

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИНСОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ФАЗЫ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

© 2021 г. М. И. Криворученко^{1),2)*}, К. С. Тырин²⁾

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.; после доработки 28.05.2020 г.; принята к публикации 28.05.2020 г.

Теорема Левинсона устанавливает связь между разностью фаз рассеяния на пороге и бесконечности с числом связанных состояний. Присутствие в амплитуде рассеяния полюсов Кастильехо, Далица и Дайсона (КДД-полюсов) и примитивов Джаффе и Лоу, соответствующих нулям D -функции на унитарном разрезе, модифицирует теорему. Показано, что в общем случае разность фаз рассеяния на пороге и бесконечности определяется числом связанных состояний, числом КДД-полюсов и числом примитивов. Обсуждаются некоторые следствия теоремы в отношении свойств нуклон-нуклонного взаимодействия.

DOI: 10.31857/S004400272101013X

Аналитичность S -матрицы является, как известно, следствием микропричинности (см., например, [1]). В рамках теории возмущений особенности амплитуд рассеяния по кинематическим инвариантам определяются правилами Ландау [2, 3]. Для частиц с импульсами p_1 и p_2 S -матрица в каждой парциальной волне является аналитической функцией $s = (p_1 + p_2)^2$ на физическом листе римановой поверхности за исключением простых полюсов, соответствующих связанным состояниям, и левого разреза. Одним из следствий аналитичности является теорема Левинсона [4], связывающая разность фаз рассеяния на пороге и бесконечности с числом связанных состояний. Существует обобщение этой теоремы на релятивистский случай [5, 6], учитывающее многоканальность S -матрицы и наличие КДД-полюсов [7, 8], введенных Кастильехо, Далицем и Дайсоном для демонстрации неоднозначности решений уравнения Лоу [9].

Рассмотренные обобщения не охватывают системы, в которых существуют “примитивы”, т.е. полюса P -матрицы. Согласно Джаффе и Лоу [10] многокварковые состояния соответствуют полюсам P -матрицы, а не S -матрицы. В терминах N/D -метода, примитивы проявляют себя как нули D -функции на унитарном разрезе, в которых фаза рассеяния обращается в нуль по модулю π с отрицательным наклоном. Данные свойства примитивов позволяют интерпретировать нуклон-нуклонный отталкивательный кор в терминах s -

канального обмена шестикварковыми состояниями [11–19]. КДД-полюсам соответствуют нули по модулю π фазы рассеяния с положительным наклоном. Обобщение теоремы Левинсона на системы с примитивами представляет интерес с точки зрения приложений соответствующих моделей к физике малонуклонных систем [16], уравнению состояния ядерной материи [18, 20], поискам узких дибарионных резонансов [21].

Уравнение состояния ядерной материи имеет важное значение для астрофизики компактных объектов. Предельно жесткими считаются уравнения состояния, для которых скорость звука a_s совпадает со скоростью света c . В моделях среднего поля это условие выполняется асимптотически с ростом плотности нуклонов, взаимодействующих посредством ω -мезонного обмена [22]. Открытие нейтронных звезд с массами порядка $2M_\odot$ [23, 24] позволило исключить широкий класс мягких уравнений состояния ядерной материи. При наличии отталкивания фаза рассеяния падает с ростом энергии. Жесткость уравнения состояния, следовательно, зависит от асимптотики фазы рассеяния, которая согласно теореме Левинсона определяется наличием связанных состояний, и, как мы покажем, зависит от числа КДД-полюсов и числа примитивов.

S -матрица упругого рассеяния в фиксированной парциальной волне выражается через фазу рассеяния $\delta(s)$ либо через функцию Йоста $D(s)$:

$$S = e^{2i\delta(s)} = \frac{D_{II}(s)}{D_I(s)}. \quad (1)$$

$D_I(s)$ совпадает с $D(s)$ на физическом (первом) листе римановой поверхности, к которому при-

¹⁾НИЦ “Курчатовский институт” — ИТЭФ, Москва, Россия.

²⁾Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия.

*E-mail: mikhail.krivoruchenko@itep.ru

надлежит верхний берег разреза $(s_0, +\infty)$. Аналитическое продолжение $D_I(s)$ через разрез в область $\Im s < 0$ приводит нас на нефизический (второй) лист римановой поверхности. Функция $D_{II}(s)$ определяется аналитическим продолжением $D(s)$ с нижнего берега разреза $(s_0, +\infty)$. В области $\Im s < 0$, когда переменная s принадлежит физическому листу римановой поверхности, $D_{II}(s)$ совпадает с $D(s)$.

