ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2021, том 84, № 4, с. 290–297

ЯДРА

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗНЫХ СПОСОБОВ УЧЕТА КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НОРМИРОВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В РАМКАХ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ

 Л. Д. Блохинцев[1)*], Д. А. Савин[1)]

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.; после доработки 25.12.2020 г.; принята к публикации 25.12.2020 г.

Показано, что уравнение Шредингера для суммы потенциала прямоугольной ямы и кулоновского потенциала однородно заряженного шара допускает аналитическое решение при произвольных значениях орбитального углового момента. Найден явный вид этого решения. С использованием полученного решения исследовано влияние кулоновского взаимодействия как для точечного, так и для распределенного заряда ядра на значения асимптотических нормировочных коэффициентов для различных ядерных систем. Показано, что учет неточечности распределения заряда ядра мало влияет на рассчитываемые значения асимптотических нормировочных коэффициентов при условии, что энергия связи системы считается фиксированной.

DOI: 10.31857/S0044002721040097

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотические нормировочные коэффициенты (АНК) определяют асимптотику ядерных волновых функций в бинарных каналах при расстояниях между фрагментами, превышающих радиус ядерного взаимодействия. В терминах АНК параметризуются сечения периферических ядерных процессов, таких как реакции с заряженными частицами при низких энергиях, когда из-за кулоновского барьера реакция происходит на больших расстояниях между фрагментами. Важнейшим классом таких процессов являются астрофизические ядерные реакции, протекающие в ядрах звезд, включая Солнце. Важная роль АНК в ядерной астрофизике была впервые отмечена в работах [1, 2], в которых было показано, что АНК определяют общую нормировку сечений периферических реакций радиационного захвата (см. также работы [3, 4]).

При извлечении значений АНК из данных по фазовым сдвигам упругого рассеяния оказывается очень важным учет эффектов кулоновского взаимодействия между сталкивающимися частицами при энергиях вблизи нуля (см., например, [5, 6]). Эти эффекты связаны с дальнодействующим характером кулоновского взаимодействия, которое для точечных зарядов имеет вид $V = Z_1Z_2e^2/r$ для всех значений r. Здесь Z_ie — заряд частицы i, r — расстояние между центрами масс сталкивающихся частиц. Однако при анализе данных по сечениям ядерных реакций в рамках метода искаженных волн зачастую учитывается неточечность распределения электрического заряда в ядре; при этом в качестве кулоновского взаимодействия, как правило, берется потенциал равномерно заряженного шара. Поскольку метод искаженных волн часто используется для получения информации об АНК [3], возникает вопрос о влиянии неточечности заряда ядра на значения АНК. Для краткости ниже мы будем называть кулоновский потенциал для точечного заряда и для равномерно заряженного шара точечным и неточечным кулоновским взаимодействием соответственно.

В работах [5–7], наряду с нахождением значений АНК из данных по фазовым анализам, проводилось исследование качественных кулоновских эффектов в низкоэнергетическом упругом рассеянии. При этом в качестве ядерного взаимодействия выбирался потенциал прямоугольной ямы, который, в отличие от других видов потенциала, позволяет, в суперпозиции с точечным кулоновским взаимодействием, получить аналитическое решение уравнения Шредингера для произвольных значений орбитального углового момента l. В данной работе показано, что аналитическое решение уравнения Шредингера при произвольных значениях l удается получить и для комбинации потенциала прямоугольной ямы и кулоновского потенциала

[1)]Институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

[*]E-mail: blokh@srd.sinp.msu.ru

однородно заряженного шара. В рамках этой точно решаемой задачи мы исследуем влияние кулоновского взаимодействия на значения АНК как для точечного, так и для распределенного электрического заряда ядра. Отметим, что влияние точечного кулоновского взаимодействия на значения АНК обсуждалось в рамках двухчастичной потенциальной модели с сепарабельным s-волновым взаимодействием в работе [8] на примере ядер ^{3}H и ^{3}He.

