

## ПРИМЕНЕНИЕ $2\alpha + n$ ТРЕХТЕЛЬНОЙ КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ ЯДРА ${}^9\text{Be}$ В РЕАКЦИИ ${}^9\text{Be}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^9\text{Be}$

© 2021 г. Б. А. Уразбеков<sup>1), 2), 3), 4)\*</sup>, А. С. Деникин<sup>1), 2)</sup>, Н. Итако<sup>3), 4)</sup>, Д. Джансейтов<sup>2), 5)</sup>

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.; после доработки 30.06.2020 г.; принята к публикации 06.07.2020 г.

На основе трехтельной кластерной модели  $2\alpha + n$  ядра  ${}^9\text{Be}$  исследованы процессы упругого рассеяния в реакции  ${}^3\text{He} + {}^9\text{Be}$ . Трехчастичная волновая функция  ${}^9\text{Be}$ , полученная вариационным методом на основе гауссова базиса, использована для получения аналитического представления плотности распределения ядерной материи. Потенциал взаимодействия для системы  ${}^3\text{He} + {}^9\text{Be}$ , вычисленный в рамках метода двойной свертки, использован для анализа экспериментальных данных дифференциального сечения упругого рассеяния  ${}^9\text{Be}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^9\text{Be}$  при энергиях столкновения от 30 до 60 МэВ.

DOI: 10.31857/S0044002721030144

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование слабосвязанных экзотических ядер, проявляющих кластерные свойства, является одной из актуальных задач современной ядерной физики. Построение и анализ теоретических моделей легких ядер, обладающих кластерной структурой, наиболее эффективны в случае возможности сравнения выполненных расчетов с доступными экспериментальными данными. Ядро  ${}^9\text{Be}$  оказывается в этой связи уникальным примером, являясь, с одной стороны, стабильным ядром, удобным для выполнения экспериментальных исследований (см., например, [1–3]), с другой стороны, ядром, проявляющим ярко выраженные кластерные свойства как в основном, так и в низколежащих возбужденных состояниях.

В столкновениях ядра  ${}^9\text{Be}$  с простейшими снарядами, такими как  $p$ ,  $t$ ,  ${}^{3,4}\text{He}$ , удается исследовать уникальные каналы реакции. В частности, описание дифференциального сечения реакции  ${}^9\text{Be}(d, \alpha){}^7\text{Li}$ , изученной экспериментально в работе [4], в рамках метода сильной связи каналов показало,

что в области больших углов рассеяния в сечение вносит значительный вклад канал срыва тяжелого кластера  ${}^5\text{He}$ , а на передних углах рассеяния доминирует последовательная передача нейтрона и протона, конкурирующая с прямым захватом  $d$ .

Настоящее исследование посвящено описанию упругого рассеяния при взаимодействии  ${}^3\text{He} + {}^9\text{Be}$  в рамках ранее предложенной теоретической модели [4–6], успешно примененной для изучения структуры ядра  ${}^9\text{Be}$  и ее влиянию на динамику ядро-ядерных столкновений с ядрами  $d$  и  ${}^4\text{He}$ .

### 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

#### 2.1. Оптический потенциал

Дифференциальные сечения упругого рассеяния  ${}^3\text{He}$  на ядрах  ${}^9\text{Be}$  были рассчитаны в рамках оптической модели (ОМ). При этом оптический потенциал (ОП) взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(R) = -N_{\text{DF}} V^{\text{DF}}(R) - iW^V(R) + V^{SO}(R)(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + V^C(R), \quad (1)$$

где  $W^V$ ,  $V^{SO}$ ,  $V^C$  и  $V^{\text{DF}}$  — мнимая часть ОП, спин-орбитальный, кулоновский потенциалы и потенциал двойного фолдинга соответственно. Мнимая часть оптического потенциала имеет стандартную форму в виде потенциала Вудса—Саксона:

$$W^V(R) = W_0 f^{R_w a_w}(R), \quad (2)$$

<sup>1)</sup>Государственный университет “Дубна”, Дубна, Россия.

<sup>2)</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

<sup>3)</sup>Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”, Caserta, Italia.

<sup>4)</sup>Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Complesso Univeristario di Monte S. Angelo, Napoli, Italia.

<sup>5)</sup>Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан.

