ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2021, том 84, № 1, с. 90–92

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНДАУ–ХАЛАТНИКОВА–ФРАДКИНА И ЧЕТНЫЕ ζ-ФУНКЦИИ

А. В. Котиков[1)*], С. Тебер[2)]

Поступила в редакцию 13.04.2020 г.; после доработки 13.04.2020 г.; принята к публикации 13.04.2020 г.

Мы приводим точную формулу, связывающую стандартные ζ-функции и так называемые $\hat{\zeta}$-функции во всех порядках теории возмущений. Формула основана на преобразовании Ландау–Халатникова–Фрадкина (ЛХФ).

DOI: 10.31857/S0044002720060197

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим свойства многопетлевых безмассовых функций пропагаторного типа. Существует все больше свидетельств (см., например, [1]) того, что в расчетах различных величин в евклидовой области возникают поразительные закономерности в членах, пропорциональных ζ_{2n}, т.е. четным значениям ζ-функций Эйлера. Причину таких закономерностей видят [2] в том факте, что основными объектами являются не сами ζ-функции, а их ε-зависимые комбинации

$$\hat{\zeta}_3 \equiv \zeta_3 + \frac{3\varepsilon}{2}\zeta_4 - \frac{5\varepsilon^3}{2}\zeta_6, \qquad (1)$$
$$\hat{\zeta}_5 \equiv \zeta_5 + \frac{5\varepsilon}{2}\zeta_6, \quad \hat{\zeta}_7 \equiv \zeta_7,$$

которые приводят к отсутствию ζ_{2n} в ε-разложениях четырехпетлевых функций пропагаторного типа. Обобщение комбинаций (1) на случай пяти, шести и семи петель доступно в [3])[3)]. Результаты (1) и их обобщение в [3] дают возможность предсказывать члены $\sim\pi^{2n}$ в более высоких порядках теории возмущений.

В работе [4] (см. также [5]) было получено обобщение (1) на все порядки по ε довольно неожиданным образом: с помощью преобразования ЛХФ [6], которое связывает пропагаторы фермионов в КЭД в двух разных калибровках. Заметим, что наиболее важные приложения преобразования ЛХФ обычно связаны с предсказаниями некоторых членов в высоких порядках теории возмущений: для КЭД [7] и ее обобщений [8], для более общих $SU(N)$ калибровочных теорий [9].

В этой работе мы представляем краткий обзор результатов [4] с акцентом на том, как преобразование ЛХЧ раскрывает естественным образом существование $\hat{\zeta}$-функций и позволяет обобщить результаты (1) на все порядки по ε.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛХФ

Рассмотрим КЭД в евклидовом пространстве размерности d ($d = 4 - 2\varepsilon$). Общая форма пропагатора фермиона в калибровке с параметром ξ имеет вид в p и x представлениях:

$$S_F(p,\xi) = \frac{1}{i\hat{p}}P(p,\xi), \quad S_F(x,\xi) = \hat{x}X(x,\xi), \quad (2)$$

где факторы $\hat{p}$ и $\hat{x}$, содержащие γ-матрицы Дирака, представлены в явном виде.

Преобразование ЛХФ связывает пропагатор фермионов в двух разных калибровках, с параметрами ξ и η соответственно, как (в рамках размерной регуляризации) [4]:

$$S_F(x,\xi) = S_F(x,\eta)e^{iD(x)}, \qquad (3)$$

где

$$D(x) = \frac{i\Delta A}{\varepsilon}\Gamma(1-\varepsilon)(\pi\mu^2x^2)^{\varepsilon}, \qquad (4)$$
$$\Delta = \xi - \eta, \quad A = \frac{\alpha_{\rm em}}{4\pi} = \frac{e^2}{(4\pi)^2},$$

т.е. $D(x)$ вносит вклад, пропорциональный ΔA и полюсу ε^{-1}.

1) Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
2) Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, LPTHE, F-75005 Paris, France.
* E-mail: kotikov@theor.jinr.ru

3) Заметим, что результаты в [3] содержат также кратные ζ-функции (multi-zeta values), рассмотрение которых выходит за рамки настоящей работы.