Следует подчеркнуть, что при рассмотрении процессов при низких энергиях, которые нас интересуют, результаты не чувствительны к детальной структуре ядерного потенциала на расстояниях $r \ll \ll 1/k$, где k — относительный импульс взаимодействующих частиц [9]. Поэтому полученные в данной работе выводы, особенно качественные, не должны зависеть от конкретной формы сильного взаимодействия, будь то прямоугольная яма, потенциал Вудса—Саксона или что-нибудь другое.

Статья организована следуюшим образом. В разд. 2 излагается общий формализм задачи. Раздел 3 посвящен применению этого формализма для анализа влияния различных форм кулоновского взаимодействия на значения АНК для конкретных ядерных систем. Полученные результаты кратко обсуждаются в разд. 4.

В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

2. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

2.1. Вид взаимодействия и структура решения уравнения Шредингера

Мы исследуем АНК для разбиения связанного состояния ядра a на два фрагмента b и c ($a \to \to b + c$). Конкретно в качестве легкого фрагмента c будут рассматриваться протон или α-частица. Кулоновское взаимодействие между b и c описывается потенциалом равномерно заряженного шара радиуса R_c, а также, для сравнения, точечным кулоновским потенциалом, что формально отвечает $R_c = 0$. В качестве ядерного взаимодействия выбирается притягивающая прямоугольная яма с глубиной V_0 и радиусом R. Подбор параметров потенциала описан в разд. 3. В соответствии с выводами работ [10, 11] будем, не нарушая общности, считать, что $R_c \leq R$.

Задача нахождения АНК сводится к нахождению координатной асимптотики решения радиального уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\chi_l}{dr^2} + \left[2\mu E - 2\mu V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_l = 0 \tag{1}$$

для потенциала, имеющего вид:

$$V(r) = -V_0 + \alpha(3 - r^2/R_c^2)/(2R_c), \tag{2}$$

$$0 \leq r < R_c,$$

$$V(r) = -V_0 + \alpha/r, \quad R_c \leq r < R, \tag{3}$$

$$V(r) = \alpha/r, \quad r \geq R, \tag{4}$$

где $\alpha = Z_b Z_c e^2$. Мы рассматриваем связанное состояние a частиц b и c с энергией $E = -\varepsilon = = -\varkappa^2/2\mu$, $\varkappa$ — волновое число связанного состояния, μ — приведенная масса b и c.

При $r \leq R_c$ $\chi_l(r) = a_1\varphi_1(r)$; вид $\varphi_1(r)$ обсуждается ниже в разд. 2.2. В области $R_c \leq r < R$ $\chi_l(r) = a_2\varphi_2(r) + a_3\varphi_3(r)$, где $\varphi_2(r)$ и $\varphi_3(r)$ — регулярное и нерегулярное кулоновские решения, отвечающие энергии $\tilde{E} = V_0 - \varepsilon$. Наконец, при $r \geq R$ $\chi_l(r) = a_4 W_{-\eta,l+1/2}(2\varkappa r)$, $W_{\beta,\gamma}(z)$ — функция Уиттекера, $\eta = \alpha\mu/\varkappa$ — кулоновский параметр. Асимптотика $W_{-\eta,l+1/2}(2\varkappa r)$ при $r \to \infty$ имеет вид:

$$W_{-\eta,l+1/2}(2\varkappa r)|_{r\to\infty} = e^{-\varkappa r}/(2\varkappa r)^\eta. \tag{5}$$

Константы a_i ($i = 1{-}4$) и энергия связи ε находятся из условий сшивки (непрерывности) значений и первых производных функции $\chi_l(r)$ в точках $r = R_c$ и $r = R$ и условия нормировки

$$\int\limits_0^\infty \chi_l^2(r)dr = 1. \tag{6}$$

Подчеркнем, что по определению константа a_4 совпадает с искомым АНК.

В частном случае $R_c = R$ вторая область вырождается в точку, и сшивка проводится в одной точке $r = R$.