$D(s)$ аналитична в комплексной плоскости s с разрезом $(s_0, +\infty)$, порог s_0 является точкой ветвления. Мнимая часть $D(s)$ на унитарном разрезе определяет N -функцию. $D(s)$ не имеет нулей в комплексной плоскости за исключением простых нулей на вещественной оси при $s < s_0$, отвечающих связанным состояниям, и простых нулей $s > s_0$, отвечающих примитивам. КДД (простые) полюса расположены на вещественной оси при $s \leq s_0$. Заметим, что КДД-полюса по построению [7] понижают все листы римановой поверхности $D(s)$. Условие существования примитива $D_I(s) = 0$ при $s \in (s_0, +\infty)$ является необходимым и достаточным для $D_{II}(s) = 0$ в силу того, что $D_I(s)$ и $D_{II}(s)$ отличаются лишь мнимой частью, которая в данном случае равна нулю.

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{s_0}^{+\infty} ds \ln(S)' = \tag{2}$$

$$= 2i \int_{s_0}^{+\infty} ds \delta(s)' = 2i(\delta(+\infty) - \delta(s_0)).$$

Здесь интегрирование ведется вдоль вещественной оси. Запишем J в терминах функции Йоста:

$$J = \int_{s_0}^{+\infty} ds \ln \left(\frac{D_{II}(s)}{D_I(s)} \right)' = \tag{3}$$

$$= \int_{s_0}^{+\infty} ds \left(\frac{D_{II}(s)'}{D_{II}(s)} - \frac{D_I(s)'}{D_I(s)} \right).$$

Под знаком второго интеграла каждое из двух слагаемых имеет простые полюса в точках, отвечающих КДД-полюсам и примитивам. В величине $D_{II}(s)/D_I(s)$ нули и полюса, однако, сокращаются, поэтому существует некоторая область $\Im s \leq 0$, примыкающая к унитарному разрезу, которая является областью аналитичности подынтегральной функции. Контур интегрирования, следовательно, можно сместить, например, вниз, затем разбить

интеграл на два слагаемых:

$$J = \int_C ds \frac{D_{II}(s)'}{D_{II}(s)} + \int_{C'} ds \frac{D_I(s)'}{D_I(s)}. \tag{4}$$

При смещении контура вниз аргумент функции $D_{II}(s)$ оказывается на листе I римановой поверхности. Аргумент функции $D_I(s)$ уходит под разрез и оказывается на нефизическом листе II. Пути интегрирования показаны на рис. 1. Контур C лежит на физическом листе ниже разреза, в то время как контур C' лежит под разрезом на втором листе, где находятся нули D -функции, соответствующие резонансам. Мы рассматриваем достаточно малое смещение контура, требуя, чтобы C' не пересекал при смещении нули, соответствующие резонансам.

На вещественной оси оба подынтегральных выражения имеют простые полюса, соответствующие нулям функций $D_I(s)$ и $D_{II}(s)$: нули $D_I(s)$ при $s < s_0$ отвечают связанным состояниям. Эти нули, вообще говоря, смещены относительно нулей $D_{II}(s)$, расположенных на втором листе. Нули на унитарном разрезе $(s_0, +\infty)$ соответствуют примитивам. Подынтегральные функции имеют на вещественной оси также КДД-полюса. Нули, соответствующие примитивам, и КДД-полюса совпадают на листах I и II. s_0 — пороговая точка ветвления подынтегральной функции, предполагается, что $D(s)$ ограничена в s_0 , так что интеграл по окружности вокруг s_0 обращается в нуль при стремлении радиуса окружности к нулю.

Контур C' деформируем вверх через разрез, оказываясь на листе I, как показано на рис. 2. При деформации возникает вклад в интеграл, соответствующий вычетам в полюсах, расположенных на разрезе:

$$J_1 = -2\pi i \sum_{i=1}^{n_p} \text{Res} \left(\frac{D_I(s)'}{D_I(s)}, s_i \right) - \tag{5}$$

$$- 2\pi i \sum_{j=k+1}^{n_{\text{CDD}}} \text{Res} \left(\frac{D_I(s)'}{D_I(s)}, s_j \right).$$

Здесь n_p — число примитивов, k — число КДД-полюсов ниже порога, n_{CDD} — полное число КДД-полюсов. На первом листе замыкаем интегрирование вдоль контуров C и C' и добавляем контур C_∞ по бесконечно удаленной окружности, как показано на рис. 2 слева. Достаточным условием обращения в нуль интеграла по C_∞ является условие $sD(s)'/D(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Здесь предполагается, что это условие выполнено.