\*E-mail: bakytzhan.urazbekov@gmail.com

$$f^{R_w a_w}(R) = \left(1 + \exp\left(\frac{R - R_w}{a_w}\right)\right)^{-1}.$$

Спин-орбитальный потенциал выражается в виде потенциала Томаса:

$$\begin{aligned} V^{SO}(R) &= \\ &= V_0^{SO} \left(\frac{\hbar}{m_\pi c}\right)^2 \frac{1}{R} \frac{d}{dR} (f^{R_{SO} a_{SO}}(R)). \end{aligned} \quad (3)$$

Кулоновский потенциал взят в виде взаимодействия точечно заряженной частицы с однородно заряженной сферой:

$$V^C(R) = \begin{cases} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_C} \left(3 - \frac{R^2}{R_C^2}\right), & R \leq R_C, \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R}, & R > R_C. \end{cases} \quad (4)$$

Потенциал ядерного взаимодействия  $V^{\text{DF}}(R)$  в выражении (1) рассчитан методом двойного фолдинг-потенциала, усредняя эффективный нуклон-нуклонный потенциал  $V_{NN}$ , выбранный в форме DDM3Y-Paris [7], по объемам сталкивающихся ядер:

$$\begin{aligned} V^{\text{DF}}(R) &= \\ &= \iint \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2) V_{NN}(\mathbf{R} - \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор относительного расстояния между центрами масс сталкивающихся ядер,  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор в собственной системе ядра  $i$ ,  $\rho_i(r)$  — функция плотности распределения ядерного вещества ядра  $i$ .

## 2.2. Плотность распределения ядерного вещества ядра ${}^3\text{He}$

Для описания распределения плотности ядерного вещества простейших ядер-снарядов, таких, как  $t$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  $\alpha$ , была использована функция Гаусса

$$\rho(r) = N \exp(-ar^2), \quad (6)$$

параметры которой определены из условия воспроизведения величины среднеквадратичного радиуса распределения ядерного вещества

$$a = \frac{3}{2\langle r_m^2 \rangle}, N = A \left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2}. \quad (7)$$

Здесь  $A$  — масса ядра снаряда. Для ядер  ${}^3\text{He}$  величина  $\langle r_m^2 \rangle^{1/2} = 1.703$  фм [8].

## 2.3. Плотность распределения ядерного вещества ядра ${}^9\text{Be}$

О сложной структуре ядра  ${}^9\text{Be}$  свидетельствует наличие в его спектре первого возбужденного состояния  $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ ,  $E^* = 1.68$  МэВ с положительно пространственной четностью, противоречащей предсказаниям оболочечной модели, и большая величина квадрупольного момента  $Q = +52.9$  мбн [9]. Основываясь на выводах, сделанных ранее в работах [1, 10, 11], при расчете функции распределения плотности ядерного вещества мы будем исходить из предположения о кластерной структуре ядра  ${}^9\text{Be} = 2\alpha + n$ .

Расчет трехтельной волновой функции выполнен в рамках вариационного метода решения интегральных уравнений Хилла—Уилера, полученных на основе трехмерного уравнения Шредингера для трехчастичной ядерной системы, подробно изложенного в работе [12]. В данном подходе полная волновая функция с полным спином  $J$  и спиновой проекцией  $M_J$  представляется в виде

$$\Psi_{JM_J} = \sum_l C_l^{(i)} \phi_l^\gamma(i, jk). \quad (8)$$

Здесь для простоты дальнейшего изложения опущены пространственные координаты Якоби  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y}_i$ , символы  $i, j, k$  соответствуют индексам кластера (см. рис. 1), а комбинация индексов  $(i, jk)$  соответствует определенному выбору координат Якоби  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y}_i$  рассматриваемой трехтельной системы, где  $\mathbf{x}_i$  — вектор относительного расстояния между парой частиц  $j$  и  $k$ , а  $\mathbf{y}_i$  — вектор относительного расстояния между центром масс пары  $j$  и  $k$  и частицей  $i$ . Коэффициенты  $C_l^{(i)}$  в выражении (8) являются параметрами разложения волновой функции и находятся в результате решения вариационной задачи. Численные значения коэффициентов были рассчитаны нами ранее и для основного состояния ядра  ${}^9\text{Be}$  приведены в работе [13].

Явный вид базисных функций  $\phi_l^\gamma(i, jk)$  выбран в форме прямого произведения пространственной и спиновой волновых функций:

$$\phi_l^\gamma(i, jk) = [\Phi_l^\gamma(i, jk) \otimes \chi_S]_{JM_J}. \quad (9)$$

Здесь индекс  $\gamma$  включает в себя квантовые числа  $L \lambda l$ . Пространственная часть  $\Phi_l^\gamma(i, jk)$  волновой функции (9) построена с помощью многомерной функции Гаусса:

$$\begin{aligned} \Phi_l^\gamma(i, jk) &= x_i^\lambda y_i^l \exp\left(-\alpha_l^{(i)} x_i^2 - \beta_l^{(i)} y_i^2\right) \times \\ &\times [Y_\lambda(\hat{x}_i) \otimes Y_l(\hat{y}_i)]_{LM_L}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $L$  и  $M_L$  — полный орбитальный момент системы и его проекция,  $\lambda, l$  — орбитальные моменты,