2.2. Решения уравнения Шредингера для суперпозиции потенциалов прямоугольной ямы и однородно заряженного шара

$\varphi_1(r)$ есть решение уравнения Шредингера с потенциалом (2), которое может быть записано в виде

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \left\{2\mu\left(E + V_0 - \frac{3\alpha}{2R_c}\right) + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \frac{\mu\alpha}{R_c^3}r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}\varphi_1 = 0.$$

По форме радиальной зависимости взаимодействия это уравнение сходно с уравнением для потенциала трехмерного гармонического осциллятора, имеющим вид:

$$\frac{d^2\chi_l}{dr^2} + \left[2\mu E - \mu^2\omega^2 r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi_1 = 0. \tag{8}$$

Однако принципиальное различие между уравнениями (7) и (8) состоит в противоположных знаках слагаемых, пропорциональных r^2. Нам не удалось найти в литературе явный вид решения уравнения (7). Можно, однако, поступить следующим образом. Решение (8), которое при $r \to 0$ ведет себя как r^{l+1}, известно [12]:

$$\chi_l(r) = \tag{9}$$
$$= C_1\, {}_1F_1\left[\frac{1}{2}\left(l+\frac{3}{2}-\nu\right), l+\frac{3}{2}; \lambda r^2\right] e^{-\frac{\lambda}{2}r^2} r^{l+1},$$
$$\lambda = \mu\omega, \quad \nu = \frac{E}{\omega},$$

где ${}_1F_1(a,b;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Уравнение (7) получается из (8) формальной заменой:

$$E \to E + V_0 - \frac{3\alpha}{2R_c}, \tag{10}$$
$$\omega^2 \to -\frac{\alpha}{\mu R_c^3}, \quad \omega \to i\sqrt{\frac{\alpha}{\mu R_c}}\frac{1}{R_c}.$$

Поэтому, ввиду аналитической зависимости решения (9) от своих параметров, примем, что решение уравнения (7) может быть получено из выражения (9) заменой

$$\nu \to \tilde{\nu} = -i\sqrt{\frac{\mu R_c}{\alpha}} R_c \left(E + V_0 - \frac{3\alpha}{2R_c}\right), \tag{11}$$
$$\lambda \to \tilde{\lambda} = i\sqrt{\frac{\mu\alpha}{R_c}}\frac{1}{R_c}.$$

Полученное таким образом решение $\xi(r)$ регулярно в нуле, но комплексно, а нам для связанного состояния нужно действительное решение. Так как в (7) все коэффициенты действительны, то, если при $\mathrm{Im} r = 0$ функция $\xi(r)$ есть решение, то и $\xi^*(r)$ тоже есть решение и, следовательно, $\mathrm{Re}\xi(r)$ и $\mathrm{Im}\xi(r)$ также являются решениями. Поэтому в качестве нужной нам функции $\varphi_1(r)$ можно взять

$$\varphi_1(r) = \tag{12}$$
$$= \mathrm{Re}\left\{{}_1F_1\left(\frac{1}{2}(l+\frac{3}{2}-\tilde{\nu}), l+\frac{3}{2}; \tilde{\lambda} r^2\right) e^{-\frac{\tilde{\lambda}}{2}r^2} r^{l+1}\right\}.$$

3. РАСЧЕТЫ АНК ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ЯДЕРНЫХ СИСТЕМ

В данном разделе в рамках изложенной выше схемы проводятся сравнительные расчеты АНК для конкретных ядерных систем. Ядерное взаимодействие описывается потенциалом прямоугольной ямы. В качестве кулоновского взаимодействия используется как потенциал точечного заряда, так и потенциал однородно заряженного шара. Проводятся также расчеты в пренебрежении кулоновским взаимодействием. Рассматриваются системы как с малыми, так и с большими значениями энергии связи ε и кулоновского параметра η. Поскольку основной целью работы является исследование качественных закономерностей, а не определение значений АНК с высокой точностью, то для упрощения расчетов значения радиусов заряженного шара и прямоугольной ямы предполагаются совпадающими: $R_c = R$.

