

## АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ УПРУГОГО ПРОТОН-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

© 2021 г. А. А. Галюзов<sup>1)\*</sup>, М. В. Косов<sup>1)\*\*</sup>

Поступила в редакцию 28.12.2020 г.; после доработки 09.03.2021 г.; принята к публикации 09.03.2021 г.

Предложена эмпирическая аппроксимация дифференциальных сечений упругого протон-ядерного рассеяния в широком диапазоне энергий и для всех ядер-мишеней. В области малых энергий дифференциальное сечение упругого  $pp$ -рассеяния уточнено в рамках теории прямых ядерных реакций с учетом интерференции электромагнитной и ядерной амплитуд рассеяния.

DOI: 10.31857/S0044002721040127

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно при моделировании упругого ядерного рассеяния предполагается, что из-за кулоновского барьера вклад ядерной амплитуды рассеяния мал по сравнению с электромагнитной амплитудой, так что ограничиваются использованием формулы Резерфорда для описания углового распределения упругого рассеяния. Это справедливо для относительно невысоких энергий и только для средних и тяжелых ядер, но в случае  $pp$ -рассеяния и рассеяния протонов на легких ядрах при энергиях, начиная со 100 кэВ, дифференциальное сечение упругого рассеяния может существенно отличаться от резерфордовского, поскольку сильное взаимодействие вносит заметный вклад в сечение рассеяния на большие углы.

Для описания дифференциальных угловых распределений традиционно используют оптические модели [1], зависящие от большого числа параметров: как самого оптического релятивистски не инвариантного потенциала, так и радиального распределения плотности ядра. Однако к ионам водорода, особенно к  $pp$ -рассеянию, применить оптическую модель не представляется возможным. Альтернативой оптической модели служит полуэмпирическая теория прямых ядерных реакций (ТПР) [2, 3], основанная на использовании релятивистски инвариантных мандельштамовских переменных [2, 4], а также амплитуд и фаз соответствующих им каналов ядерного рассеяния, хорошо зарекомендовавшая себя при описании  $(\alpha, n)$ -реакций [5]. Прямые ядерные реакции отличаются от резонансных, идущих через компаунд-

ядро, тем, что прямые процессы быстрые и протекают за время порядка  $10^{-22}$  с, а резонансные компаунд-системы могут существовать значительно большее время. Универсальный ТПР-подход позволяет с помощью  $t$ - и  $u$ -каналов ядерного рассеяния описывать периферические процессы, а с помощью  $s$ -канального взаимодействия — реакции, идущие с образованием компаунд-ядра и учитывающие взаимодействие вторичных частиц в конечном состоянии. Эмпирический подход с относительно небольшим числом параметров выглядит удобным средством для практически необходимой аппроксимации, востребованной в протонной терапии, ускорительной технике и астрофизических расчетах. Были получены эмпирические аппроксимации экспериментальных данных дифференциальных сечений упругих протон-протонного и протон-ядерного рассеяний, а затем в области малых энергий выполнена уточняющая параметризация углового распределения сечения упругого  $pp$ -рассеяния на основе ТПР, учитывающая интерференцию электромагнитной и ядерной амплитуд рассеяния.

При взаимодействии ядер существует кулоновский барьер реакции, для описания которого используется величина, называемая энергией Гамова и определяемая как [6, 7]

$$E_g = 2\mu(\pi\alpha zZ)^2, \quad (1)$$

где  $\mu = \frac{m \cdot M}{m + M}$  — приведенная масса,  $m$ ,  $M$  и  $z$ ,  $Z$  — массы и заряды налетающей частицы и ядра-мишени, а  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры. Для реакции упругого  $pp$ -рассеяния  $E_g = 0.493$  МэВ.

Энергия Гамова используется в факторе Гамова [7], описывающем вероятность проникаемости

<sup>1)</sup>Всероссийский Научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, Москва, Россия.

\*E-mail: AAGaluzov@vniia.ru

\*\*E-mail: Kosov@vniia.ru

кулоновского барьера

$$P = \exp\left(-\sqrt{\frac{E_g}{T_{CM}}}\right), \quad (2)$$

где  $T_{LS/CM}$  — кинетические энергии в лабораторной системе/системе центра масс, связанные между собой как

$$T_{CM} = T_{LS} \cdot M \cdot \frac{m + M}{s} \approx T_{LS} \cdot \frac{M}{m + M}, \quad (3)$$

поскольку в нерелятивистском пределе  $s = m^2 + 2(m + T_{LS})M + M^2 \approx (m + M)^2$  — мандельштамовская переменная, имеющая смысл квадрата полной энергии реакции в системе центра масс. Из (3) следует, что в случае  $pp$ -рассеяния в нерелятивистском пределе  $T_{CM} = \frac{T_{LS}}{2}$ .

