

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ФОРМ В АТОМНЫХ ЯДРАХ

© 2020 г. Р. В. Джолос^{1),2)*}, Е. А. Колганова^{1),2)}, Л. А. Малов¹⁾,
Е. В. Мардыбан^{1),2)}, Д. А. Сазонов²⁾, Т. М. Шнейдман^{1),3)}

Поступила в редакцию 25.12.2019 г.; после доработки 25.12.2019 г.; принята к публикации 25.12.2019 г.

Рассмотрены примеры фазовых переходов в атомных ядрах, идущих при увеличении энергии возбуждения, углового момента и изменении числа нуклонов. Продемонстрирована возможность описания этих переходов в рамках коллективных моделей с гамильтонианом, зависящим от небольшого числа динамических переменных.

DOI: 10.31857/S0044002720040091

1. ВВЕДЕНИЕ

Тяжелые атомные ядра — это системы с огромным числом степеней свободы. Однако при небольших энергиях возбуждения их свойства можно описывать с помощью гамильтониана, использующего небольшое число динамических переменных. Например, важнейшей динамической переменной, определяющей свойства ядер, является квадрупольная мода. Конечно, эти пять квадрупольных степеней свободы сложнейшим образом связаны с координатами, описывающими движение отдельных нуклонов, но при феноменологическом рассмотрении гамильтониан содержит только эти динамические переменные. Такой гамильтониан описывает возбужденные состояния ядер, связанные с квадрупольными колебаниями формы относительно равновесной формы, и их влияние на движение отдельных нуклонов.

С коллективными переменными непосредственно связано представление о равновесной форме атомного ядра, прежде всего, о равновесной форме ядра в основном состоянии. В рамках коллективной модели возникли такие понятия как сферические ядра, деформированные ядра и переходные ядра, занимающие промежуточное положение между сферическими и деформированными ядрами. Исследования структуры ядер показали, что форма ядра в основном состоянии зависит от протон-нейтронного состава ядра и изменяется с изменением числа протонов и нейтронов в ядрах.

Так возникло представление о фазовых переходах [1, 2] от сферических к деформированным ядрам при изменении числа нуклонов. Это переходы от более высокой к более низкой симметрии формы ядра. Конечно, это не те фазовые переходы, которые хорошо известны в термодинамике и происходят при изменении температуры и давления. Благодаря конечному числу нуклонов в ядрах эти переходы от одной формы ядра к другой размыты, хотя наблюдаются и резкие изменения формы при незначительном изменении числа нуклонов.

При рассмотрении стабильных ядер фазовые переходы наблюдались не только при изменении числа нуклонов, но и при изменении углового момента ядра. Последние годы характеризуются смещением интереса ядерщиков в сторону исследования ядер, удаленных от области стабильности. Именно в таких ядрах при разных энергиях возбуждения были найдены состояния, в которых ядра имеют совершенно различные формы. Так возникло понятие сосуществования форм.

Базовой характеристикой атомного ядра, отличающей его от многих других микросистем, является самосогласованное поле, формирующееся в результате согласованного движения большого числа нуклонов. Характерная черта самосогласованного поля ядра — оболочечная структура. Исследование структуры атомных ядер началось с попыток объяснить происхождение магических чисел протонов и нейтронов, т.е. таких чисел, при которых ядро наиболее стабильно. Ответ был найден — оболочечная структура ядер, энергетическая щель, разделяющая оболочки. Выяснилось также, что все магические ядра сферические.

Ситуация стала меняться, когда появилась возможность экспериментально исследовать ядра,

¹⁾Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

²⁾Государственный университет “Дубна”, Дубна, Россия.

³⁾Казанский Государственный университет, Казань, Россия.