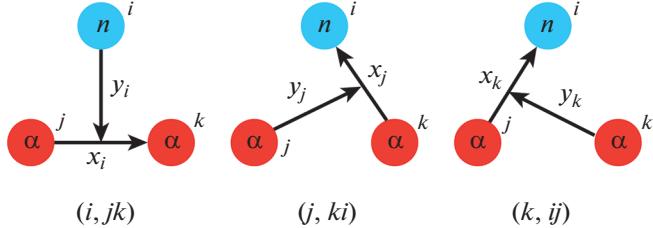


Рис. 1. Различные наборы относительных координат Якоби для трехтельной кластерной модели  $2\alpha + n$ .

сопряженные координатам  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y}_i$  соответственно,  $\alpha_{\tilde{\gamma}}^{(i)}, \beta_{\tilde{\gamma}}^{(i)}$  — параметры волновой функции, значения которых приведены в работе [13].

Выбранная форма базисных функций удобна тем, что ее можно легко преобразовать для использования с альтернативным набором координат Якоби. В частности, преобразование пространственной части волновой функции из набора  $(i, jk)$  в набор  $(j, ki)$  можно выразить в следующей форме:

$$\Phi_i^{\gamma}(i, jk) = \sum_{\tilde{\gamma}} A_{\tilde{\gamma}\gamma}^{j \leftarrow i} \Phi_i^{\tilde{\gamma}}(j, ki), \quad (11)$$

где суммирование производится по квантовым числам набора  $\tilde{\gamma}$  с учетом условия  $\tilde{\lambda} + \tilde{l} = \lambda + l$ . Коэффициенты пересвязки  $A_{\tilde{\gamma}\gamma}^{j \leftarrow i}$  определены следующим образом [14]:

$$\begin{aligned} A_{\tilde{\gamma}\gamma}^{j \leftarrow i} &= (-1)^{\lambda+l} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 l_1 l_2} \left( \Omega_{11}^{j \leftarrow i} \right)^{\lambda_1} \times \\ &\quad \times \left( \Omega_{12}^{j \leftarrow i} \right)^{\lambda_2} \left( \Omega_{21}^{j \leftarrow i} \right)^{l_1} \left( \Omega_{22}^{j \leftarrow i} \right)^{l_2} \times \\ &\quad \times \sqrt{\frac{[\lambda]![l]![\lambda][l][\lambda_1][l_1][\lambda_2][l_2][\tilde{\lambda}][\tilde{l}]}{[\lambda_1]![l_1]![\lambda_2]![l_2]!}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda \\ l_1 & l_2 & l \\ \tilde{\lambda} & \tilde{l} & L \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $[x] = 2x + 1$ , матрицы размерностью  $2 \times 3$  и  $3 \times 3$  есть  $3j$  и  $9j$  коэффициенты Вигнера соответственно, а элементы матрицы  $\Omega_{nm}^{j \leftarrow i}$  определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega^{j \leftarrow i} &= \frac{1}{\sqrt{(m_j + m_k)(m_i + m_k)}} \times \\ &\quad \times \begin{pmatrix} -\sqrt{m_i m_j} & -\sqrt{m_k M} \\ \sqrt{m_k M} & \sqrt{m_i m_j} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь величина  $M = m_i + m_j + m_k$ .

Представим плотность распределения вещества ядра  ${}^9\text{Be}$  в рамках трехтельной модели как сумму плотностей распределения двух альфа-кластеров и нейтрона

$$\rho_{^9\text{Be}}(r) = \rho_i(r) + \rho_j(r) + \rho_k(r), \quad (13)$$

где каждое слагаемое, отражающее вклад в плотность ядра отдельного кластера, имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_i(r) &= \iint |\Psi_{JM_J}(i, jk)|^2 \times \\ &\quad \times \delta \left( \mathbf{r} - \frac{m_j + m_k}{m_i + m_j + m_k} \mathbf{y}_i \right) d\mathbf{x}_i d\mathbf{y}_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисление интеграла (14) значительно облегчается подходящим выбором системы координат, например, при выборе  $\mathbf{r} \parallel O_z$  интегрирование по угловым переменным упрощается за счет использования свойств сферических гармоник. При этом выражение (11) позволяет представить полную волновую функцию для любого набора координат Якоби.