Для того чтобы рассчитать полную амплитуду рассеяния, необходимо знать выражение электромагнитной (резерфордовской) амплитуды рассеяния налетающего ядра на ядре-мишени. Амплитуду резерфордовского рассеяния можно определить как

$$A_R = -16\pi\mu\alpha z Z \cdot \frac{\sqrt{s}}{t}, \quad (4)$$

где  $t$  — мандельштамовская переменная, имеющая смысл квадрата переданного в упругом рассеянии импульса:

$$-t = 2p_{CM}^2 \cdot (1 - \cos \theta_{CM}) = |t_{\max}| \cdot \sin^2 \frac{\theta_{CM}}{2}. \quad (5)$$

Импульс в системе центра масс реакции выражается через  $p_{LS}$  — импульс налетающего ядра в лабораторной системе как

$$p_{CM} = \frac{p_{LS} \cdot M}{\sqrt{s}}, \quad (6)$$

$\theta_{CM}$  — угол рассеяния в системе центра масс и квадрат максимального переданного импульса:

$$|t_{\max}| = 4p_{CM}^2. \quad (7)$$

В (4) и везде далее используется релятивистское обобщение приведенной массы [8]

$$\mu = \frac{m \cdot M}{\sqrt{s}}. \quad (8)$$

Дифференциальное сечение резерфордовского рассеяния полностью ионизированных ядер определяется выражением [9]

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega_{CM}} = \left(\frac{2\mu\alpha z Z}{t}\right)^2 \cdot (\hbar c)^2, \quad (9)$$

где элемент телесного угла  $d\Omega_{CM} = -d\phi \cdot d(\cos \theta_{CM})$ ,  $\phi$  — азимутальный угол, а  $\hbar c \approx 200$  МэВ фм.

При использовании известного из ядерной кинематики выражения [4]

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi \cdot s \cdot p_{CM}^2} \cdot |A|^2 \quad (10)$$

дифференциального сечения через полную комплексную амплитуду рассеяния  $A$  можно записать:

$$\frac{d\sigma_R}{dt} = \frac{A_R^2}{64\pi \cdot s \cdot p_{CM}^2} \cdot (\hbar c)^2. \quad (11)$$

Чтобы перейти от (11) обратно к (9), нужно воспользоваться тем, что якобиан перехода от  $\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}$  к  $\frac{d\sigma}{d(-t)}$  имеет вид  $\frac{\pi}{p_{CM}^2}$ .

Резерфордовское дифференциальное сечение рассеяния тождественных частиц с массой  $m$ , зарядом  $z$  и спином  $S$  имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_R}{d\Omega_{CM}} &= \quad (12) \\ &= \frac{C_z}{(4p_{CM}^2)^2} \left( \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta_{CM}}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\theta_{CM}}{2}} + \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^{2S}}{S + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{\beta_{CM}^r} \ln\left(\text{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2}\right)\right)}{\sin^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \cos^2 \frac{\theta_{CM}}{2}} \right), \end{aligned}$$

где  $C_z = (m\alpha\hbar cz^2)^2$ . В оригинальном выражении (12) в [10] использовалась нерелятивистская величина приведенной массы  $\mu$  и  $\beta_{CM}^r = \frac{p_{CM}}{\mu}$ . В [8] рассматривалось, в частности, кулоновское рассеяние релятивистских заряженных частиц, для которых предлагалось применять релятивистское обобщение приведенной массы (8) и точное выражение  $\beta_{CM}^r = \frac{p_{CM}}{\sqrt{p_{CM}^2 + \mu^2}}$ , которые и были использованы в настоящей работе. Первый член в (12) соответствует вкладу в дифференциальное сечение  $t$ -канального рассеяния, второй —  $u$ -канального, так как мандельштамовская переменная  $u$  в случае упругого рассеяния выражается как

$$\begin{aligned} -u &= 2p_{CM}^2 \cdot (1 + \cos \theta_{CM}) = \quad (13) \\ &= |t_{\max}| \cdot \cos^2 \frac{\theta_{CM}}{2}, \end{aligned}$$

а третий — их интерференции.

Для удобства дальнейшего использования можно упростить выражение (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_R}{d\Omega_{CM}} &= \quad (14) \\ &= \frac{C_z}{t^2} \left( 1 + \text{tg}^4 \frac{\theta_{CM}}{2} + \frac{(-1)^{2S}}{S + \frac{1}{2}} \cdot \text{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \cos \left( \frac{\alpha}{\beta_{CM}^r} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \right) \right).$$

В приближении высоких энергий  $\alpha \ll \beta_{CM}^r$  косинус в последнем слагаемом правой части выражения (14) обращается в единицу, однако при малых энергиях его вклад оказывается существенным, в связи с чем при аппроксимации экспериментальных дифференциальных сечений упругого рассеяния использовалась точная формула (14).