*E-mail: jolos@theor.jinr.ru

удаленные от области стабильных ядер. Выяснилось, что структура ядерных оболочек, их состав, т.е. те одночастичные уровни, которые их формируют, зависят от протон-нейтронного состава ядра. Благодаря специфическому характеру зависимости взаимодействия нуклонов от ориентации спинов и изоспина оно может в ряде случаев существенно изменять расстояния между одночастичными уровнями. В результате возникают новые оболочки, т.е. новые магические числа, и новые подоболочки, т.е. “щели” между одночастичными уровнями в одной оболочке. Такие примеры впервые были приведены Л. Коэном [3] в 1968 году на симпозиуме по структуре атомных ядер в Дубне. Позднее в работах Т. Отцука [4] и его группы было показано, что именно тензорное взаимодействие нуклонов ответственно за наблюдаемые эффекты. Тензорное взаимодействие может существенно изменить расположение одночастичных уровней в оболочке не только при изменении протон-нейтронного состава ядра, но и при возбуждении ядра, когда благодаря частично-дырочным возбуждениям изменяется заполнение одночастичных уровней валентными нуклонами. Вновь возникшие подоболочки могут обладать иными характеристиками, чем те, которые характеризуют конфигурацию основного состояния. Например, это могут быть орбиты с большим орбитальным моментом, которые, как следствие, характеризуются и большими квадрупольными моментами. В результате такие возбужденные конфигурации будут обладать большей деформацией, т.е. иметь форму, отличную от формы ядра в основном состоянии. Появляется возможность для фазовых переходов от сферической формы ядра к деформированной при росте энергии возбуждения. Цель настоящей работы — привести и проанализировать ряд примеров фазовых переходов в ядрах, ведущих к изменению симметрии среднего поля ядра и происходящих при изменении энергии возбуждения, углового момента, а в случае сверхтяжелых ядер — числа нуклонов.

2. СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ФОРМ В ^{96}Zr

Изменения формы ядер в основных состояниях наблюдались во многих цепочках изотопов и изотонов, но, как правило, они происходят достаточно плавно. На этом фоне резкое изменение формы ^{96}Zr с энергией возбуждения является исключением. Интересно еще и то, что при этом наблюдается слабое смешивание в волновых функциях состояний сферической и деформированной компонент, представляющих раздельно сферические и деформированные состояния, т.е. состояния, локализованные при различных значениях квадрупольной деформации β .

2.1. Коллективный потенциал в ^{96}Zr

Чтобы, по возможности, упростить задачу, мы предполагаем, что переменная γ , характеризующая отклонение от аксиальной симметрии, может быть отделена от β , и что коллективный потенциал имеет достаточно глубокий минимум при $\gamma = 0$. Это оправдано для области большой деформации, однако является чрезмерным упрощением для значений β , близких к нулю. В результате мы приходим к следующему гамильтониану для описания свойств ^{96}Zr :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B_0} \frac{1}{b_{\text{rot}}^{3/2}} \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 b_{\text{rot}}^{3/2} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\hbar^2}{2B_0} \frac{\hat{\mathbf{I}}^2 - \hat{I}_3^2}{3b_{\text{rot}}\beta^2} + V(\beta).$$

Этот гамильтониан содержит две важных для описания свойств ^{96}Zr составляющих: потенциал и коэффициент инерции для вращательного движения. Как это было показано в [5] на основе анализа экспериментальных данных о деформированных ядрах, коэффициент инерции для вращательного движения в несколько раз меньше, чем вибрационный коэффициент инерции. Это обстоятельство особенно важно для описания энергии возбуждения 2_2^+ -состояния.

Коллективный потенциал $V(\beta)$ определялся так, чтобы наилучшим образом описать как энергии возбуждения, так и вероятности переходов [6]. Результаты расчета энергий возбуждения и вероятностей переходов приведены в табл. 1.

Как видно из результатов, приведенных в табл. 1, согласие рассчитанных величин с экспериментальными данными вполне удовлетворительное. Рассчитанное значение $\rho^2(0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$ в 3.6 раз меньше, чем экспериментальное значение. Однако обе эти величины малы по сравнению с экспериментальными значениями $\rho^2(0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$ для других ядер, поэтому при описании этой величины основную роль могут играть эффекты, не связанные с β -деформацией. Например, парные корреляции.

Использование для расчета величины $B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ выражения для оператора $M1$ -перехода, полученного в рамках коллективной модели [7], приводит к значению в тысячу раз меньшему, чем экспериментальное значение. Согласие с экспериментом удастся достичь, если использовать следующее выражение для оператора магнитного дипольного перехода

$$(M1)_\mu = \mu_N \sqrt{\frac{3}{4\pi}} g_R(\beta) \hat{I}_\mu. \quad (1)$$

Таблица 1. Результаты расчета энергий возбуждения и вероятностей электромагнитных переходов в ^{96}Zr (значение b_{rot} взято равным 0.2; значения $B(E2)$ даны в одночастичных единицах, а $B(M1)$ — ядерных магнетонах; значение $Q(2_2^+)$ приведено в е бн; энергии возбуждения даны в кэВ, экспериментальная энергия 0_2^+ -состояния использовалась, чтобы фиксировать величину B_0 ; экспериментальные данные взяты из [8])

