M_{\mathcal{Q}}, M_{\mathcal{Q}}^2 = s_q = \mathcal{Q}^2 = (q_1 + q_2)^2$ и $\lambda_{\mathcal{P}} = (\lambda_{\mathcal{P}}^0; \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}/\sqrt{\mathcal{P}^2} = \mathcal{P}/M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{P}}^2 = s_p = \mathcal{P}^2 = (p_1 + p_2)^2$. Напомним, что из-за перехода к различным собственным временам системы до ($\tau_{\mathcal{Q}}$) и после взаимодействия ($\tau_{\mathcal{P}}$) диаграмма на рисунке отличается от диаграмм, которые возникают в подходе Кадышевского для S -матрицы. Также будут различны и векторы 4-скорости составной частицы до, $\lambda_{\mathcal{Q}}$, и после взаимодействия, $\lambda_{\mathcal{P}}$.

Опираясь на условия коллинеарности $\lambda_{\mathcal{Q}} \uparrow\uparrow \mathcal{Q}$, $\lambda_{\mathcal{P}} \uparrow\uparrow \mathcal{P}$ и законы сохранения

$$\begin{aligned} -\mathcal{Q} + k'_1 + k_2 - \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}} &= 0, \quad (12) \\ \mathcal{P} - k_1 - k_2 + \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}} &= 0, \end{aligned}$$

в работе [23] было установлено (см. также работы [19, 20]), что для связанной системы спиновых частиц, которые находятся в состоянии движения с

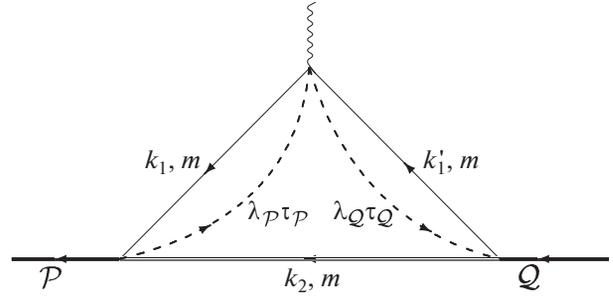


Рис. 1. Диаграмма для матричного элемента оператора векторного тока между связанными состояниями с 4-импульсами \mathcal{Q}, \mathcal{P} для случая двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

относительным орбитальным моментом J , скалярные части вершинных функций $\Gamma_{\mathcal{Q}}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}})$ и $\Gamma_{\mathcal{P}}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}})$ зависят каждая только от одного скалярного лоренц-инвариантного параметра, в качестве которого выберем $\mathcal{Q}k_2$ и $\mathcal{P}k_2$, и введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{Q}}(k'_1, k_2; \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) &= \Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{Q}k_2), \quad (13) \\ \Gamma_{\mathcal{P}}(k_1, k_2; \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) &= \Gamma_{M_{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}k_2). \end{aligned}$$

Теперь учтем, что в выражении для матричного элемента локального оператора векторного тока в (9) в общем случае будет присутствовать и его поперечная составляющая, которая приводит к нарушению условия поперечности [20]

$$(\mathcal{P} - \mathcal{Q})^\nu \langle \mathcal{P} | J_\nu | \mathcal{Q} \rangle = 0.$$

Поэтому 4-вектор в (9) представим в виде

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} | J_\nu | \mathcal{Q} \rangle &= \quad (14) \\ &= F^{(+)}(t)(\mathcal{P} + \mathcal{Q})_\nu + iF^{(-)}(t)(\mathcal{P} - \mathcal{Q})_\nu, \end{aligned}$$

причем при $\mathcal{Q}^2 = M_{\mathcal{Q}}^2$ и $\mathcal{P}^2 = M_{\mathcal{P}}^2$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} t = (\mathcal{P} - \mathcal{Q})^2 = -\mathcal{Q}^2 &= M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2 - 2\mathcal{P}\mathcal{Q}, \quad (15) \\ 2\mathcal{P}\mathcal{Q} &= M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2 - t, \end{aligned}$$

$$(\mathcal{P} + \mathcal{Q})^2 = M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2 + 2\mathcal{P}\mathcal{Q} = 2(M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2) - t.$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (11), (13)–(15), выполним в (9) интегрирования по $k'_{i0}, k_{i0}, i = 1, 2$, подобно тому как выполнялись интегрирования в работах [19, 20, 23]. В результате выражения для компонент формфактора принимают вид