При низких энергиях ядра экранированы электронной оболочкой, поэтому на больших межъядерных расстояниях, соответствующих по соотношению неопределенности малым квадратам переданного импульса  $|t|$  и малым углам рассеяния  $\theta_{CM}$ , для сходимости интеграла от резерфордского дифференциального сечения рост  $\frac{1}{t^2}$  при стремлении  $t$  к нулю обрезается не зависящим от энергии налетающей частицы параметром электронной экранировки  $\mu_S$ . Резерфордское сечение становится пропорциональным фактору  $\frac{1}{(t-\mu_S^2)^2}$ , то есть принимает вид полюсного  $t$ -канального члена, который возникает, например, при обмене  $\pi^0$ -мезоном:

$$\frac{1}{(t - m_{\pi^0}^2)^2}, \quad (15)$$

где  $m_{\pi^0} \approx 135$  МэВ — масса  $\pi^0$ -мезона (напомним, что  $t = -|t|$  — неположительная величина, изменяющаяся согласно (5) от  $-|t_{\max}|$  до 0). Если бы была учтена электронная экранировка, то все  $\sin^2 \frac{\theta_{CM}}{2}$ , согласно (5) пропорциональные мандельстамовской переменной  $t$ , надо было бы заменить на  $\sin^2 \frac{\theta_{CM}}{2} + \frac{\mu_S^2}{4p_{CM}^2}$ , а все  $\cos^2 \frac{\theta_{CM}}{2}$ , пропорциональные  $u$ , — на  $\cos^2 \frac{\theta_{CM}}{2} + \frac{\mu_S^2}{4p_{CM}^2}$ . Эффект электронной экранировки учитывался при эмпирической аппроксимации экспериментальных дифференциальных сечений упругих протон-протонного и протон-ядерного рассеяний. В процессе параметризации углового распределения сечения упругого  $pp$ -рассеяния на основе ТПР было установлено, что вклад электронной экранировки в электромагнитную амплитуду рассеяния пренебрежимо мал, поэтому в аппроксимации на основе ТПР она никак не учитывалась.

Большая часть экспериментальных данных дифференциальных сечений упругих протон-протонного и протон-ядерного рассеяний бралась из базы ядерных данных EXFOR [11]. Во время подготовки экспериментальных данных для аппроксимации пришлось столкнуться с существенной трудностью, состоящей в том, что в экспериментальных работах данные об угле в дифференциальном сечении приведены как в

лабораторной системе, так и в системе центра масс, причем сечение и угол рассеяния могут приводиться в разных системах. Это потребовало скрупулезного изучения каждой работы и приведения данных к единому виду в системе центра масс  $\left( \theta_{CM}, \frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} \right)$ , где  $\theta$  — угол рассеяния в градусах, а  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  — дифференциальное сечение в мбн/ср.

Ниже описываются непрерывная по энергии эмпирическая аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния, а также непрерывная по энергии и атомному весу  $A$  эмпирическая аппроксимация протон-ядерного рассеяния, полученные в результате обработки большого объема экспериментальных данных. Эмпирической аппроксимация называется потому, что она проводилась при использовании в качестве фитирующей функции суммы функций вида  $C \cdot f'(-t) \cdot e^{f(-t)}$ , где  $C$  — нормировочная константа, а  $f(x)$  — полином  $x$ . Очевидно, что каждый такой член разложения элементарно интегрируется, что упрощает розыгрыш угла рассеяния с помощью случайного числа. В рамках такого подхода невозможно было учесть интерференцию электромагнитной и ядерной амплитуд рассеяния, а их вклады в дифференциальное сечение представлялись независимыми аддитивными членами и вклад электромагнитного рассеяния, которое обычно учитывается в форме многократного рассеяния, вычитался из дифференциального сечения. Это позволяло по полученным параметризуемым дифференциальным сечениям формулам элементарно вычислять интегральные сечения, а простота получающихся функций делала возможным с высокой производительностью проводить розыгрыш с помощью случайных чисел угловых распределений этих сечений в процессе численного моделирования.

После построения глобальной  $pA$ -формулы, ориентированной на высокие энергии, в которой резерфордское рассеяние можно было выделить как независимый процесс, с целью сравнения с полученной эмпирической аппроксимацией упругого  $pp$ -рассеяния приводится аппроксимация того же упругого сечения в области малых энергий, выполненная на основе ТПР и учитывающая интерференцию электромагнитной и ядерной амплитуд рассеяния.