Предположим, что для некоторого параметра фиксации калибровки η пропагатор фермиона $S_F(p,\eta)$ с внешним импульсом p имеет вид (2) с

$$P(p,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\eta)A^m\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{p^2}\right)^{m\varepsilon}, \tag{5}$$
$$\tilde{\mu}^2=4\pi\mu^2,$$

где $a_m(\eta)$ — коэффициенты петлевого разложения, а $\tilde{\mu}$ — шкала перенормировки, расположенная между шкалами MS и $\overline{\mathrm{MS}}$ схем. Преобразование ЛХФ определяет пропагатор фермиона при другом калибровочном параметре ξ как

$$P(p,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\eta)A^m\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{p^2}\right)^{m\varepsilon}\times \tag{6}$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1-(m+1)\varepsilon}{1-(m+l+1)\varepsilon}\times$$
$$\times\,\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)\frac{(\Delta A)^l}{(-\varepsilon)^l l!}\left(\frac{\mu^2_{\mathrm{MV}}}{p^2}\right)^{l\varepsilon},$$

где

$$\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)= \tag{7}$$
$$=\frac{\Gamma(1-(m+1)\varepsilon)\Gamma(1+(m+l)\varepsilon)\Gamma^{2l}(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+m\varepsilon)\Gamma(1-(m+l+1)\varepsilon)}.$$

Здесь символом MV обозначена так называемая минимальная шкала Владимирова, введенная в [4]. Заметим, что при использовании популярной G-шкалы [10] были получены [4] те же окончательные результаты (16) и (17).

Чтобы получить (6), мы использовали пропагатор фермиона $S_F(p,\eta)$ с $P(p,\eta)$, заданным (5), сделали преобразование Фурье к $S_F(x,\eta)$ и преобразование ЛХФ (3). Как последний шаг мы сделали обратное преобразование Фурье и получили $S_F(p,\xi)$ с $P(p,\xi)$ в (6).

Исследуем теперь фактор $\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)$. Используя разложение Γ-функции

$$\Gamma(1+\beta\varepsilon)=\exp\left[-\gamma\beta\varepsilon+\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s\eta_s\beta^s\varepsilon^s\right], \tag{8}$$
$$\eta_s=\frac{\zeta_s}{s}$$

(γ — константа Эйлера) и подставляя его в (7), получаем для $\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)$:

$$\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)=\exp\left[\sum_{s=2}^{\infty}\eta_s p_s(m,l)\varepsilon^s\right], \tag{9}$$

где

$$p_s(m,l)=(m+1)^s-(m+l+1)^s+ \tag{10}$$
$$+\,2l+(-1)^s\Big\{(m+l)^s-m^s\Big\},$$
$$p_1(m,l)=0,\quad p_2(m,l)=0.$$

Как видно из формулы (9), $\Phi_{\mathrm{MV}}(m,l,\varepsilon)$ содержит значения ζ_s-функции заданного веса s (или трансцендентного уровня) при ε^s. Такое свойство сильно ограничивает коэффициенты, тем самым упрощая анализ (см. ссылку [11] на работы, где это свойство также было использовано).

3. $\hat{\zeta}_{2n-1}$

Теперь сосредоточимся на многочлене $p_s(m,l)$ в (10), который удобно разделить на четные и нечетные значения s. Выполняются следующие рекурсивные соотношения:

$$p_{2k}=p_{2k-1}+Lp_{2k-2}+p_3, \tag{11}$$
$$p_{2k-1}=p_{2k-2}+Lp_{2k-3}+p_3,\quad L=l(l+1).$$

Выражая четные значения p_{2k} через нечетные

$$p_{2k}=\sum_{s=2}^{k}p_{2s-1}C_{2k,2s-1}= \tag{12}$$
$$=\sum_{m=1}^{k-1}p_{2k-2m+1}C_{2k,2k-2m+1},$$

мы можем определить точную структуру $C_{2k,2k-2m+1}$ в виде

$$C_{2k,2k-2m+1}= \tag{13}$$
$$=b_{2m-1}\frac{(2k)!}{(2m-1)!(2k-2m+1)!},$$
$$b_{2m-1}=\frac{(2^{2m}-1)}{m}B_{2m},$$

где B_m — хорошо известные числа Бернулли.