Контур $\Gamma = C \cup C' \cup C_\infty$ является замкнутым. $D_I(s)$ в окрестности разреза при $\Im s \leq 0$ и $D_{II}(s)$

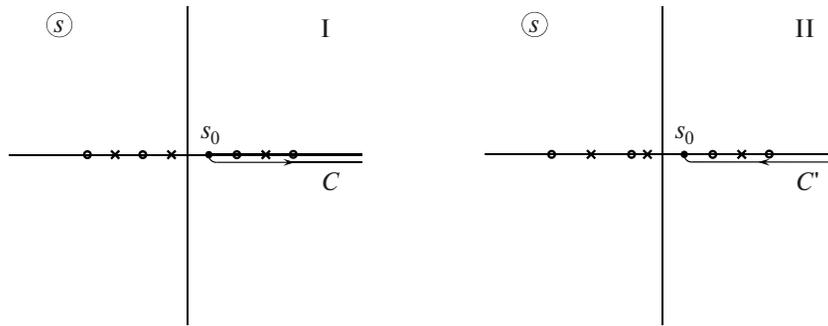


Рис. 1. Нули и полюса функции Йоста на первом (I) и втором (II) листах римановой поверхности. Нули (кружки) соответствуют связанным состояниям при $s < s_0$ и примитивам при $s > s_0$, полюса (крестики) соответствуют КДД-полюсам. Стрелки на контурах C и C' указывают направление, вдоль которого проводится интегрирование в уравнении (4).

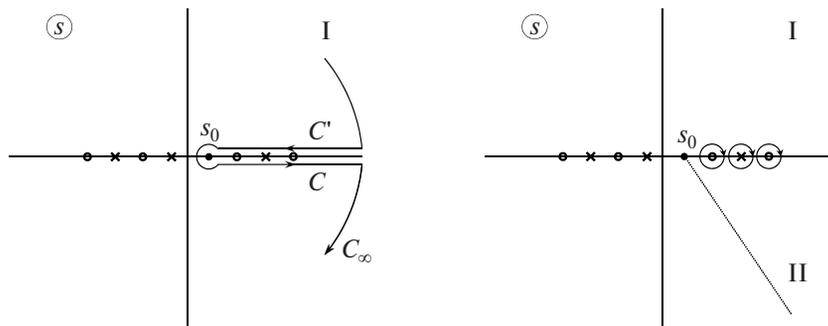


Рис. 2. На левой панели контур C' выведен на лист I римановой поверхности, замкнут на контур C в обход порога s_0 и продолжен в обе стороны по бесконечно большой окружности C_∞ . На правой панели часть четвертого квадранта листа I римановой поверхности отогнута вдоль пунктирной линии, начиная с точки s_0 , внизу расположен лист II римановой поверхности, к которому изначально принадлежал контур C' . Унитарный разрез разграничивает листы I и II. Деформация контура C' приводит к вычетам в полюсах, вокруг которых нарисованы окружности. Стрелки указывают направление обхода полюсов.

на нижнем берегу разреза физического листа римановой поверхности являются аналитическими продолжениями $D(s)$, поэтому в уравнении (5) $D_I(s)$ можно заменить на $D(s)$, соответственно, на контуре Γ $D_I(s)$ и $D_{II}(s)$ также можно заменить на $D(s)$. Интеграл по контуру Γ равен сумме вычетов в полюсах, отвечающих связанным состояниям и КДД-полюсам, расположенным ниже порога:

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \oint_{\Gamma} \frac{D(s)'}{D(s)} ds = & (6) \\
 &= -2\pi i \sum_{l=1}^{n_b} \text{Res}\left(\frac{D(s)'}{D(s)}, s_l\right) - \\
 &\quad - 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}\left(\frac{D(s)'}{D(s)}, s_j\right),
 \end{aligned}$$