Энергии и вероятности переходов	Расчет	Эксперимент
$E(2_1^+)$	1748	1750
$E(2_2^+)$	2268	2226
$E(0_2^+)$	1582	1582
$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)$	26.1	36.0(11)
$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$	3.6	2.3(3)
$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_1^+)$	0.26	0.26(8)
$\rho^2(0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$	0.0013	0.0075
$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	2.25	$2.8_{-1.0}^{+1.5}$
$B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)$	6.8	—
$B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	0.11	0.14(5)
$Q(2_2^+)$	-0.51	—

Таблица 2. Распределение волновых функций 0_1^{+} -, 0_2^{+} -, 2_1^{+} - и 2_2^{+} -состояний между сферическим и деформированным минимумами коллективного потенциала

Минимум потенциала	0_1^+	0_2^+	2_1^+	2_2^+
Сферический	98.9%	3.2%	77.3%	23.7%
Деформированный	1.1%	96.8%	22.7%	76.3%

Разумным приближением для значения $g(R)$ фактора при $\beta = 0$ является результат, полученный в рамках оболочечной модели, т.е. -0.26 . При больших значениях β $g(R) = Z/A$. Интерполируя между этими двумя значениями и предполагая, что переходная область является достаточно узкой, мы получаем $g(R)$ как функцию β , с помощью которой получается следующий результат: $B(M1; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 0.11\mu_N^2$ в хорошем согласии с экспериментальным значением $0.14\mu_N^2$ [8].

Коллективный потенциал, который был фиксирован так, чтобы наилучшим образом описывать экспериментальные данные, имеет два минимума: сферический при $\beta = 0$ и деформированный при $\beta = 0.24$. Деформированный минимум расположен выше по энергии, чем сферический. Распределение волновых функций основного и возбужденных со-

стояний между двумя минимумами характеризуется данными, приведенными в табл. 2.

Таким образом, наше рассмотрение показывает, что свойства ядра ^{96}Zr , характерной чертой которого является сосуществование сферической и деформированной форм, могут быть описаны в рамках коллективной модели ядра.

2.2. Фазовый переход от несверхтекучего к сверхтекучему состоянию в ядрах с $Z \approx N$

Для построения коллективной модели, описывающей парные корреляции в ядрах с $Z \approx N$, необходимо шесть коллективных переменных [9, 10]: по три, поскольку изоспин является хорошим квантовым числом, для каждой из мод, связанных с добавлением и удалением пар нуклонов. Таким образом, коллективной переменной в таком подходе является комплексная величина, преобразующаяся как вектор в изотопическом пространстве. Такую переменную $z_{1\mu}^+$ можно представить следующим образом:

$$z_{1\mu}^+ = \Delta \exp(-i\phi) \left(D_{\mu 0}^1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{\mu 1}^1(\psi_1, \psi_2, \psi_3) + D_{\mu -1}^1(\psi_1, \psi_2, \psi_3)) \sin \theta \right). \quad (2)$$

Здесь $D_{\mu k}^1(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — функция Вигнера, а ψ_1, ψ_2 и ψ_3 — углы Эйлера, характеризующие вращение в изотопическом пространстве. Угол ϕ канонически сопряжен оператору числа частиц \hat{N} . Переменная Δ характеризует силу парных корреляций, а θ — изоспиновую структуру, но во внутренней системе координат.

Коллективный потенциал имеет следующий вид:

$$V(\Delta, \theta) = A\Delta^2 + B\Delta^4 \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 2\theta \right), \quad (3)$$

где переменная θ изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$. Значения коэффициентов A и B определяются числом валентных нуклонов, схемой одночастичных уровней и остаточным взаимодействием. Из соображений устойчивости коэффициент B всегда положителен. Если $A > 0$, то $V(\Delta, \theta)$ имеет минимум при $\Delta = 0$. Если $A < 0$, то минимум потенциала локализован при $\Delta \neq 0$. Как функция θ потенциал имеет минимум при $\theta = 0$. Таким образом, фазовый переход происходит при увеличении числа валентных нуклонов и сопровождается изменением знака коэффициента A .

