

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ЭЛИМИНИРОВАНИЯ ЭФФЕКТА БОРА–ВАЙСКОПФА В АТОМНЫХ СПЕКТРАХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ $^{209}\text{Bi}$

© 2021 г. Ф. Ф. Карпешин<sup>1)\*</sup>, М. Б. Тржасковская<sup>2)</sup>

Поступила в редакцию 03.09.2020 г.; после доработки 14.12.2020 г.; принята к публикации 14.12.2020 г.

Проводится сравнение различных методов элиминирования эффекта Бора–Вайскопфа в теории сверхтонкого расщепления: отношения и специфических разностей значений сверхтонкого расщепления на разных оболочках. Демонстрируется родство этих методов, которое проявляется в приблизительно одинаковой остаточной зависимости от ядерной модели (динамическом эффекте) на уровне  $10^{-3}$ . Данная степень элиминирования оказывается достаточной для подтверждения решения висмутовой загадки сверхтонкого расщепления. Сравнение с экспериментом на более высоком уровне точности требует включения эффекта Бора–Вайскопфа. Обсуждаются перспективы дальнейших экспериментальных и теоретических исследований с целью возможного уточнения магнитного момента ядра  $^{209}\text{Bi}$  с помощью накопительных колец в ГСИ Дармштадт, ИСФ Ланьчжоу.

DOI: 10.31857/S0044002721040164

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхтонкое расщепление (СТР) вызвано взаимодействием электронов с магнитным моментом ядра. В первом приближении оно не зависит от деталей ядерной структуры, определяясь магнитным моментом и спином ядра, а также свойствами электронной оболочки. Это связано с малой вероятностью проникновения электронов в ядро. Учет эффектов проникновения ведет к возникновению эффекта Бора–Вайскопфа (БВ) [1]. Этот эффект отсутствует в гипотетическом случае точечного ядра, возникая вследствие конечного размера ядра и распределения токов намагниченности по его объему. Поэтому, начиная с работы [1], эффект БВ используется для изучения структуры ядра, в частности его среднеквадратичного радиуса (например, [2, 3]). Эффект БВ лежит в основе известного явления аномалий в оптических спектрах ядер. А в связи с развитием техники накопительных колец в последние годы наблюдается рост интереса к изучению сверхтонкой структуры в водородоподобных, литийподобных (ниже H- и Li-подобных) и других малоэлектронных тяжелых ионах. Интерес вызывает возможность тестирования электронных волновых функций, а также квантовой электродинамики (КЭД) [4], поскольку эффекты высших по-

рядков — поляризация вакуума, поправка на собственную энергию электрона — вносят заметный вклад, на уровне процента, в величину СТР.

Однако еще больший вклад в СТР дает эффект БВ. В случае тяжелых ионов  $^{209}\text{Bi}$ , вклад эффекта БВ в СТР составляет приблизительно 2.0% и 2.2% от полной величины расщепления для 1s- и 2s-уровней соответственно. Поскольку эффект БВ не может быть вычислен априори, то в ряде приложений, таких как изучение несохранения пространственной четности в атомах и тестирование КЭД, он выступает как препятствие на пути теории. Отсюда понятны многочисленные попытки ослабления эффекта БВ при сравнении теории с экспериментом путем подбора соответствующих комбинаций из наблюдаемых величин. Например, в значительной мере это удается сделать в методе отношений, если взять отношение СТР на разных оболочках [5, 6]. Другой метод — специфических разностей (СР) — был ранее предложен в работе [4]. Он применялся и в последующих работах (например, [7, 8] и других) для интерпретации экспериментов с тяжелыми ионами, проводившимися в ГСИ Дармштадт. Этот метод основан на взаимной компенсации зависящих от эффекта БВ членов путем вычитания в линейной комбинации из СТР двух уровней. В качестве теоретической предпосылки метода была указана пропорциональность волновых функций 1s- и 2s-состояний в области ядра [4], которая в идеальном случае обеспечила бы искомую независимость наблюдаемой величины

<sup>1)</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д.И. Менделеева, Санкт-Петербург, Россия.

<sup>2)</sup>НИЦ “Курчатовский институт” — ПИЯФ, Гатчина, Россия.