Теперь удобно представить аргумент экспоненты в выражении (9) следующим образом:

$$\sum_{s=3}^{\infty}\eta_s p_s\varepsilon^s=\sum_{k=2}^{\infty}\eta_{2k}p_{2k}\varepsilon^{2k}+ \tag{14}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\eta_{2k-1}p_{2k-1}\varepsilon^{2k-1}.$$

С помощью (12) первое слагаемое в правой части (14) может быть выражено как

$$\sum_{k=2}^{\infty}\eta_{2k}p_{2k}\varepsilon^{2k}= \tag{15}$$
$$=\sum_{k=2}^{\infty}\eta_{2k}\varepsilon^{2k}\sum_{s=2}^{k}p_{2s-1}C_{2k,2s-1}=$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty} p_{2s-1} \sum_{k=s}^{\infty} \eta_{2k} C_{2k,2s-1} \varepsilon^{2k}.$$

Тогда соотношение (14) можно записать как

$$\sum_{s=2}^{\infty} \hat{\eta}_{2s-1} p_{2s-1} \varepsilon^{2s-1} =$$
$$= \sum_{s=2}^{\infty} [\hat{\zeta}_{2s-1}/(2s-1)] p_{2s-1} \varepsilon^{2s-1},$$

где

$$\hat{\zeta}_{2s-1} = \zeta_{2s-1} + \sum_{k=s}^{\infty} \zeta_{2k} \hat{C}_{2k,2s-1} \varepsilon^{2(k-s)+1} \quad (16)$$

с

$$\hat{C}_{2k,2s-1} = \frac{2s-1}{2k} C_{2k,2s-1} = \quad (17)$$
$$= b_{2k-2s+1} \frac{(2k-1)!}{(2s-2)!(2k-2s+1)!}.$$

Соотношения (16), (17) и (13) приводят к выражению для $\hat{\zeta}_{2s-1}$ в терминах обычных ζ-функций, действительному во всех порядках в разложении по ε.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результата (6), полученного с помощью преобразования ЛХФ для пропагатора фермиона, мы нашли рекурсивные соотношения (11) между четными и нечетными значениями многочлена, связанного с фактором $\Phi_{\rm MV}(m, l, \varepsilon)$ (7). Эти рекурсивные соотношения приводят к возможности выразить все результаты для $\Phi_{\rm MV}(m, l, \varepsilon)$ в терминах $\hat{\zeta}_{2s-1}$, выражения (16) и (17) для которых справедливы для всех порядков теории возмущений.

Один из нас (А.В.К.) благодарит Организационный комитет Сессии-конференции СЯФ ОФН РАН за приглашение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. A. Baikov and K. G. Chetyrkin, PoS (LL2018), 008 (2018).
2. D. J. Broadhurst, hep-th/9909185; P. A. Baikov and K. G. Chetyrkin, Nucl. Phys. B **837**, 186 (2010).
3. A. Georgoudis, V. Goncalves, E. Panzer, and R. Pereira, arXiv: 1802.00803 [hep-th]; P. A. Baikov and K. G. Chetyrkin, JHEP **1806**, 141 (2018); **1910**, 190 (2019).
4. A. V. Kotikov and S. Teber, Phys. Rev. D **100**, 105017 (2019).
5. A. V. Kotikov and S. Teber, arXiv: 1912.10957 [hep-th].
6. L. D. Landau and I. M. Khalatnikov, ЖЭТФ **29**, 89 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 69 (1956)]; E. S. Fradkin, ЖЭТФ **29**, 258 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 361 (1956)].
7. A. Bashir and A. Raya, Phys. Rev. D **66**, 105005 (2002); S. Jia and M. R. Pennington, Phys. Rev. D **95**, 076007 (2017).
8. A. Ahmad, J. J. Cobos-Martínez, Y. Concha-Sánchez, and A. Raya, Phys. Rev. D **93**, 094035 (2016); A. James, A. V. Kotikov, and S. Teber, Phys. Rev. D **101**, 045011 (2020).
9. T. De Meerleer, D. Dudal, S. P. Sorella, P. Dall'Olio, and A. Bashir, Phys. Rev. D **97**, 074017 (2018); Phys. Rev. D **101** (8), 085005 (2020).
10. K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev, and F. V. Tkachov, Nucl. Phys. B **174**, 345 (1980).
11. A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B **582**, 19 (2000); **661**, 19 (2003); **769**, 217 (2007); A. V. Kotikov, L. N. Lipatov, A. I. Onishchenko, and V. N. Velizhanin, Phys. Lett. B **595**, 521 (2004); L. Bianchi, V. Forini, and A. V. Kotikov, Phys. Lett. B **725**, 394 (2013).

LANDAU–KHALATNIKOV–FRADKIN TRANSFORMATION AND EVEN ζ FUNCTIONS

A. V. Kotikov[1] and S. Teber[2]

[1] Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Russia
[2] Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, LPTHE, F-75005 Paris, France

We give the exact formula relating standard ζ functions and so-called $\hat{\zeta}$ functions in all orders of perturbation theory. The formula is based on the Landau–Khalatnikov–Fradkin (LKF) transformation.