$$\begin{aligned} F^{(+)}(t) &= -\frac{z_1}{(2M_{\mathcal{Q}}^2 + 2M_{\mathcal{P}}^2 - t)(4\pi)^3} \times \quad (16) \\ &\times \int \frac{d\tau_{\mathcal{P}} d\tau_{\mathcal{Q}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}_2^2}} \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{P}}}^*(\mathcal{P}k_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}'_1{}^2}(\tau_{\mathcal{P}} + i\varepsilon)} \times \\ &\times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m)(\hat{k}'_1 + m)\hat{O}(\hat{k}_2 - m)] \times \\ &\times (\mathcal{P} + \mathcal{Q})(k_1 + k'_1) \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{Q}k_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}'_1{}^2}(\tau_{\mathcal{Q}} - i\varepsilon)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta^{(4)}(-\mathcal{Q} + k'_1 + k_2 - \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) \delta^{(4)} \times \\ & \times (\mathcal{P} - k_1 - k_2 + \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) + (1 \leftrightarrow 2), \\ & F^{(-)}(t) = -\frac{z_1}{it(4\pi)^3} \times \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \times \int \frac{d\tau_{\mathcal{P}} d\tau_{\mathcal{Q}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}'_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}_2^2}} \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{P}}}^*(\mathcal{P}k_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}'_1^2}(\tau_{\mathcal{P}} + i\varepsilon)} \times \\ & \times \text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m)(\hat{k}'_1 + m)\hat{O}(\hat{k}_2 - m)] \times \\ & \times (\mathcal{P} - \mathcal{Q})(k_1 + k'_1) \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{Q}k_2)}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}'_1^2}(\tau_{\mathcal{Q}} - i\varepsilon)} \times \\ & \times \delta^{(4)}(-\mathcal{Q} + k'_1 + k_2 - \lambda_{\mathcal{Q}}\tau_{\mathcal{Q}}) \delta^{(4)} \times \\ & \times (\mathcal{P} - k_1 - k_2 + \lambda_{\mathcal{P}}\tau_{\mathcal{P}}) + (1 \leftrightarrow 2). \end{aligned}$$

Далее, в выражениях (16) и (17) проведем интегрирование по $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1, \tau_{\mathcal{Q}}, \tau_{\mathcal{P}}$. Для этого мы выполним чистые преобразования Лоренца $L = \Lambda_{\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^{-1}$ по формулам (7) соответственно в интегралах по $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_2(\mathbf{k}_1)$ и учтем, что

$$\Lambda_{\lambda_{\mathcal{Q}}}^{-1}\mathcal{Q} = (M_{\mathcal{Q}}; \mathbf{0}), \quad \Lambda_{\lambda_{\mathcal{P}}}^{-1}\mathcal{P} = (M_{\mathcal{P}}; \mathbf{0}),$$

$$\mathcal{Q}k_2 = M_{\mathcal{Q}}\Delta_{k_2, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0, \quad \mathcal{P}k_2 = M_{\mathcal{P}}\Delta_{k_2, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0,$$

а меры интегрирования

$$\begin{aligned} d\Omega_{\mathbf{k}_i} &= md\mathbf{k}_i/k_{i0} = d\Omega_{\Delta_{k_i, m\lambda_{\mathcal{Q}}}} = \\ &= md\Delta_{k_i, m\lambda_{\mathcal{Q}}}/\Delta_{k_i, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

полная энергия

$$\sqrt{s_k} = \Lambda_{\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^{-1}\sqrt{s_k} = \sqrt{s_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}}} = 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^0$$

и δ -функции в (16) и (17) на массовом гиперболоиде (10) инвариантны при преобразованиях Лоренца $\Lambda_{\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^{-1}$ (подробности см. в работах [19, 20, 23]). Кроме того, из законов сохранения (12) следуют формулы

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})} + M_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}{\sqrt{s_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}}}} = 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^0, \\ & \Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}} = \Delta_{k_2, m\lambda_{\mathcal{Q}(\mathcal{P})}}, \\ & (\mathcal{P} \pm \mathcal{Q})(k_1 + k'_1) = \frac{M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2 - t}{2M_{\mathcal{Q}}} \sqrt{s_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}}} \pm \\ & \pm \frac{M_{\mathcal{Q}}^2 + M_{\mathcal{P}}^2 - t}{2M_{\mathcal{P}}} \sqrt{s_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}}}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем все импульсы лежат на верхней полё массового гиперболоида (8). Формулы (18) также позволяют вычислить шпур с матрицами $\hat{O} = \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$):

$$\text{Sp}[\hat{O}^+(\hat{k}_1 + m)(\hat{k}'_1 + m)\hat{O}(\hat{k}_2 - m)] = \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & = -4m \left(\tilde{a}k_1k'_1 + \tilde{b}k'_1k_2 + \tilde{b}k_1k_2 + \tilde{a}m^2 \right) = \\ & = -2m \left\{ 4m^2(\tilde{a} - \tilde{b}) - \tilde{a}(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 - 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \tilde{b} \left[(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0)^2 + (2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0)^2 \right] \right\}, \end{aligned}$$