\*E-mail: fkarpeshin@gmail.com

от ядерной модели. Тем не менее сравнение вычисленной СР с экспериментом выявило противоречие [9], которое получило название “висмутовой загадки” СТР. Противоречие разрешилось, когда в работе [8] было получено указание на то, что истинное значение магнитного момента ядра  $^{209}\text{Bi}$ ,  $\mu = 4.092(2) \mu_N$ ,  $\mu_N$  — ядерный магнетон, несколько меньше справочного значения [10]  $\mu = 4.1106 \mu_N$ .

Систематическое же изучение эффекта БВ было предпринято в работах [11–14]. Эти работы основаны на методах, разработанных в теории внутренней конверсии (ВК). При этом СТР рассматривается как частный случай ВК [15, 16], а эффект БВ выступает как проявление аномальной ВК, частный случай влияния динамического эффекта ядерной структуры на коэффициенты ВК (КВК). Под динамическим эффектом в теории называется зависимость КВК от ядерной модели пространственного распределения ядерных токов, в данном случае — магнетизма, по объему ядра. С этой целью в работе [13] были использованы две модели, хорошо известные в теории ВК: поверхностных (ПТ) и объемных (ОТ) токов ядерного магнетизма. Принято считать, что в силу контрастности физических представлений, лежащих в основе этих двух моделей, истинное распределение ядерных токов занимает промежуточное место между ними. Неожиданным оказался тот результат, что обе модели, ПТ и ОТ, дают вполне эквивалентное описание СТР на двух уровнях с точностью до  $10^{-6}$ . В отношении СР расчеты выявили их ожидавшуюся радикальную чувствительность к ядерной модели. Тем не менее, в настоящей работе ниже показано, что как экспериментальные данные, так и теоретические значения подвергаются указанной зависимости в равной мере, поэтому их сравнение действительно может служить индикатором справедливости тех и других. Сравнение с экспериментом, проведенное в разд. 4, подтверждает правильность решения ториевой загадки, основанного на уточнении значения магнитного момента ядра  $^{209}\text{Bi}$ .

## 2. ФОРМУЛЫ

Базовой моделью для построения теории является модель без проникновения (БП), пренебрегающая эффектами проникновения электронов в ядро. Адекватный метод учета этих эффектов обеспечивают модели ПТ [17] и ОТ [18]. Отделяя эффекты проникновения, выражение для СТР можно записать в виде [13]

$$W = Nw, \quad (1)$$

$$w = \int_0^\infty g(r)f(r)dr + t^\nu \equiv w^{(0)} + t^\nu,$$

$$N = -\frac{2(2I + 1)}{I(j + 1)} e\kappa\mu \frac{e\hbar}{2M_{pc}}.$$

Здесь  $g(r)$ ,  $f(r)$  — большая и малая компоненты радиальной волновой функции электрона,  $\kappa = (l - j)(2j + 1)$  — его релятивистское квантовое число,  $l$  и  $j$  — электронный орбитальный и полный моменты соответственно,  $I$  — ядерный спин,  $e$  — элементарный заряд,  $\mu$  — магнитный момент ядра и  $\frac{e\hbar}{2M_{pc}}$  — ядерный магнетон.  $w^{(0)}$  дает значение СТР в модели БП. Член  $t^\nu$ , который мы будем называть матричным элементом проникновения, содержит информацию о структуре ядра:

$$t^\nu = \int_0^{R_c} g(r)f(r)Y^\nu(r)r^2dr, \quad (2)$$

где

$$Y^\nu(r) = \begin{cases} \frac{r}{R_c^3} - \frac{1}{r^2}, & \text{если } \nu = \text{ПТ}, \\ \frac{1}{R_c^3} \left(4r - 3\frac{r^2}{R_c}\right) - \frac{1}{r^2}, & \text{если } \nu = \text{ОТ}. \end{cases} \quad (3)$$

В модели БП  $Y^\nu(r) \equiv 0$ .  $R_c$  — модельный радиус переходных токов — в случае ВК, или токов намагничивания — в случае СТР. Пусть верхний индекс  $\nu$  указывает модель, а нижним индексом  $i$  мы будем далее помечать электронный уровень.