В рамках выбранной модели предполагаем, что валентный нейtron не имеет внутренней структуры и его вклад в плотность распределения вещества  ${}^9\text{Be}$  определяется исключительно соответствующей компонентой трехтельной волновой функции  $\Psi_{JM_J}$ . Для корректного расчета вклада  $\alpha$ -кластеров в плотность распределения вещества ядра  ${}^9\text{Be}$  необходимо дополнительно учесть их внутреннюю плотность распределения  $\rho_{\alpha}^{(in)}(r) = \rho_0 \exp(-\gamma_0 r^2)$  [15]. Таким образом, соответствующие матричные элементы для плотности распределения вещества  $j$ -го  $\alpha$ -кластера следует переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho_j^{(\alpha)}(r) &= \iint |\Psi_{JM_J}(j, ki)|^2 \times \\ &\quad \times \rho_{\alpha}^{(in)}(\mathbf{r} - \mathbf{z}) \times \\ &\quad \times \delta \left( \mathbf{z} - \frac{m_k + m_i}{m_k + m_i + m_j} \mathbf{y}_j \right) d\mathbf{z} d\mathbf{x}_j d\mathbf{y}_j. \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогичное выражение можно записать и для вклада  $k$ -го  $\alpha$ -кластера.

Используем известное выражение для разложения плоской волны по парциальным волнам

$$\begin{aligned} \exp(-\gamma_0 \mathbf{r} \cdot \mathbf{y}) &= \\ = 4\pi \sum_{kq} i^k j(\gamma_0 r y) Y_{kq}^*(\hat{r}) Y_{kq}(\hat{y}), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $j_k(x)$  — сферическая функция Бесселя первого рода, и соотношение (см., например, [14], с. 270)

$$\begin{aligned} \int y^{2l+k+2} \exp(-\beta y^2) j_k(\alpha y) dy &= \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2l)!! (\alpha)^k}{\beta^{l+k+3/2}} \exp\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right) L_l^{k+1/2}\left(-\frac{\alpha^2}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $L_l^{k+1/2}(x)$  — присоединенные полиномы Лагерра. Соотношения (16) и (17) позволяют переписать функцию плотности распределения ядерного вещества для валентного нейтрана и  $\alpha$ -кластера в выражениях (14) и (15) в аналитическом виде, удобном для проведения вычислений,

$$\rho_i^{(n)}(r) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda l} \left( \mu^{(i)} r \right)^{2l+2} \Gamma\left(\frac{3}{2} + \lambda\right) \times \quad (18)$$

$$\times \sum_{\nu\nu'} C_\nu^{(i)} C_{\nu'}^{(i)} \frac{\exp\left(-\beta_{\nu\nu'}^{(i)} (\mu^{(i)} r)^2\right)}{\left(\alpha_{\nu\nu'}^{(i)}\right)^{3/2+\lambda}},$$

$$\rho_j^{(\alpha)}(r) = 4\pi^{3/2} \rho_0 \sum_{\lambda l \nu\nu'} C_\nu^{(i)} C_{\nu'}^{(i)} \times \quad (19)$$

$$\times \frac{(2l)!! \Gamma\left(\frac{3}{2} + \lambda\right)}{\left(\alpha_{\nu\nu'}^{(j)}\right)^{3/2+\lambda} \left(\frac{1}{2} \beta_{\nu\nu'}^{(j)} + \frac{1}{2} \gamma_0 (\mu^{(j)})^2\right)^{3/2+l}} \times$$

$$\times L_l^{1/2} \left(-P_{\nu\nu'}^{(j)}\right) \exp\left(\left(-\gamma_0 + P_{\nu\nu'}^{(j)}\right) r^2\right),$$

$$P_{\nu\nu'}^{(j)} = \frac{(2\gamma_0 \mu^{(j)})^2}{\beta_{\nu\nu'}^{(j)} + \gamma_0 (\mu^{(j)})^2},$$

$$\alpha_{\nu\nu'}^{(j)} = \alpha_\nu^{(j)} + \alpha_{\nu'}^{(j)}, \quad \beta_{\nu\nu'}^{(j)} = \beta_\nu^{(j)} + \beta_{\nu'}^{(j)},$$

где  $\mu^{(i)} = \frac{m_i + m_j + m_k}{m_j + m_k}$ , а  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

На рис. 2 показаны функции плотности распределения ядерного вещества для валентного нейтрана и  $\alpha$ -кластера ядра  ${}^9\text{Be}$ , полученные с помощью аналитических формул (18) и (19). Варьируемые параметры волновой функции, представленные в работе [5], были дополнительны уточнены для обеспечения соответствия собственного значения гамильтонiana для основного состояния трехтельной системы  $2\alpha + n$  и известной экспериментальной

величины энергии связи системы  ${}^9\text{Be} = 2\alpha + n$ . Полученное теоретическое значение энергии основного состояния равно  $-1.58$  МэВ, а экспериментально установленное значение  $-1.57$  МэВ [16]. Рассчитанная плотность распределения ядерного вещества в ядре  ${}^9\text{Be}$ , представленная на рис. 2, демонстрирует характерное поведение в периферической области, где основной вклад в плотность вещества вносит валентный нуклон. Максимум в центральной области формируется за счет вклада  $\alpha$ -кластеров.