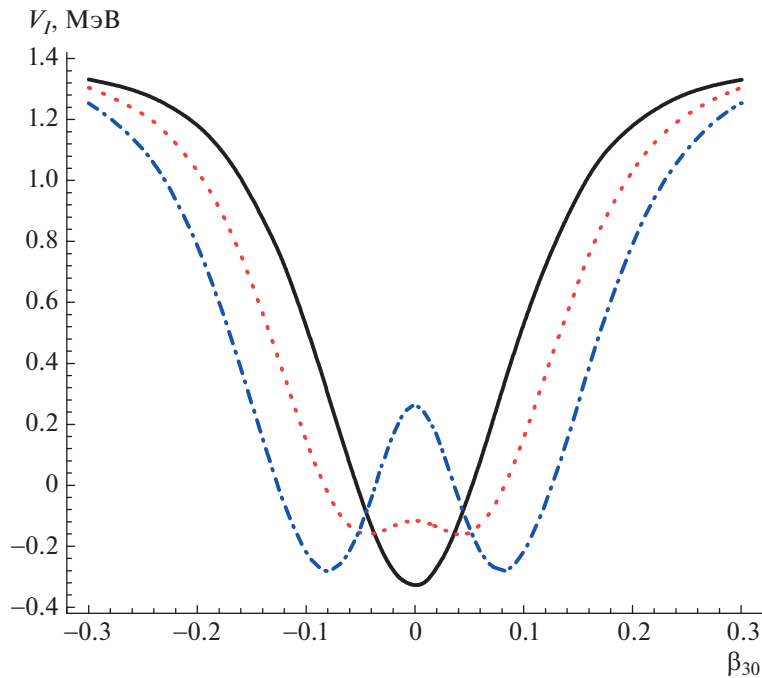


Рис. 1. Коллективный потенциал V_I для ядра ^{240}Pu как функция β_{30} . Потенциал, рассчитанный при различных значениях углового момента I ; кривые: сплошная — $I = 2$, точечная — $I = 12$, штрихпунктирная — $I = 22$.

3. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СОСТОЯНИЕ С ОКТУПОЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Характерной чертой ядер с сильными октупольными корреляциями является появление ротационных полос, объединяющих состояния обеих четностей, т.е. 0^+ , 1^- , 2^+ , 3^- , ... При небольших значениях углового момента I состояния с отрицательной четностью сдвинуты вверх по энергии относительно состояний положительной четности. С ростом углового момента этот сдвиг убывает, и, наконец, при достижении некоторого критического значения I формируется ротационная полоса молекулярного типа.

Будем рассматривать ротационные полосы переменной четности, предполагая, что гамильтониан соответствующей модели содержит только одну динамическую переменную, а именно переменную октупольной деформации β_{30} , сохраняющую аксиальную симметрию [11, 12]:

$$H_I = -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{d^2}{d\beta_{30}^2} + V_I(\beta_{30}). \quad (4)$$

Коллективный потенциал такого гамильтониана симметричен относительно изменения знака β_{30} . Если статическая октупольная деформация отсутствует, то коллективный потенциал, как функция октупольной деформации, имеет минимум при $\beta_{30} = 0$. При возникновении статической октупольной деформации минимум перемещается в

область ненулевых значений β_{30} , а при $\beta_{30} = 0$ появляется максимум. Так как вращательный момент инерции зависит как от квадрупольной, так и от октупольной деформации, и растет с увеличением и той, и другой деформации, то вращательный момент инерции при $\beta_{30} = 0$ меньше, чем при $\beta_{30} \neq 0$. Поэтому при увеличении углового момента ядра барьер, разделяющий два симметрично расположенных при значениях β_{30} отличных от нуля минимумов потенциальной энергии, начинает расти. Такое поведение потенциальной энергии как функции октупольной деформации иллюстрируют результаты, приведенные на рис. 1.

В случае рассмотрения квадрупольной деформации ядра для оценки близости рассматриваемого ядра к пределу хорошо деформированного ядра удобно рассматривать следующую безразмерную величину: $R(4/2) = E(4_1^+)/E(2_1^+)$. Если величина $R(4/2)$ близка к 3.33, то соответствующее ядро является аксиально симметричным деформированным ядром. Удобно ввести аналогичную характеристику и для рассмотрения октупольной деформации. В качестве такой характеристики можно использовать следующую величину:

$$R_{\text{oct}}(I_{\text{odd}}) = \frac{E_{\text{inter}}(I_{\text{odd}})}{E_{\text{exp}}(I_{\text{odd}})}. \quad (5)$$