Таким образом, вся информация об эффекте БВ заключена в слагаемых  $t_i^\nu$ . В работах [4, 7] было предложено избавиться от него в линейной комбинации, называемой СР:

$$\Delta'E = W_{2s} - \xi W_{1s}. \quad (5)$$

Коэффициент  $\xi$  подбирается так, что слагаемые  $t_i^\nu$ , зависящие от эффекта БВ, взаимно сокращаются в (5). Таким образом, определение (5) имеет форму уравнения. Оно имеет очевидное решение

$$\xi = t_{2s}^\nu / t_{1s}^\nu. \quad (6)$$

При этом значении  $\xi$  СР может быть вычислена по формуле

$$\Delta'E = W_{2s}^{(0)} - \xi W_{1s}^{(0)}, \quad W_i^{(0)} = Nw_i^{(0)}. \quad (7)$$

Величина  $\xi$  была вычислена в работах [4, 7] с точностью до пяти знаков. Полученные значения составили  $\xi = 0.16885$  [4] и  $\xi = 0.16886$  [7]. Ясно, что такая точность имеет смысл только в том случае, если зависимость от ядерной модели проявляется лишь на еще более высоком уровне точности. Как говорилось во Введении, это не так [11, 13]. Наряду с зависимостью от модели ядерного магнетизма, в работах [11, 13] было обращено внимание на ненаблюдаемый характер параметра  $\xi$

и определяемой им СР, что является дополнительным источником неопределенности. Не свободна от противоречий и работа [8]. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 4.

### 3. АНАЛИЗ МОДЕЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ МЕТОДОВ ЭЛИМИНИРОВАНИЯ ЭФФЕКТА БОРА–ВАЙСКОПФА

Для целей изучения эффекта БВ запишем выражение (1) для СТР в  $1s$  и  $2s$  электронных конфигурациях в виде [11, 13, 14]

$$W_{1s} = Nw_{1s}^{(0)}(1 + \epsilon_{1s}), \quad (8)$$

$$W_{2s} = Nw_{2s}^{(0)}(1 + \epsilon_{2s}),$$

где поправки на эффект БВ определяются безразмерными малыми величинами  $\epsilon_i$ . Их отношение с точностью до первого порядка равно

$$\frac{W_{2s}}{W_{1s}} = \frac{w_{2s}^{(0)}}{w_{1s}^{(0)}}(1 + \epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}) \equiv h(1 + \epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}). \quad (9)$$

Таким образом, в отношении СТР (9) фактически происходит вычитание матричных элементов проникновения. Сравнивая (8) и (9), можно констатировать, что если в (8) неопределенность, вносимая в СТР эффектом БВ, составляет  $\sim \epsilon_{1s}$  или  $\epsilon_{2s}$  по сравнению с единицей, то в отношении (9) неопределенность составляет только разность  $\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}$  по сравнению с той же единицей, т.е. гораздо меньшую величину. Численно разность  $|\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}| \sim 0.2\%$  и она может варьироваться в зависимости от модели приблизительно вдвое (например, в моделях ПТ и ОТ [13]). Поэтому чувствительность отношения к эффекту БВ начинается на уровне точности  $\sim 10^{-3}$ . Это согласуется с результатами [5].

Если же рассматривать метод СР и  $\xi$  в качестве коэффициента модели, получим оценку

$$\begin{aligned} \Delta'E &= W_{2s} - \xi W_{1s} = & (10) \\ &= Nw_{2s}^{(0)}(1 + \epsilon_{2s}) - \xi Nw_{1s}^{(0)}(1 + \epsilon_{1s}) = \\ &= Nw_{1s}^{(0)}[h - \xi + (h\epsilon_{2s} - \xi\epsilon_{1s})] = \\ &= Nw_{1s}^{(0)}[(h - \xi)(1 + \epsilon_{1s}) + h(\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s})] \approx \\ &\approx Nw_{1s}^{(0)}[h - \xi + h(\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s})] = \\ &= Nw_{1s}^{(0)}h\left(\frac{h - \xi}{h} + \epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}\right), \end{aligned}$$

где  $h$  определено в (9) как отношение СТР, вычисленных без учета эффекта БВ. Теперь неопределенность модели (10), в отличие от отношения СТР (9), определяется неопределенностью той же разности амплитуд  $\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}$ , но по отношению не к единице, а к гораздо меньшей величине