Помимо определенного выше АНК, который имеет размерность фм$^{-1/2}$ и который мы будем обозначать буквой C, в литературе, в первую очередь, при микроскопических расчетах АНК используется также безразмерный АНК $\tilde{C}$, связанный с АНК C соотношением $C = \sqrt{2\varkappa}\tilde{C}$. Отметим также, что при больших зарядах Z и/или малых значениях энергии связи ε и, соответственно, больших значениях кулоновского параметра η значения АНК C могут быть очень большими, что объясняется наличием барьерного кулоновского фактора $\Gamma(l+1+\eta)/l!$. В связи с этим в работе [13] для удобства расчетов был введен перенормированный АНК C_r, не содержащий этого фактора: $C_r = l!/\Gamma(l+1+\eta)C$. Использование C_r вместо C облегчает также сравнение значений АНК для зеркальных ядер [13]. Отметим, что величина C_r непосредственно связана с вычетом перенормированной кулоновско-ядерной парциальной амплитуды упругого рассеяния [14]. Для всех рассмотренных ниже систем нами были рассчитаны и представлены в виде таблиц значения АНК C, $\tilde{C}$, C_r, а также $\tilde{C}_r = C_r/\sqrt{2\varkappa}$.

Расчеты АНК проводились для пяти различных вариантов.

1. (Вариант 1). Значения параметров V_0 и R подбирались так, чтобы при использовании точечного кулоновского потенциала вопроизвести экспериментальное значение энергии связи ε и известное из литературы значение АНК C для данного канала $a \to b + c$.

2. (Вариант 2). При тех же значениях V_0 и R, что и в варианте 1, кулоновское взаимодействие бралось в виде потенциала однородно заряженного шара. Рассчитанное значение ε при этом, естественно, изменялось.

3. (Вариант 3). При том же значении R, что и в варианте 1, и использовании потенциала однородно заряженного шара значение V_0 подбиралось так, чтобы вопроизвести экспериментальное значение ε. Цель такого действия — исключить влияние изменения энергии связи на значения АНК.

4. (Вариант 4). При тех же значениях V_0 и R, что и в варианте 1, кулоновское взаимодействие выключалось. Рассчитанное значение ε изменялось.

5. (Вариант 5). При том же значении R, что и в варианте 1, и выключенном кулоновском взаимодействии значение V_0 подбиралось так, чтобы вопроизвести экспериментальное значение ε.

Во всех проведенных расчетах предполагалось, что дочернее ядро b находится в основном состоянии.

3.1. АНК для $^{17}F \to {}^{16}O + p$

Ядро ^{17}F имеет два связанных состояния: основное состояние $^{17}\mathrm{F}(5/2^+;\text{осн})$ $(l=2)$ и возбужденное состояние $^{17}\mathrm{F}^*(1/2^+;0.495\ \text{МэВ})$ $(l = 0)$. Для основного состояния $\varepsilon = 0.6005$ МэВ. В качестве АНК C для этого состояния, используемого в варианте 1 для подгонки значений V_0 и R, было принято значение $C = 1.042$ фм$^{-1/2}$, взятое из работы [15]. Эти значения ε и C приводят к значениям $V_0 = 30.46$ МэВ и $R = 4.238$ фм.

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Для возбужденного состояния $^{17}\mathrm{F}^*(0.495$ МэВ) $\varepsilon = 0.1052$ МэВ. В качестве АНК C для расчетов в варианте 1 возьмем $C = 77.33$ фм$^{-1/2}$, что совпадает с одним из значений, полученных в [16] из анализа реакции $^{16}\mathrm{O}(^3\mathrm{He}, d)^{17}\mathrm{F}$ в рамках метода искаженных волн. Этим значениям ε и C для варианта 1 отвечают значения $V_0 = 8.2691$ МэВ и $R = 4.984$ фм. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Заметим, что в рамках модели оболочек обсуждаемое возбужденное состояние ^{17}F может быть записано как $2s_{1/2}$, т.е. в потенциале модели оболочек имеется более низкое по энергии $1s$-состояние. В подобных случаях при описании реальных ядерных состояний часто используются потенциалы с запрещенными состояниями. В работе [17] было показано, что в рамках потенциальной модели значения АНК, рассчитанные при фиксированной энергии связи, могут заметно зависеть от числа учитываемых запрещенных состояний. В этой связи для исследования влияния запрещенных состояний на кулоновские эффекты при определении АНК нами были проведены расчеты, отличающиеся от расчетов, представленных в табл. 2, тем, что при определении потенциальных параметров V_0 и R в варианте 1 предполагалось, что в используемом потенциале, помимо s-состояния с экспериментальной энергией связи, имеется еще одно ниже расположенное (запрещенное) s-состояние. Это предположение приводит к подогнанным в варианте 1 значениям $V_0 = 32.06$ МэВ, $R = 4.658$ фм. Этим значениям параметров отвечает энергия связи запрещенного состояния 20.17 МэВ.