В знаменателе этого выражения стоит экспериментальное значение энергии состояния отрицательной четности с угловым моментом I_{odd} , а в

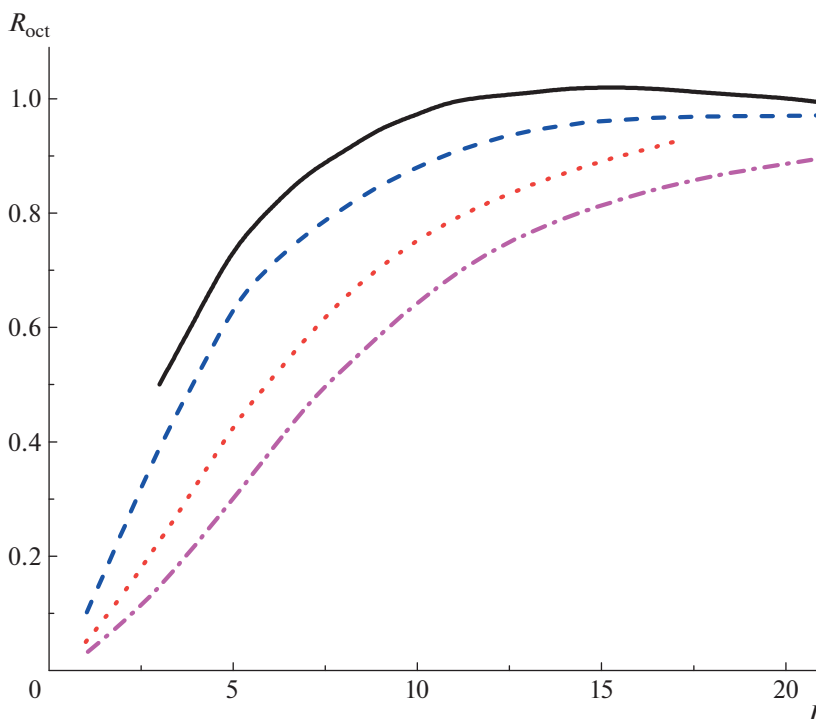


Рис. 2. Значения R_{oct} в зависимости от углового момента I . Кривые: сплошная — ^{150}Sm , точечная — ^{152}Sm , штриховая — ^{156}Gd , штрихпунктирная — ^{156}Gd .

числителе — то значение энергии, которое данное состояние имело бы в случае сильной октупольной деформации, когда формируется ротационная полоса молекулярного типа, объединяющая состояния обоих четностей: 0^+ , 1^- , 2^+ , 3^- , Значение $E_{\text{inter}}(I_{\text{odd}})$ определяется интерполяцией между энергиями двух соседних состояний положительной четности с $I = I_{\text{odd}} - 1$ и $I = I_{\text{odd}} + 1$. Пример зависимости R_{oct} от I в случае ядер редкоземельной области приведен на рис. 2.

Зависимость величины R_{oct} от углового момента демонстрирует фазовый переход от октупольно недеформированного состояния к октупольно деформированному состоянию при увеличении углового момента.

Функция $R_{\text{oct}}(I)$ описывает стабилизацию октупольной деформации ядра с увеличением углового момента. Она подобна функции, описывающей установление поляризации в среде под воздействием внешнего поля. Классический закон релаксации Дебая имеет следующий вид:

$$1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{\text{rel}}}\right). \quad (6)$$

Величина $R_{\text{oct}}(I)$ хорошо аппроксимируется следующей функцией:

$$1 - \exp\left(-\left(I/I_{\text{crit}}\right)^\nu\right). \quad (7)$$

Примеры описания величины $R_{\text{oct}}(I)$ с помощью функции (7) приведены на рис. 3 и 4 для ^{222}Ra ($I_{\text{crit}} = 3.2$, $\nu = 1.63$) и ^{240}Pu ($I_{\text{crit}} = 9.8$, $\nu = 1.50$).