где параметры \tilde{a} и \tilde{b} (как и в работе [23]) даются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ 4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ -4 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5\gamma_\mu \text{ (псевдовектор);} \end{cases} \quad (20) \\ \tilde{b} &= \begin{cases} 1 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр);} \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор);} \\ 2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5\gamma_\mu \text{ (псевдовектор).} \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда, после выполнения в выражениях (16) и (17) чистых преобразований Лоренца $L = \Lambda_{\lambda_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P})}^{-1}$ и учета приведенных выше его свойств и соотношений (18) и (19), компоненты упругого формфактора запишутся в виде ($M_{\mathcal{Q}} = M_{\mathcal{P}} = M$)

$$F^{(+)}(t) = \frac{(z_1 + z_2)m(2M^2 - t)}{M(4M^2 - t)(2\pi)^3} \times \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \times \int d\Omega_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}} \Psi_M^*(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}) \left\{ 4m^2(\tilde{a} - \tilde{b}) - \right. \\ & - (\tilde{a} - \tilde{b}) \left[(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0)^2 + (2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0)^2 \right] + \\ & \quad \left. + 2\tilde{a}(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0)(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0) \right\} \times \\ & \times (2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 + 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0) \Psi_M(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}), \end{aligned}$$

$$F^{(-)}(t) = \frac{(z_1 + z_2)m(2M^2 - t)}{itM(2\pi)^3} \times \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \times \int d\Omega_{\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}} \Psi_M^*(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}) \left\{ 4m^2(\tilde{a} - \tilde{b}) - \right. \\ & - (\tilde{a} - \tilde{b}) \left[(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0)^2 + (2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0)^2 \right] + \\ & \quad \left. + 2\tilde{a}(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0)(2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0) \right\} \times \\ & \times (2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 - 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}^0) \Psi_M(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}), \end{aligned}$$

где волновая РКП-функция в пространстве моментов связана со скалярной частью вершинной функции в (13) соотношением

$$\begin{aligned} & \Psi_M(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}) = \\ & = \frac{\Gamma_{M_{\mathcal{Q}}}(\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}})}{2^{3/2}\sqrt{m}\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0(M_{\mathcal{Q}} - 2\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{Q}}}^0 + i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Вектор $\Delta_{k, m\lambda_{\mathcal{P}}}$ из пространства Лобачевского, реализующегося на верхней полё массового гиперболоида (8), может быть представлен в виде

[19, 20, 23]

$$\begin{aligned} \Delta_{k,m\lambda_P} &= \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \mathbf{k} = & (23) \\ &= V(\Lambda_{\lambda_Q}, \mathcal{P}) \Delta_{k,m\lambda_Q}(-) \frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \end{aligned}$$

где $V(\Lambda_{\lambda_Q}, \mathcal{P}) = \Lambda_{\lambda_P}^{-1} \Lambda_{\lambda_Q} \Lambda_{\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}}$ — матрица вигнеровского вращения, а пространственная и временная компоненты 4-вектора передачи импульса $\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ из пространства Лобачевского преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} &= \Lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{P} = \mathcal{P}(-) \mathcal{Q} = & (24) \\ &= \mathcal{P} - \frac{\mathcal{Q}}{M} \left(\mathcal{P}_0 - \frac{\mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}}{\mathcal{Q}_0 + M} \right) = \\ &= M \operatorname{sh} \chi_{\Delta} \mathbf{n}_{\Delta}, \\ \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^0 &= (\Lambda_{\mathcal{Q}}^{-1} \mathcal{P})^0 = \\ &= \frac{\mathcal{P}_0 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{P} \cdot \mathcal{Q}}{M} = \frac{\mathcal{P} \mathcal{Q}}{M} = M \operatorname{ch} \chi_{\Delta}, \\ \mathcal{P} &= M \operatorname{sh} \chi_{\mathcal{P}} \mathbf{n}_{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{Q} = M \operatorname{sh} \chi_{\mathcal{Q}} \mathbf{n}_{\mathcal{Q}}, \\ \mathcal{P}_0 &= M \operatorname{ch} \chi_{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{Q}_0 = M \operatorname{ch} \chi_{\mathcal{Q}}, \\ |\mathbf{n}_{\mathcal{P}}| &= |\mathbf{n}_{\mathcal{Q}}| = |\mathbf{n}_{\Delta}| = 1, \\ \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^2 &- \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^0 = M^2, \end{aligned}$$

где χ_{Δ} , $\chi_{\mathcal{P}}$, $\chi_{\mathcal{Q}}$ — соответствующие быстроты, а квадрат переданного 4-импульса t связан с вектором передачи импульса $\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ и быстротой χ_{Δ} соотношением

$$\begin{aligned} Q^2 &= -t = -(\mathcal{P} - \mathcal{Q})^2 = -2M^2 + & (25) \\ &+ 2M \sqrt{M^2 + \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^2} = 2M^2 (\operatorname{ch} \chi_{\Delta} - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, представление (23) вместе с формулами (24) и (25) означает, что выражения (21) и (22) для компонент упругого формфактора являются функциями инвариантной переменной $\Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}^2$ — квадрата вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского. Следовательно, они представляют собой свертки волновых функций в этом пространстве. Значит, компоненты упругого формфактора (21) и (22) можно представить в виде релятивистских фурье-образов от ковариантных волновых РКП-функций в конфигурационном представлении (подробности см. в работах [19, 20, 23])⁴⁾:

$$F^{(+)}(t) = \frac{16m^4(z_1 + z_2)(2M^2 - t)}{M(4M^2 - t)} \times \quad (26)$$