Результаты расчетов АНК для возбужденного состояния ^{17}F при наличии запрещенного состояния приведены в табл. 3. Из сравнения табл. 2 и 3 видно, что их результаты качественно совпадают.

3.2. АНК для $^{16}O \to {}^{12}C + \alpha$

Для перехода $^{16}\mathrm{O} \to {}^{12}\mathrm{C} + \alpha$ из основного состояния ^{16}O значение АНК в литературе отсутствует. Поэтому в качестве исходного ядра мы рассмотрели два возбужденных состояния ^{16}O: $0^+(6.049$ МэВ) $(l=0)$ и $1^-(7.117$ МэВ) $(l=1)$. Экспериментальные значения энергии связи в канале $^{12}\mathrm{C}+\alpha$ для этих состояний равны 1.113 МэВ и 0.045 МэВ соответственно.

В случае возбужденного 0^+-состояния для определения V_0 и R в рамках первого варианта расчетов, помимо энергии связи $\varepsilon = 1.113$ МэВ, использовалось значение $C = 1560$ фм$^{-1/2}$ [18]. Получено $V_0 = 18.07$ МэВ и $R = 4.903$ фм. При этих значениях параметров, помимо рассматриваемого состояния, в системе имеется еще и более глубокое 0^+-состояние, ассоциирующееся с основным состоянием ^{16}O. Результаты расчетов представлены в табл. 4.

Для 1^--состояния в качестве исходного значения бралось $C = 2.10 \times 10^{14}$ фм$^{-1/2}$ [18]. Это значение АНК вместе с $\varepsilon = 0.045$ МэВ приводит к $V_0 = 12.61$ МэВ, $R = 3.892$ фм. Результаты расчетов представлены в табл. 5.

3.3. АНК для $^{16}O \to {}^{15}N + p$

В рассмотренных выше примерах изучались слабо связанные системы ($\varepsilon \leq 1.2$ МэВ). Для сравнения проведем теперь аналогичное исследование для канала $^{16}\mathrm{O}(\text{осн}) \to {}^{15}\mathrm{N} + p$ с большой энергией связи ($\varepsilon = 12.13$ МэВ, $l = 1$). Для определения параметров V_0 и R было использовано значение АНК $C = 13.86$ фм$^{-1/2}$ [19], что приводит к значениям $V_0 = 33.47$ МэВ, $R = 4.119$ фм. Рассчитанные значения АНК приведены в табл. 6.

3.4. АНК для $^{209}Bi \to {}^{208}Pb + p$

В качестве последнего примера рассмотрим АНК для канала с большим значением Z: $^{209}\mathrm{Bi}(\text{осн}) \to {}^{208}\mathrm{Pb} + p$. Для этого процесса $\varepsilon = 3.799$ МэВ, $l = 5$, но значение АНК неизвестно. Поэтому действуем иначе, чем в предыдущих случаях. А именно, выбираем в качестве R значение 7.418 фм, полученное по формуле $R = r_0 A^{1/3}$ при $r_0 = 1.25$ фм. После этого значение V_0 при данном значении R подгоняется по энергии связи, что приводит к $V_0 = 51.29$ МэВ. При этих значениях V_0 и R рассчитанное значение АНК C равно 0.1158×10^8 фм$^{-1/2}$. Разумеется, авторы не претендуют на хорошее совпадение этого значения C с реальным АНК для рассматриваемого канала; оно используется лишь для качественной оценки кулоновских эффектов.

Результаты расчетов представлены в табл. 7.