$|(h - \xi)/h| \approx 1 - \epsilon_{2s}/\epsilon_{1s} \approx 0.1$ . Для оценки можно также использовать экспериментальные значения СТР [9], положив  $h \approx W_{2s}/W_{1s} \approx 797/5085 = 0.16$ . Поэтому  $|h - \xi| \approx 0.01$ ,  $|(h - \xi)/h| \approx 0.06$ , откуда следует, что относительная погрешность СР уже на два порядка больше, чем отношения (9). Альтернативно, можно использовать теоретические значения  $Nw_i^{(0)}$  из работы [7], названные там “дираковскими”. Тогда получим  $h = 0.16273$ ,  $|(h - \xi)/h| = 0.04$ . В свою очередь,  $\epsilon_{1s} \approx \epsilon_{2s} \approx 2\%$ , а их разность  $\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s} \approx 0.2\%$  [11]. То есть разность  $\epsilon_{2s} - \epsilon_{1s}$  приблизительно в десять раз меньше, чем  $\epsilon_{1s}$  или  $\epsilon_{2s}$  по отдельности, а  $|(h - \xi)/h|$  в двадцать раз меньше единицы. Таким образом, вместо уменьшения неопределенности, вносимой эффектом БВ, что и было целью введения СР, ее относительная величина может возрасти вдвое.

### 4. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Проанализируем, как полученные выше закономерности проявляются в расчетах и эксперименте. Результаты расчетов [4, 7, 8, 11, 13], вместе с последними экспериментальными данными [9] приводятся в табл. 1. Во второй и третьей строках приведены значения  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$ . В работах [4, 7] не производился расчет эффекта БВ. Вместо этого вычислены СР по формуле (7), используя вычисленные значения  $W_i^{(0)}$ . Соответственно, эти значения приводятся в табл. 1. По той же формуле вычислена СР в работе [8], однако в последней работе вычислены и СТР с учетом эффекта БВ в конкретной ядерной модели, приведенные во второй и третьей строках табл. 1.

Легко видеть, что наша подгонка [11, 13] экспериментальных данных относительно СТР  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$  приводит к лучшему согласию с экспериментом, чем любой из результатов [4, 7, 8]. Действительно, наши результаты совпадают с экспериментом до 4–5 знаков, тогда как в работах [4, 7, 8] до 2–3. Это справедливо для обоих рассмотренных значений  $\mu$ . Рассмотрим сначала более детально теоретические результаты, относящиеся к значению  $\mu = 4.1106\mu_N$ . Расхождение с экспериментом расчетов [4, 7] выходит за пределы указанных экспериментальных и расчетных погрешностей. Оно случается уже во втором знаке, что вполне вписывается в рамки эффекта БВ ( $\sim 2\%$ ). Следовательно, можно допустить, что данное расхождение обязано этому эффекту. А значит, на основании изложенного в разд. 3, можно рассчитывать, что для отношения СТР согласие с экспериментом будет на порядок выше, до  $10^{-3}$ .

В четвертой строке табл. 1 выписаны вычисленные нами отношения СТР  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$ , приведенных выше в той же колонке. Как и ожидалось,

**Таблица 1.** Сравнение теоретических результатов расчета сверхтонкого расщепления для  $1s$  и  $2s$  уровней и их специфической разности (3–8 колонки) с экспериментом, значения магнитного момента ядра  $\mu$  приводятся в ядерных магнетонах (приведены погрешности расчета или эксперимента, если они указаны в цитированных работах)

	Эксперимент [9]	$\mu = 4.1106$				$\mu = 4.092$	
		[4]	[11]	[13]	[7]	[13]	[8]
$W_{1s}$ , эВ	5.08503(11)	5.16050	5.0863	5.08584	5.16138	5.08420	5.089(15)
$W_{2s}$ , эВ	0.797645(18)	0.81008(5)	0.7975	0.797645	0.810230(5)	0.797646	0.7983(25)
$W_{1s}/W_{2s}$	6.37505(28)	6.36999	6.3778	6.37607	6.37027	6.37401	6.3748
$\Delta'E$ , мэВ	-61.012(26)	-61.27(4)	-61.373	-61.150	-61.320(4)(5)	-60.872	-61.043(5)(30)

наилучшее согласие имеет место в работах [11, 13, 8], в которых учтен эффект БВ. При этом только в работе [8] отношение СТР согласуется с экспериментом в пределах погрешностей. Отношение на первый взгляд нечувствительно к величине магнитного момента ядра. Практически, однако, оно оказывается косвенно зависящим от него, поскольку согласование с экспериментом при разных  $\mu$  если возможно, то достигается с различными значениями  $\epsilon_{1s}$  и  $\epsilon_{2s}$ . А последнее обстоятельство, согласно (9), изменяет и отношение СТР.