⁴⁾Подчеркнем, что ни при каких значениях параметров \tilde{a} и \tilde{b} выражения (26) и (27) не могут быть сведены к их аналогам для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс при $m_1 = m_2 = m$, которые были найдены в работе [20].

$$\begin{aligned} &\times \int d\mathbf{r} \xi^* \left(\frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right) \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ (\tilde{a} - \tilde{b}) \psi_M^*(\mathbf{r}) \frac{\hat{H}_0}{2m} \psi_M(\mathbf{r}) + \right. \\ &+ (\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\frac{\hat{H}_0}{2m} \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) - \\ &\left. - (\tilde{a} - \tilde{b}) \psi_M^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{(-)}(t) &= \frac{16m^4(z_1 + z_2)(2M^2 - t)}{-Mt} \times & (27) \\ &\times \int d\mathbf{r} \xi^* \left(\frac{m}{M} \Delta_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}, \mathbf{r} \right) \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ (\tilde{a} - \tilde{b}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\frac{\hat{H}_0}{2m} \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* + \right. \\ &+ (3\tilde{a} - \tilde{b}) \left[\frac{\hat{H}_0}{2m} \psi_M(\mathbf{r}) \right] \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^2 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* - \\ &\left. - (\tilde{a} - \tilde{b}) \psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^* \right\}, \end{aligned}$$

где функции

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left(\frac{p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{m} \right)^{-1 - ir/\lambda}$$

выполняют роль релятивистских плоских волн в пространстве Лобачевского и соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца.

Заметим, что если волновая РКП-функция $\psi_M(\mathbf{r})$ является вещественной функцией переменной r и отвечает вещественному потенциалу $V(r)$, то согласно уравнению (1) по крайней мере величина $\psi_M(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\hat{H}_0}{2m} \right)^3 \psi_M(\mathbf{r}) \right]^*$ не является вещественной. Следовательно, поперечная компонента $F^{(-)}(t)$ упругого формфактора в отличие от бесспинового случая [20] даже при равных массах ($m_1 = m_2 = m$) в нуль не обращается.

Для случая s -состояния ($\ell = 0$) составной системы из выражений (26) и (27) после интегрирования по угловым переменным получим ($\rho = rm$)

$$\begin{aligned} F_{\ell=0}^{(+)}(t) &= \frac{64\pi m^3(z_1 + z_2)(2M^2 - t)}{M(4M^2 - t)} \times & (28) \\ &\times \frac{\chi_{\Delta}}{\operatorname{sh} \chi_{\Delta}} \int_0^{\infty} d\rho \frac{\sin(\rho \chi_{\Delta})}{\rho \chi_{\Delta}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \operatorname{Re} \left\{ (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0^*(\rho, \chi) \hat{H}_{0,\ell=0}^{\operatorname{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) + (\tilde{a} + \tilde{b}) \times \right. \\ &\times \left[\hat{H}_{0,\ell=0}^{\operatorname{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) \right]^* \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\operatorname{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0^*(\rho, \chi) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi) \Big\}, \\
F_{\ell=0}^{(-)}(t) = & \frac{64\pi m^3 (z_1 + z_2)(2M^2 - t)}{-Mt} \times \quad (29) \\
& \times \frac{\chi\Delta}{\text{sh } \chi\Delta} \int_0^\infty d\rho \frac{\sin(\rho\chi\Delta)}{\rho\chi\Delta} \times \\
& \times \text{Im} \left\{ (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0(\rho, \chi) \left[\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) \right]^* + \right. \\
& + (3\tilde{a} - \tilde{b}) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi) \right]^* \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) - \\
& \left. - (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0(\rho, \chi) \left[\left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi) \right]^* \right\},
\end{aligned}$$

где поперечная компонента $F_{\ell=0}^{(-)}(t)$ упругого формфактора для действительных потенциалов обращается в нуль, а быстрота χ соответствует уровню n связанного состояния с энергией $M = M_n = 2m \text{ ch } \chi$.

4. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЙ РАДИУС ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

Инвариантный среднеквадратический радиус двухфермионной составной системы в терминах продольной компоненты формфактора (28) имеет классическую форму [12]

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{6\partial F_{\ell=0}^{(+)}(t)/\partial t|_{t=0}}{F_{\ell=0}^{(+)}(0)}. \quad (30)$$

Результат вычисления (28) в соответствии с (30) можно представить в виде⁵⁾

$$\langle r_0^2 \rangle = \frac{1}{M^2} \left[1 + \frac{\int_0^\infty d\rho \left(\rho^2 - \frac{3}{2} \right) R(\rho)}{\int_0^\infty d\rho R(\rho)} \right], \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}
R(\rho) = & \text{Re} \left\{ (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0^*(\rho, \chi) \hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) + \right. \\
& + (\tilde{a} + \tilde{b}) \left[\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \varphi_0(\rho, \chi) \right]^* \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^2 \varphi_0(\rho, \chi) - \\
& \left. - (\tilde{a} - \tilde{b}) \varphi_0^*(\rho, \chi) \left(\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}} \right)^3 \varphi_0(\rho, \chi) \right\},
\end{aligned} \quad (32)$$

а радиальная часть $\hat{H}_{0,\ell=0}^{\text{rad}}$ оператора свободного гамильтониана (2) определена в (6).