Таблица 1. АНК для ^{17}F(осн) $\to$ ^{16}O $+ p$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	30.46	1.583	0.6005	1.042	1.8142	0.1596	0.2779
2	30.46	1.271	0.9310	1.0808	1.6860	0.2537	0.3958
3	30.07	1.583	0.6005	1.0337	1.7995	0.1583	0.2756
4	30.46	0	3.9351	0.9010	0.9803	0.9010	0.9803
5	25.76	0	0.6005	0.0955	0.1663	0.0955	0.1663

Таблица 2. АНК для ^{17}F*(0.495 МэВ) $\to$ ^{16}O $+ p$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	8.2691	3.782	0.1052	77.33	208.08	4.452	11.980
2	8.2691	1.300	0.8898	6.23	9.82	5.337	8.420
3	7.1838	3.782	0.1052	73.41	197.55	4.227	11.373
4	8.2691	0	3.6052	2.92	3.2445	2.920	3.2445
5	2.8663	0	0.1052	0.4438	1.1943	0.4438	1.1943

Таблица 3. АНК для ^{17}F*(0.495 МэВ) $\to$ ^{16}O $+ p$ при наличии запрещенного состояния

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	32.06	3.782	0.1052	77.33	208.08	4.452	11.980
2	32.06	0.7956	2.376	7.6700	9.466	8.245	10.177
3	28.62	3.782	0.1052	77.357	208.16	4.454	11.984
4	32.06	0	5.294	4.890	4.930	4.890	4.940
5	23.33	0	0.1052	0.4449	1.197	0.4449	1.197

Таблица 4. АНК для ^{16}O*(1.113 МэВ) $\to$ ^{12}C $+ \alpha$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	18.07	3.103	1.113	1560	1745	228	255
2	18.07	1.450	4.767	817	635	615	478
3	13.97	3.103	1.113	1472.17	1646	215.3	240.75
4	18.07	0	9.272	117.6	77.44	117.6	77.44
5	8.591	0	1.113	3.442	3.850	3.442	3.850

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ И ВЫВОДЫ

В данной работе показано, что для комбинации потенциала прямоугольной ямы и кулоновского потенциала однородно заряженного шара, который часто используется в расчетах по методу искаженных волн, решение уравнения Шредингера может быть получено в аналитическом виде при произвольных значениях орбитального углового момента l. Найден явный вид этого решения. В рамках этой точно решаемой задачи мы исследовали на примере конкретных ядер влияние кулоновского взаимодействия на значения АНК как для точечного, так и для распределенного электрического

Таблица 5. АНК для $^{16}\mathrm{O}^*(0.045\ \text{МэВ}) \to {}^{12}\mathrm{C} + \alpha$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	12.61	15.43	0.045	2.10×10^{14}	5.24×10^{14}	2.973	7.415
2	12.61	3.359	0.950	639.2	743.7	15.31	17.81
3	11.54	15.43	0.045	1.95×10^{14}	4.87×10^{14}	2.763	6.892
4	12.61	0	6.261	14.28	10.37	14.28	10.37
5	4.652	0	0.045	0.1518	0.3788	0.1518	0.3788

Таблица 6. АНК для $^{16}\mathrm{O}(\text{осн}) \to {}^{15}\mathrm{N} + p$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	33.47	0.3076	12.13	13.86	11.39	11.83	9.721
2	33.47	0.2997	12.77	14.56	11.81	12.48	10.13
3	32.74	0.3076	12.13	13.58	11.16	11.58	9.522
4	33.47	0	15.71	11.21	8.635	11.21	8.635
5	29.38	0	12.13	7.408	6.089	7.408	6.089

Таблица 7. АНК для $^{209}\mathrm{Bi} \to {}^{208}\mathrm{Pb} + p$

Вариант	V_0, МэВ	η	ε, МэВ	C, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}$	C_r, фм$^{-1/2}$	$\tilde{C}_r$
1	51.29	6.634	3.799	1.158×10^{7}	1.253×10^{7}	7.282	7.881
2	51.29	5.739	5.075	0.2804×10^{7}	0.2823×10^{7}	15.90	16.00
3	49.92	6.634	3.799	1.102×10^{7}	1.192×10^{7}	6.928	7.498
4	51.29	0	23.49	166.3	114.11	166.3	114.1
5	29.86	0	3.799	0.2537	0.2746	0.2537	0.2746

заряда ядра. Были рассмотрены системы с различными значениями энергии связи, кулоновского параметра и орбитального углового момента.