Результаты для СР выписаны в последней строке табл. 1. Вычисленные в работах [4, 7] СР на две-три единицы в третьем знаке превышают экспериментальные значения. В работах [11, 13] СР не вычислялись, но с иллюстративной целью мы их также приводим в табл. 1, используя коэффициент  $\xi = 0.16886$ . И для них наблюдается расхождение. Данное несоответствие с экспериментом относительно СР в работе [9] послужило причиной заявления о загадке в СТР ионов  $^{209}\text{Bi}$ . Решение этой загадки было получено в работе [8]. Проведя эксперимент по измерению магнитного момента ядра  $^{209}\text{Bi}$ , на основе уточненного расчета химсдвига авторы пришли к выводу, что истинное значение  $\mu = 4.092(2) \mu_N$  ниже справочного значения  $\mu = 4.1106 \mu_N$  [10]. А поскольку СР пропорциональна  $\mu$ , то после исправления ее значение совпало с экспериментом в пределах ошибок. Этот пункт обсудим подробнее.

В ряде работ подчеркивалось, что величина  $\xi$  и, соответственно, СР ненаблюдаемы [11, 13]. Трактовка же этого параметра авторами концепции СР противоречива. С одной стороны, они рассматривают его как коэффициент, который может быть рассчитан с высокой точностью. Приводится значение 0.16885 [4] или 0.16886 [7, 8]. С другой стороны, в работе [8] указано, что изменение динамической модели ядерного магнетизма существенно для расчета  $\Delta'E$  и, соответственно,  $\xi$  [8]. Это противоречие отражается в табл. 1, где указанные значения СР и  $\xi$  не согласуются между собой. Так,

во второй колонке, если использовать указанные значения  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$  из работы [9] в комбинации с указанным там же значением  $\xi = 0.16886$ , то для СР получится значение  $\Delta'E = -61.013$  вместо указанного в статье  $-61.012$ . В свою очередь, указанное значение  $-61.012$  отвечает величине  $\xi = 0.1688598$ . Хотя это формально не выходит за пределы указанной неопределенности при округлении с семи до пяти цифр, однако приводит к указанному противоречию. Подобное иррегулярное поведение СР в зависимости от  $\xi$  отмечалось в работе [13]. Аналогично, в последней колонке приведено значение СР  $\Delta'E = -61.043$  мэВ, вычисленное по формуле (7) с исправленным значением магнитного момента. И оно противоречит значению  $\Delta'E = -61.028$  мэВ, которое получится при расчете по формуле (5) с тем же  $\xi$  и значениями  $W_{1s}$ ,  $W_{2s}$ , взятыми из второй и третьей строк того же столбца, соответственно. Это противоречие также говорит о неполном элиминировании.

Модельная зависимость СР и коэффициента  $\xi$  в явном виде продемонстрирована в работе [13]. Показано, что в зависимости от параметров модели величина  $\xi$  изменяется на три единицы в пятом знаке, что, в свою очередь, генерирует вариацию СР на две единицы в третьем знаке — на порядок больше экспериментальной погрешности. В табл. 2 мы приводим результаты расчета СР в зависимости от параметра радиуса токов в модели ПТ.  $W_{1s}$ ,  $W_{2s}$  вычислены как в работе [13]: дираковская часть, которая составляет 99% и 97% в случае  $1s$ - и  $2s$ -состояния соответственно, а также волновые функции электронов с учетом их взаимодействия вычислены по программе RAINE [19]. Поправки же на эффекты КЭД и межэлектронное взаимодействие в третьем порядке взяты из работы [7]. В работе [13] также вычислялись СР. Отличие настоящих расчетов в том, что в работе [13] была учтена зависимость  $\xi$  от модели, тогда как для табл. 2 расчет выполнен с фиксированным значением  $\xi = 0.16886$ . В целом приведенные значения

**Таблица 2.** Значения  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$  (эВ), вычисленные в модели ПТ в зависимости от радиуса токов  $R_c$  (фм), соответствующие значения СР (мэВ) для двух значений магнитного момента ядра, а также отношения  $W_{1s}/W_{2s}$