4. ВЫСТРАИВАНИЕ УГЛОВОГО МОМЕНТА НЕЧЕТНОГО НУКЛОНА КАК ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В РОТАЦИОННЫХ ПОЛОСАХ НЕЧЕТНЫХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

Важную роль в определении свойств ротационных полос нечетных деформированных ядер играет связь углового момента нечетного нуклона и углового момента четно-четного остова, т.е. кориолисово взаимодействие. При малых значениях полного углового момента ядра I эта связь слабая, значение проекции углового момента нечетного нуклона на ось аксиальной симметрии ядра K является хорошим квантовым числом, а ее величина определяется средним полем ядра и порядком заполнения одночастичных уровней. С ростом полного углового момента энергетически более выгодным становится выстраивание углового момента нечетного нуклона вдоль оси вращения остова, которая перпендикулярна оси аксиальной симметрии ядра, а не вдоль оси аксиальной симметрии. В результате K перестает быть хорошим квантовым числом, а волновая функция нечетного нуклона становится суперпозицией компонент, характеризующихся различными значениями K . Таким образом, K становится динамической переменной.

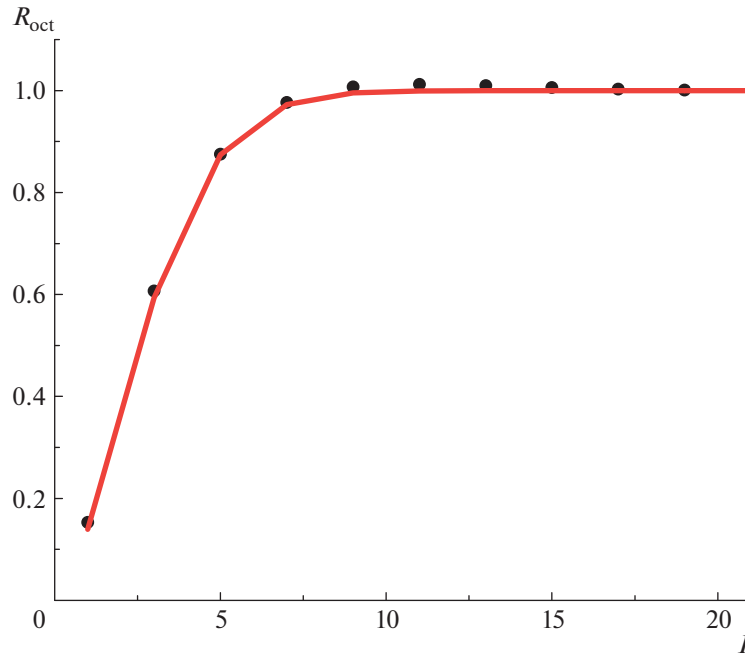


Рис. 3. Значения R_{oct} для ядра ^{222}Ra в зависимости от углового момента I . Сплошная кривая — функция $1 - \exp(-I/I_{\text{crit}})^\nu$ при $I_{\text{crit}} = 3.2$, $\nu = 1.63$, точки — результаты расчета с гамильтонианом (4).

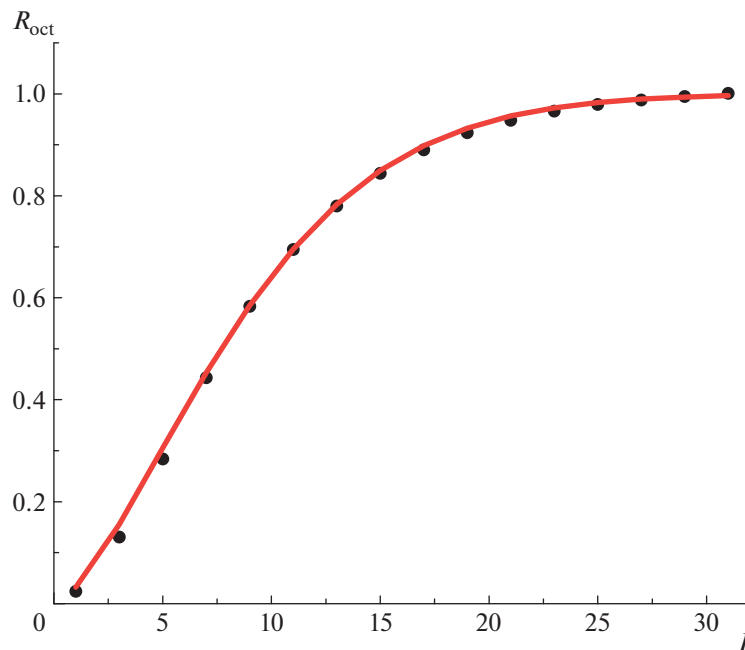


Рис. 4. Значения R_{oct} для ядра ^{240}Pu в зависимости от углового момента I . Сплошная кривая — функция $1 - \exp(-I/I_{\text{crit}})^\nu$ при $I_{\text{crit}} = 9.8$, $\nu = 1.50$, точки — результаты расчета с гамильтонианом (4).