Таким образом, если для s -состояния функция $R(\rho)$ является знакопостоянной и $\int_0^\infty d\rho (\rho^2 - 3/2) R(\rho) > 0$, то она описывает не всю структуру составной частицы, а только область, лежащую на расстояниях, больших ее комптоновской длины волны $1/M$. При этом центральной сфере с $\langle r_0^2 \rangle = 1/M^2$ отвечает функция пространственного распределения вида $R(\rho) = \delta(\rho)/4\pi$, которая в соответствии с (28) приводит к величине вклада в формфактор от этой сферы, равного

$$F_{\ell=0}^{(+)}(t)|_{r_0=1/M} = \frac{16m^3 (z_1 + z_2)(2M^2 - t)}{M(4M^2 - t)} \frac{\chi\Delta}{\text{sh } \chi\Delta}.$$

Если же функция $R(\rho)$ является знакопостоянной, но $\int_0^\infty d\rho (\rho^2 - 3/2) R(\rho) < 0$, то ей будут отвечать отрицательные значения

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{M^2} \frac{\int_0^\infty d\rho \left(\rho^2 - \frac{3}{2} \right) R(\rho)}{\int_0^\infty d\rho R(\rho)}.$$

Отрицательные значения величина $\langle r^2 \rangle$ также будет принимать, когда функция $R(\rho)$ в (32) не является знакопостоянной. В обоих случаях вклад отрицательных значений величины $\langle r^2 \rangle$ приводит, как это видно из (31), к уменьшению величины среднеквадратического радиуса $\langle r_0^2 \rangle$ мезона по сравнению с его комптоновской длиной волны $1/M$. Этот результат согласуется с экспериментальным значением для π -мезона.

Из выражений (20), (28), (31) и (32) следует, что для случая $\hat{O} = \gamma_5$ (псевдоскаляр) вклады в продольную компоненту формфактора и в среднеквадратический радиус определяются вторым слагаемым в (32); в случаях $\hat{O} = \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$ (вектор и псевдовектор) вклады в продольную компоненту формфактора и в среднеквадратический радиус дают все три слагаемых в (32).

5. СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЙ РАДИУС ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ С ХРОМОДИНАМИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В качестве примера найдем выражения для продольной компоненты формфактора и среднеквадратического радиуса составной системы с хромодинамическим взаимодействием

$$V(r) = -\frac{\alpha_S}{r}, \quad \alpha_S > 0, \quad (33)$$

⁵⁾Подчеркнем, что выражение (31) только по форме совпадает с его аналогом для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс при $m_1 = m_2 = m$, которое было найдено в работе [20].

пропатору которого в РКП-подходе в конфигурационном представлении отвечает на расстояниях $r > 1/m$ потенциал (33). Радиальная волновая функция точного решения РКП-уравнения (5) с потенциалом (33) для основного уровня ($n = 1$) s -состояния ($\ell = 0$) составной системы с энергией M_1 имеет вид [25]

$$\varphi_0^{(1)}(\rho, \kappa_1) = C_0^{(1)}(\kappa_1)(\rho - \rho_{\kappa_1})e^{(\rho - \rho_{\kappa_1})\kappa_1}, \quad (34)$$

где

$$\rho_{\kappa_1} = \frac{\tilde{\alpha}_S a}{2} \cos \kappa_1, \quad M_1 = 2m \cos \kappa_1, \\ 0 < \kappa_1 < \pi/2, \quad \tilde{\alpha}_S = m\alpha_S,$$

быстрота κ_1 определяется из условия квантования

$$\tilde{\alpha}_S(a \cos^2 \kappa_1 + b) = 4 \sin \kappa_1, \quad (35)$$

параметры a, b приведены в (4), а нормировочный множитель $C_0^{(1)}(\kappa_1)$ дается выражением [23]

$$|C_0^{(1)}(\kappa_1)|^2 = \frac{m\kappa_1^3 e^{-2\kappa_1\rho_{\kappa_1}}}{\pi(2\kappa_1^2\rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1\rho_{\kappa_1} + 1)}.$$