$R_c$	$\mu = 4.1106$		$\mu = 4.092$		$W_{1s}/W_{2s}$
	$W_{1s}$	$W_{2s}$	$\Delta'E$	$\Delta'E$	
7.3703	5.06970	0.794952	-61.12	-60.84	6.377
6.9728	5.08041	0.796738	-61.14	-60.86	6.377
6.5745	5.09087	0.798484	-61.16	-60.88	6.376
6.1753	5.10106	0.800184	-61.18	-60.90	6.375
5.7754	5.11092	0.801830	-61.20	-60.92	6.374
5.3744	5.12042	0.803414	-61.22	-60.94	6.373
4.9726	5.12949	0.804927	-61.24	-60.96	6.373
4.5698	5.13809	0.806363	-61.25	-60.98	6.372

в хорошем согласии с результатом [7] для  $\mu = 4.1106$ :  $\Delta'E = -61.320$  мэВ. Во всем диапазоне радиуса токов СР варьируется не более, чем на 2 единицы в четвертом знаке, тогда как разница с экспериментом происходит в третьем знаке. Этим подтверждается предположение [8], что истинное значение  $\mu$  несколько меньше справочного и равно  $\mu = 4.092$ . Тогда модифицированная расчетная величина  $\Delta'E$  отличается от экспериментальной в пределах погрешности, на три единицы в четвертом знаке.

Помогает сравнению с экспериментом то, что модельная зависимость  $\xi$  отражается в равной степени и в экспериментальном, и в теоретическом значении СР. Эта корреляция показана в табл. 3. Как сказано выше, естественно ожидать вариаций  $\xi$  вокруг среднего значения в пределах 0.16883 и 0.16889, т.е. на три единицы в пятом знаке. Как видно из таблицы, экспериментальное значение СР при этом ожидаемо изменяется достаточно сильно. Но аналогично изменяется и теоретическое значение  $\Delta'E$ . Более того, мы проверили эту процедуру, варьируя  $\xi$  в гораздо большем, заведомо нефизическом диапазоне значений между 0.16871 и 0.169. Теоретический расчет выполнен по формуле (7) как со старым, так и с новым значением магнитного момента ядра. В качестве последнего мы выбрали  $\mu = 4.090 \mu_N$ , в пределах ошибок согласующегося с экспериментальным значением [8]. Таким путем простого исправления магнитного момента достигается полное согласие вычисленной СР с экспериментальным значением, независимо от величины  $\xi$ .

Приведенные результаты демонстрируют, что теоретические значения следуют за экспериментальными, сохраняя отличие в третьем знаке, так

**Таблица 3.** Сравнение экспериментальных значений СР с теоретическими в зависимости от величины  $\xi$ , теоретические значения СР вычислены с новым (4.090) и старым (4.1106) значениями магнитного момента ядра

$\xi$	$\Delta'E_{\text{exp}}$	$\Delta'E_{\text{th}}$	
		$\mu = 4.1106$	$\mu = 4.090$
0.16871	-60.25	-60.55	-60.24
0.16874	-60.40	-60.70	-60.40
0.16877	-60.56	-60.86	-60.55
0.16880	-60.71	-61.01	-60.71
0.16883	-60.86	-61.17	-60.86
0.16886	-61.01	-61.32	-61.01
0.16889	-61.17	-61.48	-61.17
0.16892	-61.32	-61.63	-61.32
0.16895	-61.47	-61.79	-61.48
0.16898	-61.62	-61.94	-61.63
0.16900	-61.73	-62.04	-61.73

что перенормировка  $\mu$  по-прежнему остается единственным путем, ведущим к согласию между теорией и экспериментом. Таким образом, согласование теории с экспериментом по критерию СР вовсе не требует привязки к определенной ядерной модели. Вполне достаточно, если величина  $\xi$  будет вычислена до четвертого, и даже до третьего знака: сравнение с экспериментом от этого не страдает, если магнитный момент ядра выбран надлежащим образом. Вот этими обстоятельствами определяется конечный успех на данном этапе метода СР, сначала сформулировавшего загадку СТР в ионах  $^{209}\text{Bi}$ , а потом предложившего ее решение в виде изменения справочного значения магнитного момента ядра  $^{209}\text{Bi}$ .