В дальнейшем мы будем отмечать величину, отвечающую i-му варианту расчета, индексом i.

Анализ результатов расчетов начнем с энергий связи. Из данных, приведенных в таблицах, следует, что для всех рассмотренных примеров в случае, когда энергия связи не фиксируется, имеем $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_4$ (и, соответственно, $\eta_1 > \eta_2 > \eta_4$). Этот результат тривиален, так как учет отталкивательного кулоновского взаимодействия эффективно ослабляет притягивающий ядерный потенциал, а переход от точечного к распределенному заряду при сохранении полного заряда эквивалентен ослаблению кулоновского взаимодействия, так как кулоновский потенциал внутри заряженного шара слабей потенциала точечного заряда.

С АНК ситуация более сложная. Их значения в значительной мере определяются асимптотикой радиальной волновой функции, которая в соответствии с (5) имеет вид

$$\chi_l(r)|_{r\to\infty} = Ce^{-\varkappa r}/(2\varkappa r)^{\eta}. \qquad (13)$$

В отсутствие кулоновского взаимодействия ($\eta = 0$) с увеличением энергии связи и, следовательно, величины $\varkappa$ скорость убывания асимптотики (13) с ростом r увеличивается, что в силу сохранения общей нормировки волновой функции должно, вообще говоря, приводить к увеличению АНК C. Этот вывод заведомо справедлив в часто используемом приближении эффективного радиуса, для которого $C = \sqrt{2\varkappa/(1-\varkappa r_e)}$, где r_e — эффективный радиус (см., например, [20]). АНК C растет с ростом $\varkappa$ также и для системы, описываемой известным потенциалом Хюльтена, для которого уравнение

Шредингера допускает аналитическое решение при $l = 0$ [21].

При включении кулоновского взаимодействия зависимость АНК от энергии связи усложняется, так как при изменении ε множители $e^{-\varkappa r}$ и $(2\varkappa r)^{-\eta}$ в правой части (13) могут меняться в противоположных направлениях. Так, например, для суммы потенциала нулевого радиуса и точечного кулоновского потенциала, пользуясь формулами работы [8], можно получить явное аналитическое выражение для АНК C в виде $C = \sqrt{2\varkappa}\tilde{C}(\eta)$, где $\tilde{C}(\eta)$ — быстро растущая функция параметра η, $\tilde{C}(0) = 1$. При фиксированных значениях зарядов и масс с ростом ε величины η и $\tilde{C}(\eta)$ уменьшаются, однако АНК C может увеличиться за счет множителя $\sqrt{2\varkappa}$. В рассмотренных нами примерах подобная ситуация наблюдается для систем с малыми значениями η, представленными в табл. 1 и 6, для которых переход от точечного заряда к распределенному слегка увеличивает C: $C_2 > C_1$. Для всех остальных случаев $C_2 < C_1$, причем для слабосвязанных систем с большим значением η C_1 и C_2 могут различаться на порядок (см. табл. 2 и 3) или даже на много порядков (табл. 5). Для этих систем имеет место даже более общее соотношение $C_1 > C_2 > C_4 > C_5$ и аналогичное соотношение для $\tilde{C}$ (см. табл. 2–4, 5, 7). Отметим, что для систем, отвечающих табл. 1 и 6, даже полное выключение кулоновского взаимодействия (вариант 4) не очень существенно изменяет C, что связано с частичной взаимной компенсацией эффектов, обусловленных уменьшением η и увеличением ε. При этом безразмерный АНК $\tilde{C}$, отличающийся от C на множитель $\sqrt{2\varkappa}$, меняется заметней. Из табл. 1 и 6 также видно, что указанная компенсация не имеет место, если при выключении кулоновского взаимодействия сохранить энергию связи путем изменения ядерного потенциала (вариант 5).

Самым интересным и не очевидным заранее результатом является тот факт, что для варианта 3 даже в случае системы с максимальным значением η (табл. 5) значение C_3 отличается от C_1 всего на 7%; для других систем это отличие не превышает 5%. Отметим, что такие же относительные различия между вариантами 3 и 1 имеют место и для всех других рассмотренных типов АНК: $\tilde{C}$, C_r и $\tilde{C}_r$. Отсюда следует важный вывод, что учет неточечности распределения заряда ядра мало влияет на рассчитываемые значения АНК при условии, что энергия связи считается фиксированной.