Результаты вычислений продольной компоненты формфактора (28) и среднеквадратического радиуса (31) двухфермионной составной системы с хромодинамическим взаимодействием (33) для основного уровня s -состояния с энергией M_1 можно записать в виде

$$F_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}}(t) = \quad (36) \\ = \frac{64(z_1 + z_2)m^4\kappa_1^3 \cos \kappa_1(2M_1^2 - t)}{(2\kappa_1^2\rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1\rho_{\kappa_1} + 1)M_1(4M_1^2 - t)} \times \\ \times \frac{\chi_\Delta}{\text{sh } \chi_\Delta} \left\{ \frac{4\kappa_1(\tilde{a} - \tilde{b} + 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1)}{(\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\text{tg } \kappa_1(\tilde{a} - \tilde{b} - 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1)}{\chi_\Delta^2 + 4\kappa_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(\tilde{a} - \tilde{b}) \sin^2 \kappa_1}{\chi_\Delta} \text{arctg } \frac{\chi_\Delta}{2\kappa_1} \right\},$$

$$\langle r_0^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}} = \frac{1}{M_1^2} \left\{ -\frac{1}{2} + \right. \quad (37)$$

$$\left. + \frac{1}{2\kappa_1^2} \left[1 + \frac{5(\tilde{a} - \tilde{b} + 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1) + 2\kappa_1 \text{tg } \kappa_1(\tilde{a} - \tilde{b} - 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1)}{\tilde{a} - \tilde{b} + 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1 + \kappa_1 \text{tg } \kappa_1(\tilde{a} - \tilde{b} - 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1) + 4(\tilde{a} - \tilde{b})\kappa_1^2 \sin^2 \kappa_1} \right] \right\},$$

где квадрат переданного 4-импульса t связан с быстротой χ_Δ соотношением (25).

Подчеркнем, что при нахождении выражений (36) и (37) мы исключали константу взаимодействия $\tilde{\alpha}_S$, используя не только условие квантования (35), но и установленное в процессе вычислений тождество

$$a(\tilde{a} + \tilde{b}) - 2\tilde{b}(a + b) \equiv 0, \quad (38)$$

справедливое относительно спиновых параметров a, b, \tilde{a} и \tilde{b} , значения которых даны в (4) и (20).

При больших Q^2 быстрота $\chi_\Delta \approx \ln(Q^2/M_1^2)$ и, следовательно, поведение формфактора (36) дается выражением

$$F_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}}(t) \approx \frac{128(z_1 + z_2)m^4\kappa_1^3 \cos \kappa_1}{M_1(2\kappa_1^2\rho_{\kappa_1}^2 - 2\kappa_1\rho_{\kappa_1} + 1)} \times \quad (39) \\ \times \frac{1}{(Q/M_1)^2} \left[\pi(\tilde{a} - \tilde{b}) \sin^2 \kappa_1 + \right. \\ \left. + \text{tg } \kappa_1(\tilde{a} - \tilde{b} - 2\tilde{b} \cos^2 \kappa_1) \ln^{-1}(Q/M_1)^2 \right].$$

Из асимптотики (39) видно, что поведение формфактора при больших $t = -Q^2$ находится в согла-

сии с его убыванием по закону $F(t) \sim |t|^{-1}$, который предсказывается правилом размерного кваркового счета [27, 28], в то время как нерелятивистская модель с кулоновским потенциалом (33) дает дипольный закон убывания $F(t) \sim t^{-2}$. В случае скалярного тока поведение формфактора для двухфермионной составной системы при больших t также происходит по закону $F(t) \sim |t|^{-1}$ (см. работу [23]). В бесспиновом же случае убывание формфактора происходит по закону $F(t) \sim (|t| \ln^3 |t|)^{-1}$ (см. работу [19]).

Таким образом, именно учет спина приводит к такому поведению формфактора при больших t , который предсказывается правилом размерного кваркового счета [27, 28].

В заключение нашего рассмотрения вычислим среднеквадратический радиус основного уровня s -состояния ($n = 1, \ell = 0$) пионов π^\pm с энергией $M_1 \equiv M_{\pi^\pm} = 0.140$ ГэВ [29], а в качестве его волновой функции выберем кулоновскую волновую функцию (34). Для пиона (псевдоскаляр, $\hat{O} = \gamma_5$, см. (4) и (20)) имеем $a = 1, b = 0, \tilde{a} = \tilde{b} = 1$, а условие квантования (35) принимает простой вид:

$\tilde{\alpha}_S \cos \kappa_1 = 4 \operatorname{tg} \kappa_1$. Тогда выражение (37) запишется в виде

$$\langle r_0^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}, \pi^\pm} = \frac{0.0389}{M_1^2} \left\{ -\frac{1}{2} + \right. \quad (40)$$

$$\left. + \frac{3}{2\kappa_1^2} \left[1 - \frac{1}{\kappa_1 \operatorname{tg} \kappa_1 - 1} \right] \right\} \text{фм}^2,$$