Рассчитанная плотность распределения вещества ядра  ${}^9\text{Be}$  позволяет вычислить значение среднеквадратического материального радиуса

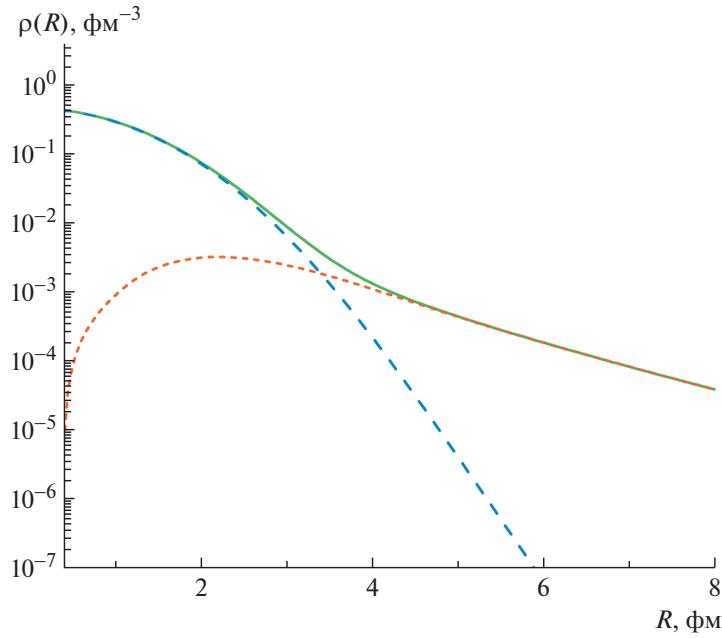
$$\langle r_m^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty \rho(r) r^4 dr}{\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr}.$$

Полученный результат  $\langle r_m^2 \rangle^{1/2} = 2.62$  фм хорошо согласуется со значением 2.61 фм, рассчитанным в рамках метода антисимметризованной молекулярной динамики [17], а также в согласии с данными  $2.53 \pm 0.072$  фм, полученными на основе анализа измеренных полных сечений реакции [18].

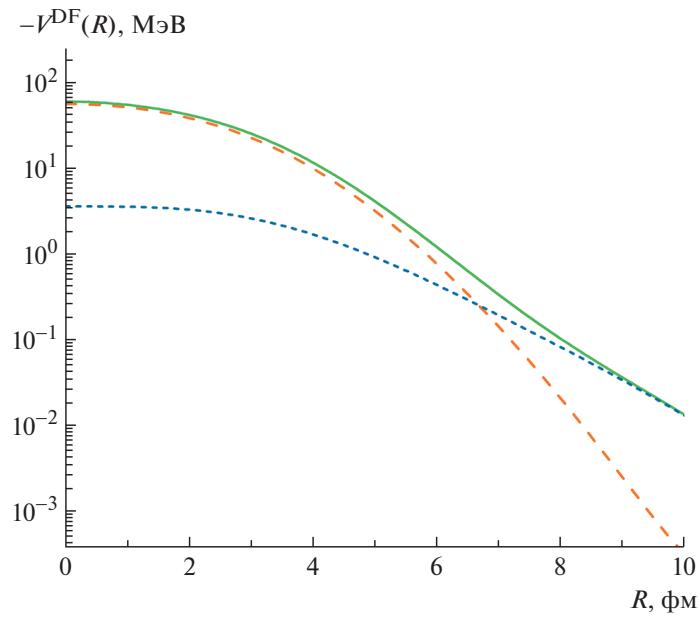
На рис. 3 представлены результаты расчета фолдинг-потенциала (5) взаимодействия  ${}^3\text{He}$  с кластерами ядра  ${}^9\text{Be}$ . Отметим, что в периферической области, начиная с расстояния 7 фм, основной вклад в ядро-ядерное взаимодействие вновь обеспечивает валентный нейтрон ядра  ${}^9\text{Be}$ .

Расчеты дифференциальных сечений упругого рассеяния  ${}^3\text{He}$  на ядрах  ${}^9\text{Be}$  при энергиях 30, 40, 47, 51 и 60 МэВ выполнены с помощью компьютерного кода SFRESCO [19]. Подбор параметров мнимой части ОП и коэффициента  $N_{DF}$  проведен методом поиска минимума среднеквадратичного отклонения экспериментальных данных и теоретических расчетов для сечений упругого рассеяния. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными [20–22] представлено на рис. 4. Теоретические расчеты демонстрируют хорошее согласие с имеющимися экспериментальными данными. Найденные параметры оптического потенциала представлены в табл. 1.