Разумеется, не следует забывать, что магнитный момент определяется из независимых от СТР экспериментов по ядерно-магнитному резонансу. Экспериментальная часть работы [8] не завершена, и важно сохранить объективность в оценке результатов в дальнейшем.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Выше мы провели исследование принципов, лежащих в основе элиминирования эффекта БВ методами СР и отношения СТР для двух уровней на примере водородо- и литийподобных ионов  $^{209}\text{Bi}$ . Чувствительность обоих методов к модели ядерного магнетизма начинается на уровне  $\sim 10^{-3}$  от их фактического значения. Применительно к

методу отношений, аналогичная оценка была получена в работе [6]. Метод СР остается еще чувствительным к магнитному моменту ядра, что и послужило в свое время причиной загадки СТР в этих атомах. Загадка нашла удовлетворительное разрешение после того, как в работе [9] было получено указание, что магнитный момент несколько меньше принятого справочного значения:  $4.092 \mu_N$  вместо  $4.1106 \mu_N$  [10].

Этот результат подтверждается и методом отношений. В этом случае согласие с экспериментом также получено лишь в работе [8] со значением  $\mu = 4.092 \mu_N$ . Метод отношений таким образом также оказывается чувствительным к магнитному моменту ядра.

2. Заметим, что ни метод СР, ни метод отношений пока не позволяет использовать целиком высокую точность эксперимента [9], где ошибка измерения  $W_{1s}$  и  $W_{2s}$  порядка  $\sim 10^{-5}$ . Взаимное редуцирование основных компонент при вычислении СР увеличивает экспериментальную ошибку до  $10^{-4}$ . На этом уровне для проверки вычисления электронных волновых функций и эффектов КЭД можно использовать и метод отношений. Для того, чтобы использовать целиком точность экспериментальных данных, необходимо включение эффекта БВ в явном виде. При таком подходе он используется для изучения ядерной структуры [1]. А будучи извлечен из экспериментальных данных, он несколько не мешает и тестированию КЭД или волновых функций.

3. В свою очередь, адекватное описание эффекта БВ не представляет принципиальной сложности, причем может быть одинаково хорошо достигнуто в самых разных моделях, сразу для нескольких уровней. В данном примере двух электронных состояний фитирование можно провести с ошибкой, не превышающей  $10^{-6}$ , причем модельно-независимым способом [13]. Этого вполне достаточно для целей интерпретации эксперимента [9], с запасом на порядок величины. В частности, можно использовать весьма эвристическую модель аномальных моментов [11], которая позволяет модельно-независимым способом определить мультипольные моменты распределения по объему ядра токов ядерного магнетизма. В работе [11] отмечено, что такой путь подходит даже для контроля экспериментальных данных.

4. Отметим актуальность на данном этапе измерения СТР  $2p_{1/2}$ -уровня в бороподобных ионах  $^{209}\text{Bi}$ . Это связано с тем, что разложение радиальных волновых функций в начале координат содержит знакопеременные ряды Тэйлора, так что в разложении произведения компонент  $g(r)f(r)$  в (2) каждое нечетное слагаемое в значительной степени компенсирует вклад предыдущего четного.

Напомним, что в настоящее время данные имеются только по двум электронным конфигурациям, в которых основной действующей компонентой являются СТР  $1s$ - и  $2s$ -уровней. Было бы чрезвычайно интересно предусмотреть такое измерение, например, в развитии экспериментального проекта в оптической ловушке ARTEMIS в ГСИ Дармштадт [20] наряду с уточнением данных для  $1s$ - и  $2s$ -уровней.