Подчеркнем, что использование перенормированных АНК C_r и $\tilde{C}_r$ является оправданным в случае больших значений η (см. табл. 5 и 7).

Авторы благодарны С.Ю. Игашову, О.А. Рубцовой и В.А. Ходыреву за полезные обсуждения.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 19-02-00014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Мухамеджанов, Н. К. Тимофеюк, ЯФ **51**, 679 (1990).
2. H. M. Xu, C. A. Gagliardi, R. E. Tribble, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2027 (1994).
3. A. M. Mukhamedzhanov and R. E. Tribble, Phys. Rev. C **59**, 3418 (1999).
4. A. M. Mukhamedzhanov, C. A. Gagliardi, and R. E. Tribble, Phys. Rev. C **63**, 024612 (2001).
5. L. D. Blokhintsev, A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, and D. A. Savin, Phys. Rev. C **97**, 024602 (2018).
6. L. D. Blokhintsev, A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, and D. A. Savin, Phys. Rev. C **98**, 064610 (2018).
7. L. D. Blokhintsev, A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, and D. A. Savin, Phys. Rev. C **95**, 044618 (2017).
8. D. R. Lehman, L. C. Maximon, and J. L. Friar, Phys. Rev. C **37**, 336 (1988).
9. G. P. Lepage, nucl-th/9706029v1 (1997).
10. J. T. Huang, C. A. Bertulani, and V. Guimarães, At. Data Nucl. Data Tables **96**, 824 (2010).
11. C. Rolfs, Nucl. Phys. A **217**, 29 (1973).
12. З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике* (Мир, Москва, 1974), т. 1.
13. A. M. Mukhamedzhanov, Phys. Rev. C **86**, 044615 (2012).
14. J. Hamilton, I. Øverbö, and B. Tromborg, Nucl. Phys. B **60**, 443 (1973).
15. L. D. Blokhintsev, R. Yarmukhamedov, S. V. Artemov, *et al.*, Uzbek J. Phys. **12**, 217 (2010).
16. C. A. Gagliardi, R. E. Tribble, A. Azhari, *et al.*, Phys. Rev. C **59**, 1149 (1999).
17. Л. Д. Блохинцев, Д. А. Савин, ЯФ **81**, 8 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 168 (2018)].
18. M. L. Avila, G. V. Rogachev, E. Koshchiy, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 071101 (2015).
19. A. M. Mukhamedzhanov, P. Bém, V. Burjan, *et al.*, Phys. Rev. C **78**, 015804 (2008).
20. L. Blokhintsev, Yu. Orlov, and D. Savin, *Analytic and Diagram Method in Nuclear Reaction Theory* (Nova Science Publishers, Inc. New York, 2017).
21. Л. Д. Блохинцев, В. О. Еременко, Ю. В. Орлов, Д. А. Савин, Изв. РАН. Сер. физ. **76**, 1025 (2012) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **76**, 909 (2012)].

STUDY OF THE INFLUENCE OF DIFFERENT METHODS OF TAKING INTO ACCOUNT THE COULOMB INTERACTION ON DETERMINING ASYMPTOTIC NORMALIZATION COEFFICIENTS WITHIN THE FRAMEWORK OF EXACTLY SOLVABLE MODEL

L. D. Blokhintsev[1), D. A. Savin[1)

[1)Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Russia

It is shown that the Schrödinger equation for the sum of the potential of a square well and the Coulomb potential of a uniformly charged sphere admits an analytical solution for arbitrary values of the orbital angular momentum. An explicit form of this solution has been found. Using the obtained solution, the influence of the Coulomb interaction for both point and distributed nuclear charges on the values of asymptotic normalization coefficients for various nuclear systems is investigated. It is shown that taking into account the non-point distribution of the nuclear charge has little effect on the calculated values of the asymptotic normalization coefficients, provided that the binding energy of the system is assumed to be fixed.