Необходимо добавить, что представленная в настоящей работе теоретическая модель, учитывающая  $2\alpha + n$  кластерную структуру ядра  ${}^9\text{Be}$  при взаимодействии с  ${}^3\text{He}$ , имеет преимущество в описании экспериментальных данных перед теоретическим подходом, представленным в работе [20]. Авторами работы [20] также рассчитаны дифференциальные сечения реакции  ${}^9\text{Be}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^9\text{Be}$ , а плотность распределения вещества ядра  ${}^9\text{Be}$



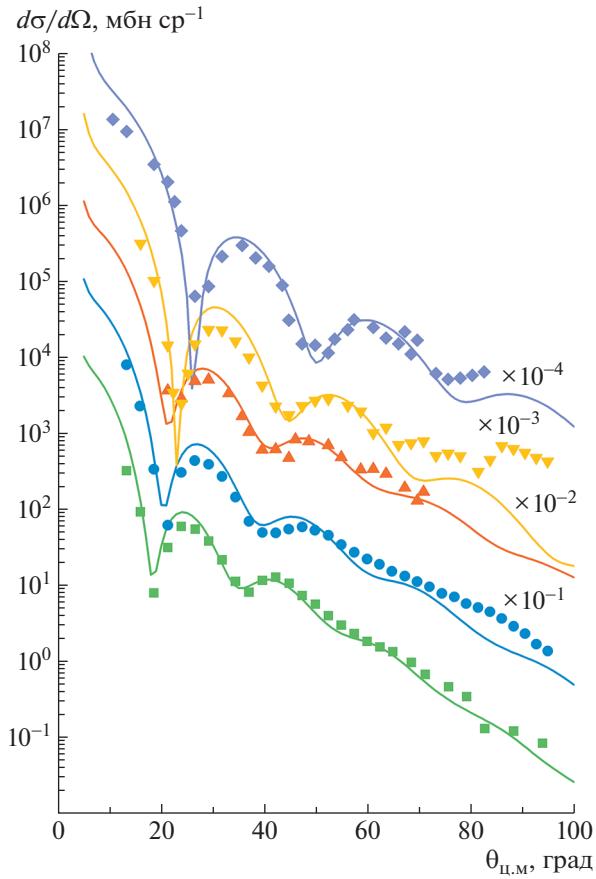
**Рис. 2.** Плотность распределения ядерного вещества ядра  ${}^9\text{Be}$ . Кривые: штриховая — вклад  $\alpha$ -кластеров, с короткими штрихами — вклад валентного нейтрона, сплошная — суммарная функция плотности распределения вещества.



**Рис. 3.** Фолдинг-потенциал взаимодействия ядер  ${}^3\text{He} + {}^9\text{Be}$ , рассчитанный на основе трехтельной кластерной модели  $2\alpha + n$  ядра  ${}^9\text{Be}$ . Кривые: штриховая — компонента взаимодействия ядер  ${}^3\text{He}$  с  $\alpha$ -кластерами в ядре  ${}^9\text{Be}$ , с короткими штрихами — взаимодействие ядер  ${}^3\text{He}$  с валентным нейтроном в  ${}^9\text{Be}$ , сплошная — их сумма.

предложена в качестве параметризованной функции Гаусса. Среднеквадратичные отклонения  $\chi^2$ , полученные на основе двух разных теоретических подходов, представлены в табл. 1. Сравнение по-

казывает преимущество в пользу применения кластерной модели  $2\alpha + n$  в ядре  ${}^9\text{Be}$ , в особенности при энергиях 47, 51 и 60 МэВ.



**Рис. 4.** Дифференциальные сечения упругого рассеяния  $^3\text{He}$  на ядрах  $^9\text{Be}$  в сравнении с экспериментальными данными [20–22] при энергиях налетающей частицы 30 МэВ ( $\blacklozenge$ ), 40 МэВ ( $\blacktriangledown$ ), 47 МэВ ( $\blacktriangle$ ), 51 МэВ ( $\bullet$ ), 60 МэВ ( $\blacksquare$ ).

**Таблица 1.** Параметры оптического потенциала, использованные для расчета упругого рассеяния  $^3\text{He}$  на ядрах  $^9\text{Be}$

$E(^3\text{He}), \text{МэВ}$	$NDF$	$W_0, \text{МэВ}$	$r_w^{(1)}, \text{фм}$	$a_w, \text{фм}$	$r_C^{(1)}, \text{фм}$	$V_{SO}, \text{МэВ}$	$r_{SO}^{(1)}, \text{фм}$	$\chi^2/N$	$\chi^2/N [20]$
30	1.62	32.73	0.910	0.887	0.809	2.50	0.738	5.7	9.0
40	1.59	34.75	0.910	0.887	0.809	2.50	0.738	9.8	14.3
47	1.86	36.39	0.955	0.743	0.809	2.50	0.738	2.4	10.0
51	1.79	36.47	0.914	0.830	0.809	2.50	0.738	5.4	28.0
60	1.92	30.30	0.979	0.887	0.809	2.50	0.738	4.4	68.0