Авторы выражают признательность Л.Ф. Витушкину, Ж. Гингес и В.М. Шабаеву за плодотворные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bohr and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **77**, 94 (1950).
2. J. R. Persson, ADNDT **99**, 62 (2013).
3. A. E. Barzakh, L. Kh. Batist, D. V. Fedorov, V. S. Ivanov, K. A. Mezilev, P. L. Molkanov, F. V. Moroz, S. Yu. Orlov, V. N. Pantelev, and Yu. M. Volkov, Phys. Rev. C **86**, 014311 (2012).
4. V. M. Shabaev, A. N. Artemyev, V. A. Yerokhin, O. M. Zherebtsov, and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **86**, 3959 (2001).
5. J. S. M. Ginges, A. V. Volotka, and S. Fritzsche, Phys. Rev. A **96**, 062502 (2017).
6. J. S. M. Ginges and A. V. Volotka, Phys. Rev. A **98**, 032504 (2018).
7. A. V. Volotka, D. A. Glazov, O. V. Andreev, V. M. Shabaev, I. I. Tupitsyn, and G. Plunien, Phys. Rev. Lett. **108**, 073001 (2012).
8. L. V. Skripnikov, S. Schmidt, J. Ullmann, C. Geppert, F. Kraus, B. Kresse, W. Nörtershäuser, A. F. Privalov, B. Scheibe, V. M. Shabaev, M. Vogel, and A. V. Volotka, Phys. Rev. Lett. **120**, 093001 (2018).
9. J. Ullmann, Z. Andelkovic, C. Brandau, A. Dax, W. Geithner, C. Geppert, C. Gorges, M. Hammen, V. Hannen, S. Kaufmann, K. König, Y. A. Litvinov, M. Lochmann, B. Maaß, J. Meisner, T. Murböck, R. Sánchez, M. Schmidt, S. Schmidt, M. Steck, T. Stöhlker, R. C. Thompson, C. Trageser, J. Vollbrecht, C. Weinheimer, and W. Nörtershäuser, Nat. Commun. **8**, 15484 (2017), DOI: 10.1038/ncomms15484
10. R. B. Firestone, C. M. Baglin, and S. Y. Frank Chu, *Table of Isotopes* (CD-ROM, 8th ed., Wiley-Interscience, New York, 1999).
11. F. F. Karpeshin and M. B. Trzhaskovskaya, Nucl. Phys. A **941**, 66 (2015).
12. Ф. Ф. Карпешин, М. Б. Тржасковская, ЯФ **81**, 3 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 1 (2018)].
13. F. F. Karpeshin and M. B. Trzhaskovskaya, Phys. Rev. C **100**, 024326 (2019).
14. Ф. Ф. Карпешин, М. Б. Тржасковская, Изв. РАН. Сер. физ. **84**, 1787 (2020) [Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. **84**, 1524 (2020)].
15. A. S. Reiner, Nucl. Phys. **5**, 588 (1958).
16. Ф. Ф. Карпешин, *Мгновенное деление в мюонных атомах и резонансная конверсия* (Наука, Санкт-Петербург, 2006).

17. Л. А. Слив, ЖЭТФ **21**, 770 (1951).  
 18. Ф. Ф. Карпешин, И. М. Банд, М. А. Листенгарген, Л. А. Слив, Изв. АН СССР. Сер. физ. **40**, 1164 (1976) [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Phys. **40**, 58 (1976)].  
 19. I. M. Band, M. B. Trzhaskovskaya, C. W. Nestor Jr., P. O. Tikkanen, and S. Raman, At. Data Nucl. Data Tables **81**, 1 (2002); I. M. Band and M. B. Trzhaskovskaya, *ibid.* **55**, 43 (1993); **35**, 1 (1986).  
 20. W. Quint, D. L. Moskovkhin, V. M. Shabaev, and M. Vogel, Phys. Rev. A **78**, 032517 (2008).

## COMPARISON OF THE METHODS FOR ELIMINATION OF THE BOHR–WEISSKOPF EFFECT IN THE ATOMIC SPECTRA OF HEAVY IONS OF $^{209}\text{Bi}$

F. F. Karpeshin<sup>1)</sup>, M. B. Trzhaskovskaya<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*The D.I. Mendeleev All-Russian Institute for Metrology (VNIIM), St. Petersburg, Russia*

<sup>2)</sup>*NRC “Kurchatov Institute” — PNPI, Gatchina, Russia*

A comparison is made of various methods for eliminating the Bohr–Weisskopf effect in the theory of hyperfine splitting: the ratio and specific differences of the values of hyperfine splitting in different shells. The relationship of these methods is demonstrated, which manifests itself in approximately the same dependence on the nuclear model (dynamic effect) at the  $10^{-3}$  level. This accuracy is sufficient to justify the solution of the bismuth hyperfine puzzle. Prospects for further experimental and theoretical studies are discussed aimed at a possible refinement of the magnetic moment of the  $^{209}\text{Bi}$  nucleus with the help of storage rings at GSI Darmstadt, IMP Lanzhou.