вычисление которого с энергией пионов $M_1 \equiv M_{\pi^\pm} = 0.140$ ГэВ и значением быстроты $\kappa_1 = 1.3687$ дает следующее значение величины среднеквадратического радиуса основного уровня s -состояния заряженных пионов: $\langle r_0^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}, \pi^\pm} = 0.32$ фм². Этому значению быстроты $\kappa_1 = 1.3687$ отвечают параметры модели (константа связи и масса кварка) $\tilde{\alpha}_S = 97.26$ и $m = 0.348$ ГэВ. Найденное значение величины среднеквадратического радиуса заряженных пионов находится вблизи доверительного интервала его экспериментального значения $\langle r_0^2 \rangle_{\text{exp}}^{\pi^\pm} = 0.42 \pm 0.08$ фм², которое было получено в результате исследования реакции $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ [30]. Это различие означает, что межкварковый потенциал для псевдоскалярных мезонов должен включать в себя не только кулоновское взаимодействие, но и запирающую, и спин-спиновую части, а также учитывать различие масс кварков.

Подчеркнем, что выражение (40) для среднеквадратического радиуса имеет сингулярность при $\kappa_1 \operatorname{tg} \kappa_1 = 1$, т.е. при $\kappa_1 \simeq 0.86034$. Точно такая же сингулярность возникала и в случае скалярного тока [23].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для случая векторного тока найдены новые ковариантные выражения компонент упругого формфактора составной системы двух релятивистских фермионов равных масс как функции инвариантной переменной $\Delta_{p, Q}^2$ — квадрата вектора передачи импульса в пространстве Лобачевского. Для этой цели был использован РКП-подход, основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [13, 14], путем перехода к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

В рамках рассматриваемого РКП-подхода, развитого в [13, 14], было получено инвариантное выражение матричного элемента локального оператора векторного тока в импульсном приближении вблизи полюсов связанных состояний двух релятивистских спиновых частиц равных масс через квазипотенциальные волновые функции, удовлетворяющие уравнению Кадышевского для случая двух релятивистских спиновых частиц равных

масс. Рассмотрены случаи псевдоскаляра, вектора и псевдовектора.

Показано, что выражения для компонент упругого формфактора (21) и (22) представляют собой свертки волновых РКП-функций в пространстве моментов Лобачевского. Это позволило представить их в виде релятивистских фурье-образов от ковариантных волновых РКП-функций в конфигурационном представлении (см. формулы (26) и (27)).

Установлено, что если волновая РКП-функция $\psi_M(\mathbf{r})$ является вещественной функцией переменной r и отвечает вещественному потенциалу $V(r)$, то поперечная компонента $F^{(-)}(t)$ упругого формфактора в отличие от бесспинового случая [20] даже при равных массах ($m_1 = m_2 = m$) в нуль не обращается.

Применение трехмерного релятивистского конфигурационного представления для системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс позволило установить, что если для s -состояния функция $R(\rho)$ является знакопостоянной и $\int_0^\infty d\rho (\rho^2 - 3/2)R(\rho) > 0$, то она описывает не всю структуру составной частицы, а только область, лежащую на расстояниях, больших ее комптоновской длины волны $1/M$. Выполненный анализ также показал, что основной вклад в структуру составной частицы от центральной сферы радиуса $r_0 = 1/M$ пропорционален $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$. В нерелятивистском пределе этот релятивистский геометрический фактор стремится к 1.

Если же функция $R(\rho)$ является знакопостоянной, а $\int_0^\infty d\rho (\rho^2 - 3/2)R(\rho) < 0$, или функция $R(\rho)$ не является знакопостоянной, то это приводит к уменьшению величины среднеквадратического радиуса мезона по сравнению с его комптоновской длиной волны $1/M$. Этот результат согласуется с экспериментальным значением для π -мезона.

На примере кулоновского поля притяжения получены выражения продольной компоненты формфактора (28) и среднеквадратического радиуса (31) для составной системы двух фермионов равных масс.

Установлено тождество (38), справедливое для значений спиновых параметров a, b, \tilde{a} и \tilde{b} в случаях псевдоскаляра, вектора и псевдовектора.

Показано, что при учете спина ковариантные волновые РКП-функции кулоновского поля притяжения при больших переданных импульсах t приводят к поведению продольной компоненты формфактора, которое находится в согласии с его убыванием по закону $F(t) \sim |t|^{-1}$, который предсказывается правилом размерного кваркового счета [27, 28].

Установлено, что имеется “критическое” значение быстроты $\kappa_1 \simeq 0.86034$, при котором форм-фактор псевдоскалярных мезонов обращается в нуль, а их константа связи и масса кварков принимают “критические” значения: $\tilde{\alpha}_S = 7.129$, $m = 0.107$ ГэВ.