<sup>1)</sup> Радиус взаимодействия  $R_i$  связан с приведенным радиусом  $r_i = R_i(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})^{-1}$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С целью изучения особенностей взаимодействия легких атомных ядер в области низких энергий столкновения в рамках метода двойного фолдинга выполнены расчеты оптического потенциала взаимодействия ядер  $^3\text{He}$  и  $^9\text{Be}$  в области энер-

гий 10–20 МэВ/нуклон. Для выполнения фолдинг процедуры проведены теоретические расчеты и получены аналитические выражения для вычисления плотности распределения вещества для ядра мишени  $^9\text{Be}$  в рамках трехтельной модели  $2\alpha + n$ . Полученные аналитические соотношения ис-

пользованы для вычисления фолдинг-потенциала взаимодействия ядер  ${}^3\text{He}$  и  ${}^9\text{Be}$ . Анализ доступных экспериментальных данных по упругому рассеянию для указанной реакции выполнен с использованием найденного фолдинг-потенциала в качестве вещественной части оптического потенциала. Параметры мнимой части оптического потенциала были подобраны на основе процедуры минимизации среднеквадратичного отклонения экспериментальных данных и теоретических расчетов для сечений упругого рассеяния. Рассчитанные дифференциальные сечения упругого рассеяния  ${}^3\text{He}$  на ядрах  ${}^9\text{Be}$  при лабораторных энергиях 30, 40, 47, 51 и 60 МэВ демонстрируют хорошее согласие с экспериментальными данными. Полученные оптические потенциалы будут в дальнейшем использованы для анализа данных по неупругому рассеянию и каналов передач для исследуемой реакции в рамках метода искаженных волн и метода сильной связи каналов.

Аналитические выражения, полученные для плотности распределения вещества трехтельной ядерной системы  $2\alpha + n$ , планируется обобщить и применить для расчетов плотности и фолдинг-потенциалов взаимодействия других атомных ядер с характерной трехластерной структурой, например,  ${}^6\text{He}$ ,  ${}^{11}\text{Li}$  и др.