где n_b — число связанных состояний. В окрестности связанных состояний s_l $D(s) \sim (s - s_l)$, в окрестности примитивов s_i $D(s) \sim (s - s_i)$, в окрестности КДД-полюсов s_j $D(s) \sim 1/(s - s_j)$, в результате имеем $\text{Res}(D(s)'/D(s), s_l) =$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Res}(D(s)'/D(s), s_i) = -\text{Res}(D(s)'/D(s), s_j) = \\
 &= 1. \text{ Учитывая, что } J = J_1 + J_2, \text{ находим}
 \end{aligned}$$

$$J = -2\pi i(n_b + n_p - n_{\text{CDD}}), \quad (7)$$

и окончательно

$$\delta(+\infty) - \delta(s_0) = -\pi(n_b + n_p - n_{\text{CDD}}). \quad (8)$$

Простой эвристический аргумент в пользу соотношения (8) основан на представлении D -функции в виде (ср. [25])

$$\begin{aligned}
 D(s) &= \prod_{l=1}^{n_b} \frac{s - s_l}{s_0 - s_l} \prod_{i=1}^{n_p} \frac{s - s_i}{s_0 - s_i} \prod_{j=1}^{n_{\text{CDD}}} \frac{s_0 - s_j}{s - s_j} \times & (9) \\
 &\times \exp\left(-\frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_0}^{+\infty} \frac{\delta(s') - \delta(s_0)}{(s' - s_0)(s' - s + i0)} ds'\right).
 \end{aligned}$$

В пределе $s \rightarrow \infty$ D -функция ведет себя как $D(s) \sim s^{n_b + n_p - n_{\text{CDD}} + (\delta(+\infty) - \delta(s_0))/\pi}$. Стандартное условие нормировки $D(s) = 1$ при $s \rightarrow \infty$ эквивалентно (8). Условие ограниченности $N(s)$ требует обращения в нуль по модулю π разности

фаз $\delta(s) - \delta(s_0)$ при значениях $s = s_j > s_0$, где расположены КДД-полюса.

В семействе D -функций, удовлетворяющих уравнению Лоу [9] и его обобщению, связанному с существованием примитивов [17], входящая в дисперсионный интеграл величина $\Im 1/D(s)$ ограничена. В представлении (9) нули, соответствующие примитивам, в таком случае обязаны совпадать с нулями по модулю π разности фаз $\delta(s) - \delta(s_0)$, что обеспечивает знакоопределенность $N(s)$ в окрестности s_j . Знакоопределенность $N(s)$ — признак принадлежности $D(s)$ классу обобщенных R -функций, аналитичных в комплексной плоскости s с разрезом $(s_0, +\infty)$ и не имеющих простых нулей вне вещественной оси (см. [7]).

Таким образом, наличие примитивов, также как и КДД-полюсов, модифицирует теорему Левинсона. Примитивы дают отрицательный вклад в асимптотику фазы. В картине потенциального рассеяния уменьшение фазы рассеяния с ростом энергии связано с действием отталкивающего потенциала. В модели Дайсона [8] и ее обобщениях [17–21] число КДД-полюсов определяется числом связанных состояний, примитивов и резонансов (n_r): $n_{\text{CDD}} = n_b + n_p + n_r + \Delta$, где $\Delta = 0, \pm 1$. Данное соотношение возникает вследствие того, что между соседними КДД-полюсами находится связанное состояние, либо резонанс, либо примитив. Чтобы усилить эффект отталкивания, можно добавить в систему дополнительный примитив, однако при этом придется добавить в систему, вообще говоря, и один дополнительный КДД-полюс. Примитивы и КДД-полюса входят в уравнение (8) с противоположными знаками, в результате чего асимптотика фазы остается неизменной. Поскольку асимптотика ограничена снизу, в модели существует, очевидно, предельный отталкивающий потенциал. Добавление новых резонансов приводит к росту n_{CDD} и соответствующему росту асимптотического значения фазы, что в потенциальном рассеянии связывается с дополнительным притяжением. Значения n_r не ограничены сверху, поэтому, в отличие от отталкивания, притяжение в системе может быть сколь угодно сильным. Существование ограничения снизу на разность фаз $\delta(+\infty) - \delta(s_0)$ приводит к выводу о существовании в моделях s -канального обмена максимально жесткого уравнения состояния ядерной материи, что может представлять интерес с точки зрения описания строения нейтронных звезд.