Конечно, значения, которые принимает K , дискретны, но если интервал изменений K не мал, т.е. если угловой момент нечетного нуклона достаточно большой, то становится возможным квазиклассическое рассмотрение задачи, при котором K рассматривается как непрерывная переменная [13].

Предполагая для простоты, что угловой момент нечетного нуклона может принимать только одно значение j (например, в случае так называемого вторгнувшегося состояния с противоположной четностью: $h_{11/2}, i_{13/2}$), мы получаем следующий

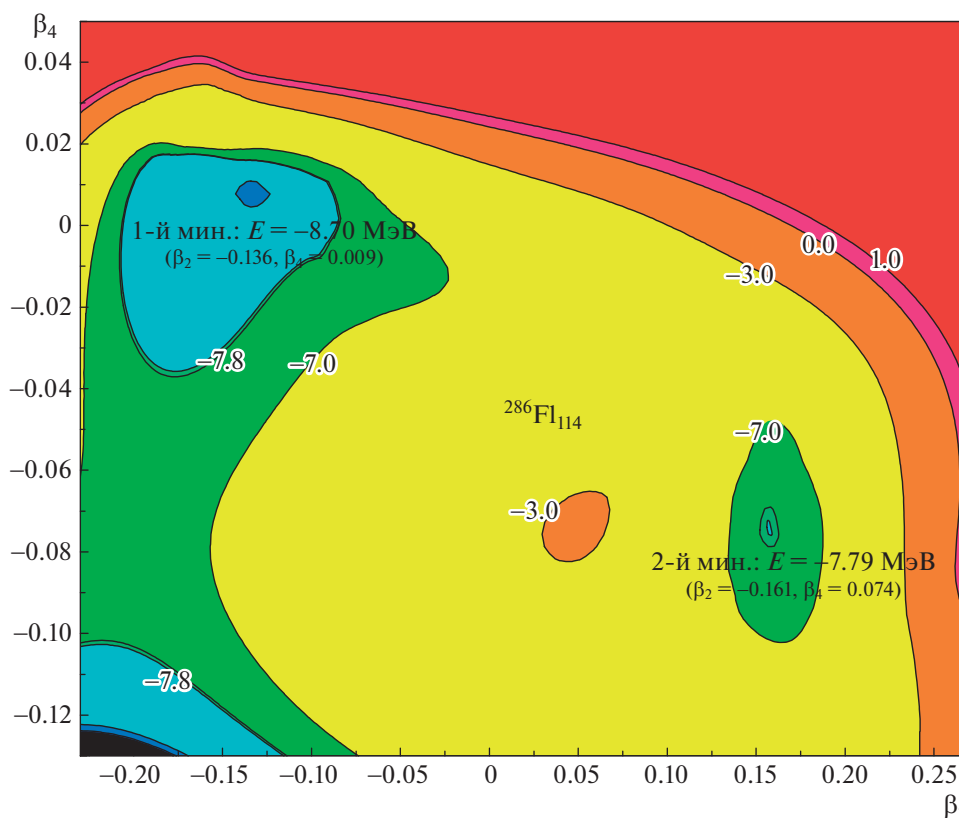


Рис. 5. Потенциальная энергия деформации ^{286}Fl как функция квадрупольной и октоупольной деформации.

гамильтониан [14]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} \sqrt{(I^2 - K^2)(j^2 - K^2)} \times \quad (8)$$

$$\times \frac{d^2}{dK^2} + U(K),$$

где $U(K)$ — потенциальная энергия как функция K :

$$U(K) = \frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}}(I - j)^2 \left(1 + \frac{K^2}{Ij}\right) + \quad (9)$$

$$+ \sqrt{\Delta^2 + (\kappa K^2 - \lambda)^2}.$$

Здесь \mathfrak{I} — момент инерции остова, Δ — параметр, характеризующий силу парных корреляций, λ — химический потенциал, κ — константа квадрупольной связи нечетного нуклона и остова. Из выражения для потенциала $U(K)$ видно, что если величина $(I - j)$ мала, то минимум потенциала локализован при том значении K , которое определяется химическим потенциалом. С увеличением I минимум потенциала смещается в сторону $K = 0$. Таким образом, происходит выстраивание углового момента нечетного нуклона вдоль оси вращения четно-четного остова.

5. СОСУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫТЯНУТОЙ И СПЛЮСНУТОЙ ФОРМ В СВЕРХТЯЖЕЛЫХ ЯДРАХ

Расчеты потенциальной энергии деформации ядер, выполненные с использованием процедуры Струтинского и одночастичного потенциала Вудса—Саксона, показали, что потенциальная энергия деформации сверхтяжелых ядер может иметь два глубоких минимума, локализованных при $\gamma = 0$ и $\pi/3$ и при значении $\beta \approx 0.15$. Пример такого расчета для ядра ^{286}Fl приведен на рис. 5 [15]. В том случае, если эти два минимума разделены барьером с центром при $\gamma \approx \pi/6$, у ядра появляются два низколежащих 0^+ -состояния с различными весами локализации в каждом из минимумов. В этом случае в ядре могут сосуществовать сплюснутая и вытянутая формы.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрение различных примеров фазовых переходов в атомных ядрах показало, что эти переходы можно описывать, основываясь на коллективных моделях с гамильтонианом, зависящим от небольшого числа динамических переменных.

Фазовые переходы, ведущие к стабилизации октупольной деформации ядра или к выстраиванию углового момента нечетного нуклона вдоль оси вращения ядра, происходят при увеличении углового момента.

Сосуществование вытянутой и сплюснутой деформированных форм может быть реализовано в сверхтяжелых ядрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. L. Wood, K. Heyde, W. Nazarewicz, M. Huyse, and P. van Duppen, *Phys. Rep.* **215**, 101 (1992).
2. P. Cejnar, J. Jolie, and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2155 (2010).
3. B. L. Cohen, *Nuclear Structure Dubna Symposium* (IAEA, Vienna, 1968), p. 3.
4. T. Otsuka and Y. Tsunoda, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **43**, 024009 (2016).
5. R. V. Jolos and P. von Brentano, *Phys. Rev. C* **76**, 024309 (2007).
6. D. A. Sazonov, E. A. Kolganova, T. M. Shneidman, R. V. Jolos, N. Pietralla, and W. Witt, *Phys. Rev. C* **99**, 031304(R) (2019).
7. G. P. Grechukhin, *Nucl. Phys. A* **40**, 422 (1963).
8. C. Kremer, S. Aslanidou, S. Bassauer, M. Hilcker, A. Krugmann, P. von Neumann-Cosel, T. Otsuka, N. Pietralla, V. Yu. Ponomarev, N. Shimizu, M. Singer, G. Steinhilber, T. Togashi, Y. Tsunoda, V. Werner, and M. Zweidinger, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 172503 (2016).
9. D. R. Bes, R. A. Broglia, R. P. J. Perazzo, and K. Kumar, *Nucl. Phys. A* **143**, 1 (1970).
10. G. Nikoghosyan, E. A. Kolganova, and R. V. Jolos, *Bulg. J. Phys.* **44**, 443 (2017).
11. R. V. Jolos and P. von Brentano, *Phys. Rev. C* **92**, 044318 (2015).
12. E. V. Mardyban, T. M. Shneidman, E. A. Kolganova, R. V. Jolos, and S.-G. Zhou, *Chin. Phys. C* **42**, 124104 (2018).
13. B. R. Mottelson, private communication.
14. R. V. Jolos and A. Gelberg, *Phys. Lett. B* **317**, 495 (1993).
15. R. V. Jolos, G. G. Adamian, N. V. Antonenko, A. N. Bezbakh, V. G. Kartavenko, L. A. Malov, V. O. Nesterenko, N. Yu. Shirikova, and A. V. Sushkov, in *Proceedings of the International Symposium on Exotic Nuclei, 4–10 September, 2016* (World Sci., Singapore, 2017), p. 186.

PHASE TRANSITIONS AND SHAPE COEXISTENCE IN ATOMIC NUCLEI

**R. V. Jolos^{1),2)}, E. A. Kolganova^{1),2)}, L. A. Malov¹⁾, E. V. Mardyban^{1),2)},
D. A. Sazonov²⁾, T. M. Shneidman^{1),3)}**

¹⁾ *Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

²⁾ *Dubna State University, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

³⁾ *Kazan State University, 420008 Kazan, Russia*

Examples of phase transitions in the atomic nuclei occurring at increase in excitation energy and angular momentum, and with change of the number of nucleons are considered. The possibility of the description of these transitions within collective models with the Hamiltonian depending on a small number of dynamic variables is shown.