Вычислено значение величины среднеквадратического радиуса основного уровня s -состояния заряженных пионов с массой $M_{\pi^\pm} = 0.140$ ГэВ и быстротой $\kappa_1 = 1.3687$, равное $\langle r_0^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}, \pi^\pm} = 0.32$ фм². Этому значению быстроты $\kappa_1 = 1.3687$ отвечают параметры модели (константа связи и масса кварка), равные $\tilde{\alpha}_S = 97.26$ и $m = 0.348$ ГэВ. Найденное значение величины среднеквадратического радиуса заряженных пионов $\langle r_0^2 \rangle_{\ell=0, n=1}^{(+)\text{Coul}, \pi^\pm} = 0.32$ фм² находится вблизи доверительного интервала его экспериментального значения $\langle r_0^2 \rangle_{\text{exp}}^{\pi^\pm} = 0.42 \pm 0.08$ фм², которое было получено в результате исследования реакции $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ [30]. Такое различие требует, чтобы межкварковый потенциал для псевдоскалярных мезонов включал в себя не только кулоновское взаимодействие, но и запирающую, и спин-спиновую части, а также учитывал и различие масс кварков.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой, В.В. Андрееву, А.Е. Дорохову, Ю.А. Курочкину и И.С. Сацункевичу за проявленный интерес к работе, полезное обсуждение полученных результатов и ценные замечания к ним. Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2016–2020 гг. “Конвергенция-2020”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. G. Körner and M. Kuroda, *Phys. Rev. D* **16**, 2165 (1977).
2. S. Dubnicka, *Nuovo Cimento A* **103**, 1417 (1990).
3. О. Д. Далькаров, Письма в ЖЭТФ **28**, 183 (1978) [*JETP Lett.* **28**, 170 (1978)].
4. О. Д. Далькаров and К. В. Протасов, *Nucl. Phys. A* **504**, 845 (1989); *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 1203 (1989); О. Д. Далькаров, К. В. Протасов, Письма в ЖЭТФ **49**, 241 (1989) [*JETP Lett.* **49**, 273 (1989)].
5. О. Д. Далькаров, Р. А. Khakhulin, and А. Yu. Voronin, arXiv: 0906.0266v1 [nucl-th].
6. V. A. Matveev, R. M. Muradyan, and A. N. Tavkhelidze, Preprint No. E2-3498, JINR (Dubna, 1967); No. P2-3900, JINR (Dubna, 1968).
7. В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинихидзе, В. А. Матвеев, А. Н. Тавхелидзе, Р. Н. Фаустов, ТМФ **23**, 310 (1975) [*Theor. Math. Phys.* **23**, 533 (1975)].
8. А. Л. Хелашвили, Сообщение P2-8750, ОИЯИ (Дубна, 1976).
9. Р. Н. Фаустов, ТМФ **3**, 240 (1970) [*Theor. Math. Phys.* **3**, 478 (1970)].
10. R. N. Faustov, *Ann. Phys. (N.Y.)* **78**, 176 (1973).
11. А. А. Logunov and А. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento* **29**, 380 (1963).
12. С. И. Биленькая, Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **26**, 1051 (1977) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **26**, 556 (1977)].
13. V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B* **6**, 125 (1968).
14. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [*Sov. Phys. Dokl.* **10**, 46 (1965)].
15. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento A* **55**, 233 (1968).
16. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [*Theor. Math. Phys.* **41**, 977 (1979)].
17. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **30**, 562 (1979)].
18. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **43**, 330 (1980) [*Theor. Math. Phys.* **43**, 494 (1980)].
19. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **77**, 251 (2014) [*Phys. At. Nucl.* **77**, 229 (2014)].
20. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **78**, 226 (2015) [*Phys. At. Nucl.* **78**, 201 (2015)].
21. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [*Sov. J. Nucl. Phys.* **11**, 388 (1970)].
22. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [*Sov. J. Part. Nucl.* **2** (3), 69 (1972)].
23. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **81**, 346 (2018) [*Phys. At. Nucl.* **81**, 360 (2018)].
24. V. G. Kadyshevsky and M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A* **55**, 275 (1968).
25. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [*Phys. At. Nucl.* **80**, 707 (2017)].
26. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [*Theor. Math. Phys.* **54**, 116 (1983)].
27. V. A. Matveev, R. M. Muradyan, and A. N. Tavkhelidze, *Lett. Nuovo Cimento* **5**, 907 (1972); **7**, 719 (1973); В. А. Матвеев, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе, ТМФ **40**, 329 (1979) [*Theor. Math. Phys.* **40**, 778 (1979)].
28. S. J. Brodsky and G. R. Farrar, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 1153 (1973).
29. K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), *Chin. Phys. C* **38**, 090001 (2014).
30. I. Eschrich *et al.* (SELEX Colab.), *Phys. Lett. B* **522**, 233 (2001).

FORM FACTOR OF THE TWO-FERMIONS BOUND STATE: THE CASE OF EQUAL MASSES AND VECTOR CURRENT

Yu. D. Chernichenko

*P. Sukhoi Gomel State Technical University;
International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus*

The new form factor components of the two relativistic with equal-masses fermion bound state in the case of vector current are obtained. Consideration is conducted within the framework of the relativistic quasipotential approach on the basis of the covariant Hamiltonian formulation of the quantum field theory by transition to the three-dimensional relativistic configurational representation in the case of two relativistic particles with equal masses and spin $1/2$.