В представлении D -функции (9) число связанных состояний, число примитивов, число КДД-полюсов и их взаимное расположение на оси s произвольны. Для фиксированного n_b примитивы снимают ограничение на минимальное значение $\delta(+\infty) - \delta(s_0)$, что можно интерпретировать как

допустимость сколь угодно сильного отталкивания между частицами. В представлении (9) максимально жесткое уравнение состояния ядерной материи соответственно подчиняется только требованиям релятивистской инвариантности. К таким требованиям относится ограничение на скорость звука $a_s \leq c$. Ударные волны переносят информацию и распространяются быстрее звука, поэтому справедливо также более сильное условие, согласно которому скорость распространения ударных волн в ядерной материи меньше скорости света.

Семейство D -функций в s -канальных моделях взаимодействия, таким образом, уже семейства D -функций (9). Можно предположить, что аналогичное утверждение справедливо и в отношении t -канальных моделей взаимодействия.

Авторы благодарят Ю.А. Симонова за полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 18-02-00733А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. Чью, *Аналитическая теория S-матрицы* (Мир, Москва, 1968).
2. L. D. Landau, Nucl. Phys. **13**, 181 (1959).
3. R. Eden, D. Landshoff, P. Olive, and J. Polkinhorne, *The Analytic S-Matrix, International Series in Pure and Applied Physics* (McGraw-Hill, New York, 1966).
4. N. Levinson, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk. **25**, 9 (1949).
5. R. L. Warnock, Phys. Rev. **131**, 1320 (1963).
6. J. B. Hartle and C. E. Jones, Ann. Phys. (N. Y.) **38**, 348 (1966).
7. L. Castillejo, R. Dalitz, and F. Dyson, Phys. Rev. **101**, 543 (1956).
8. F. Dyson, Phys. Rev. **106**, 157 (1957).
9. F. E. Low, Phys. Rev. **97**, 1392 (1955).
10. R. L. Jaffe and F. E. Low, Phys. Rev. D **19**, 2105 (1979).
11. Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **107**, 1 (1981).
12. Yu. A. Simonov, Usp. Fiz. Nauk **136**, 215 (1982).
13. Yu. A. Simonov, Nucl. Phys. A **416**, 109c (1984).
14. V. S. Bhasin and V. K. Gupta, Phys. Rev. C **32**, 1187 (1985).
15. C. Fasano and T.-S. H. Lee, Phys. Rev. C **36**, 1906 (1987).
16. B. L. G. Bakker and I. M. Narodetsky, Adv. Nucl. Phys. **21**, 1 (1994).
17. M. I. Krivoruchenko, Phys. Rev. C **82**, 018201 (2010).
18. M. I. Krivoruchenko, D. K. Nadyozhin, T. L. Rasinkova, Y. A. Simonov, M. A. Trusov, and A. V. Yudin, Phys. At. Nucl. **74**, 371 (2011).
19. M. I. Krivoruchenko and Amand Faessler, Rom. J. Phys. **57**, 296 (2012).
20. M. I. Krivoruchenko, Phys. Part. Nucl. Lett. **14**, 849 (2017).
21. M. I. Krivoruchenko, Phys. Rev. C **84**, 015206 (2011).

22. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **41**, 1609 (1961). **340**, 448 (2013).
23. P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. Roberts, and J. W. Hessels, *Nature* **467**, 1081 (2010).
24. J. Antoniadis, P. C. C. Freire, N. Wex, *et al.*, *Science* **340**, 448 (2013).
25. P. D. B. Collins, *An Introduction to Regge Theory & High Energy Physics* (Cambridge Univ. Press, 1977).

GENERALIZATION OF LEVINSON'S THEOREM ON THE ASYMPTOTIC VALUE OF THE PHASE OF THE SCATTERING AMPLITUDE

M. I. Krivoruchenko^{1),2)}, K. S. Tyrin²⁾

¹⁾*NRC "Kurchatov Institute" — ITEP, Moscow, Russia*

²⁾*National Research Center "Kurchatov Institute", Moscow, Russia*

Levinson's theorem establishes a relationship between the difference in the scattering phases at the threshold and infinity and the number of bound states. The presence in the scattering amplitude of the Castillejo, Dalitz, and Dyson poles (CDD poles) and the Jaffe and Low primitives corresponding to zeros of the D function on the unitary cut modifies the theorem. We show that the difference between the scattering phases at the threshold and infinity is generally determined by the number of bound states, the number of CDD poles, and the number of primitives. Some consequences of the theorem concerning the properties of the nucleon-nucleon interaction are discussed.