Автор (Уразбеков Б.) выражает благодарность В.И. Кукулину за предоставленный вычислительный код для расчета волновой функции трехтельных систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- T. A. D. Brown, P. Papka, B. R. Fulton, D. L. Watson, S. P. Fox, D. Groombridge, M. Freer, N. M. Clarke, N. I. Ashwood, N. Curtis, V. Ziman, P. McEwan, S. Ahmed, W. N. Catford, D. Mahboub, C. N. Timis, *et al.*, Phys. Rev. C **76**, 054605 (2007).
- N. Keeley, A. Pakou, V. Soukeras, F. Cappuzzello, L. Acosta, C. Agodi, A. Boiano, S. Calabrese, D. Carbone, M. Cavallaro, N. Deshmukh, A. Foti, A. Hacisalihoglu, M. La Commara, I. Martel, M. Mazzocco, *et al.*, Phys. Rev. C **99**, 014615 (2019).
- U. Umbelino, K. C. C. Pires, R. Lichtenhäuser, V. Scarduelli, G. A. Scotton, A. Lépine-Szily, V. Guimarães, J. Lubian, B. Paes, J. L. Ferreira, M. A. G. Alvarez, J. M. B. Shorto, S. Appannababu, M. Assuncão, R. P. Condori, and V. Morcelle, Phys. Rev. C **99**, 064617 (2019).
- B. A. Urazbekov, A. S. Denikin, S. M. Lukyanov, N. Itaco, D. M. Janseitov, K. Mendibayev, V. Burjan, V. Kroha, J. Mrazek, W. H. Trzaska, M. N. Harakeh, D. Etasse, I. Stefan, D. Verney, T. Issatayev, Yu. E. Penionzhkevich, *et al.*, J. Phys. G **46**, 105110 (2019).
- Б. А. Уразбеков, А. С. Деникин, С. К. Сахиев, Н. Т. Буртебаев, Изв. РАН. Сер. физ. **80**, 276 (2016) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **80**, 247 (2016)].
- Б. А. Уразбеков, А. С. Деникин, С. К. Сахиев, С. М. Лукьянов, Изв. РАН. Сер. физ. **81**, 764 (2017) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **81**, 690 (2017)].
- N. Anantaraman, H. Toki, and G. Bertsch, Nucl. Phys. A **398**, 269 (1983).
- V. N. Pomerantsev, V. I. Kukulin, V. T. Voronchev, and A. Faessler, ЯФ **68**, 1511 (2005) [Phys. At. Nucl. **68**, 1453 (2005)].
- D. Sundholm and J. Olsen, Chem. Phys. Lett. **177**, 91 (1991).
- W. von Oertzen, Z. Phys. A **354**, 37 (1996).
- W. von Oertzen, Martin Freer, and Yoshiko Kanada-En'yo, Phys. Rep. **432**, 43 (2006).
- V. I. Kukulin, V. M. Krasnopol'sky, V. T. Voronchev, and P. B. Sazonov, Nucl. Phys. A **417**, 128 (1984).
- V. T. Voronchev, V. I. Kukulin, V. N. Pomerantsev, K. D. Razikov, and G. Ryzhikh, ЯФ **57**, 1964 (1994) [Phys. At. Nucl. **57**, 1890 (1994)].
- Y. Suzuki, M. Suzuki, and K. Varga, *Stochastic Variational Approach to Quantum-Mechanical Few-Body Problems*, vol. 54 (Springer Science & Business Media, 1998).
- G. R. Satchler and W. G. Love, Phys. Rep. **55**, 183 (1979).
- A. V. Karpov, A. S. Denikin, M. A. Naumenko, A. P. Alekseev, V. A. Rachkov, V. V. Samarin, V. V. Saiko, and V. I. Zagrebaev, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **859**, 112 (2017).
- M. Hirai, S. Kumano, K. Saito, and T. Watanabe, Phys. Rev. C **83**, 035202 (2011).
- E. Liatard, J. F. Bruandet, F. Glasser, S. Kox, Tsan Ung Chan, G. J. Costa, C. Heitz, Y. El Masri, F. Hanappe, R. Bimbot, D. Guillemaud-Mueller, and A. C. Mueller, EPL (Europhysics Letters) **13**, 401 (1990).
- I. J. Thompson, Comput. Phys. Rep. **7**, 167 (1988).
- D. M. Janseitov, S. M. Lukyanov, K. Mendibayev, Yu. E. Penionzhkevich, N. K. Skobelev, Yu. G. Sobolev, K. A. Kuterbekov, D. S. Valiolda, T. K. Zholdybayev, W. H. Trzaska, S. V. Khlebnikov, G. P. Tyurin, B. A. Urazbekov, M. N. Harakeh, V. Burjan, V. Kroha, *et al.*, Int. J. Mod. Phys. E **27**, 1850089 (2018).
- M. Baktybayev, N. Burtebayev, A. Duysebayev, B. Duysebayev, G. Zhurynbayeva, S. Sakuta, and R. Peterson, in *Proceedings of 1st Eurasia Conference on Nuclear Science and its Applications*, Izmir, 2000, Ed. by TAEK (Izmir, Turkiye Atom Enerjisi Kurumu, 2000), p. 822.
- A. T. Rudchik, E. I. Koschchy, A. Budzanowski, R. Siudak, A. Szczurek, I. Skwirczynska, Yu. G. Mashkarov, L. Glowacka, J. Turkiewicz, I. I. Zalyubovsky, V. A. Ziman, N. T. Burtebayev, A. D. Duysebayev, V. V. Adodin, *et al.*, Nucl. Phys. A **609**, 147 (1996).

# APPLICATION OF THE $2\alpha + n$ THREE-BODY CLUSTER MODEL OF ${}^9\text{Be}$ TO THE ${}^9\text{Be}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^9\text{Be}$ NUCLEAR REACTION

B. Urazbekov<sup>1),2),3),4)</sup>, A. Denikin<sup>1),2)</sup>, N. Itaco<sup>3),4)</sup>, D. Janseitov<sup>2),5)</sup>

<sup>1)</sup>*Dubna State University, Dubna, Russia*

<sup>2)</sup>*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

<sup>3)</sup>*Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi della Campania “Luigi Vanvitelli”, Caserta, Italia*

<sup>4)</sup>*Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Complesso Universitario di Monte S. Angelo, Napoli, Italia*

<sup>5)</sup>*Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan*

Based on the  $2\alpha + n$  three-body cluster model the elastic scattering of  ${}^3\text{He}$  on  ${}^9\text{Be}$  nuclei is investigated. An analytical expression of the function of nuclear matter density is deduced using the three-body wave function of  ${}^9\text{Be}$  obtained by means of the stochastic variation method with the Gaussian basis. An interaction potential for the  ${}^3\text{He} + {}^9\text{Be}$  system is calculated in the framework of the double-folding model using the analytical function of nuclear matter density. The potential is used to review the experimental data for elastic scattering of the  ${}^9\text{Be}({}^3\text{He}, {}^3\text{He}){}^9\text{Be}$  nuclear reaction at energies ranging from 30 to 60 MeV.