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ УПРУГИХ ПРОТОН-ПРОТОННОГО И ПРОТОН-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЙ

### 2.1. Описание дифференциального сечения упругого $pp$ -рассеяния

Дифференциальное сечение упругого  $pp$ -рассеяния требуется при моделировании рассеяния

**Таблица 1.** Коэффициенты, использовавшиеся в эмпирической аппроксимации (16) дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния

$A_e$	$1.71 + \frac{6.24}{p} + \frac{2.78}{p^3}$	$B_e$	$10 \ln p + \frac{105}{\sqrt{p}}$
$A_d$	$\frac{74 + 3(\ln p - 5)^2}{1 + 3.4/p^5} + \frac{0.2/p^2 + 17p}{p^4 + 0.001\sqrt{p}}$	$B_d$	$\frac{8p^{0.055}}{1 + 3.64/p^3}$
$A_m$	$5 \times 10^{-5} + \frac{4000}{p^4 + 1500p}$	$B_m$	$0.46 + \frac{1.2 \times 10^6}{p^4 + 3.5 \times 10^6/\sqrt{p}}$
$A_h$	$5 \times 10^{-5} + \frac{10^{10}}{p^8 + 8.5 \times 10^8 p^2 + 10^{10}}$	$B_h$	$1.1 + \frac{3.4 \times 10^6}{p^4 + 6.8 \times 10^6}$

протонов на атомах водорода в составе органических материалов, в частности при прецизионном расчете упругого  $pp$ -рассеяния при низких энергиях, необходимом для моделирования эффекта радиационной терапии, а также в различных астрофизических приложениях. Для этих целей была бы очень полезна непрерывная в широком диапазоне кинетических энергий налетающего протона аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния.

Эмпирическая формула дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{A_e B_e e^{-B_e \sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}} + \quad (16)$$

$$+ A_d e^{B_d t} + 2A_m B_m^2 (-t) e^{-(B_m t)^2} +$$

$$+ A_h B_h e^{B_h t} + (t \leftrightarrow u),$$

где зависимости используемых параметров от импульса  $p$  налетающего протона в лабораторной системе в МэВ/с приведены в табл. 1. Член  $(t \leftrightarrow u)$  означает, что из-за тождественности протонов необходимо прибавить такое же выражение, где  $-t$  заменено на  $-u = 2m_p \cdot (\sqrt{p^2 + m_p^2} - m_p) + t$ , а  $m_p$  — масса протона.

Первый член  $(A_e, B_e)$  в (16) соответствует электромагнитному рассеянию с учетом электронной экранировки. В процессе аппроксимации было опытным путем получено, что в отличие от резерфордского рассеяния, дифференциальное сечение которого  $\sim t^{-2}$ , наилучшее качество параметризации дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния обеспечивает использование в первом члене  $(A_e, B_e)$  квадратного корня из  $-t$ . Второе слагаемое в (16) описывает дифракционный конус. Третий член  $(A_m, B_m)$  соответствует первому, а четвертый — последующим одновременно аппроксимируемым дифракционным максимумам, поскольку подробно описать все дифракционные максимумы высших порядков не представляется возможным, а также потому, что дифракционные

минимумы в силу ферми-движения и флуктуаций плотности (например, кластеризации) вовсе не так глубоки, как предсказывает оптическая модель, и даже на самых тяжелых ядрах проявляются всего один-два вторичных максимума, а остальное угловое распределение представляется усредненной экспоненциально спадающей кривой  $(A_h, B_h)$ .

Все члены выражения (16) (за исключением описывающего дифракционный конус  $(A_d, B_d)$ , где интеграл равен  $\frac{A_d}{B_d}$ , и  $A_d$  имеет смысл значения дифференциального сечения при рассеянии на нулевой угол) нормированы так, что коэффициент  $A$  соответствует интегралу этого члена по  $-t$  от нуля до бесконечности. В действительности интегрирование надо производить в ограниченном диапазоне от нуля до значения  $|t_{\max}| = 2m_p (\sqrt{p^2 + m_p^2} - m_p)$ , совпадающего по величине с (7) и которое можно получить, если записать выражение (5) для ядра-мишени. Нормировки не было сделано для члена  $(A_d, B_d)$ , описывающего дифракционный конус, поскольку при малых энергиях, которые сейчас рассматриваются,  $B_d$  практически обращается в нуль, и  $A_d$  приобретало бы неадекватно большую величину. При малых энергиях членом первого дифракционного максимума  $(A_m, B_m)$  и эффективной экспонентой, аппроксимирующей высшие максимумы  $(A_h, B_h)$ , можно пренебречь. Таким образом, было очевидно, что при малых энергиях эта общая формула требует усовершенствования.

Полученная эмпирическая аппроксимация показана на рис. 1. Здесь и далее угловые распределения представлены для средней энергии использованных данных. Различные наборы данных, соответствующие одной и той же средней кинетической энергии налетающего протона в лабораторной системе, изображены различными типами маркеров. При рассеянии тождественных частиц дифференциальное сечение симметрично относительно величин  $|t_{\max}|/2$ , соответствующих углу рассеяния

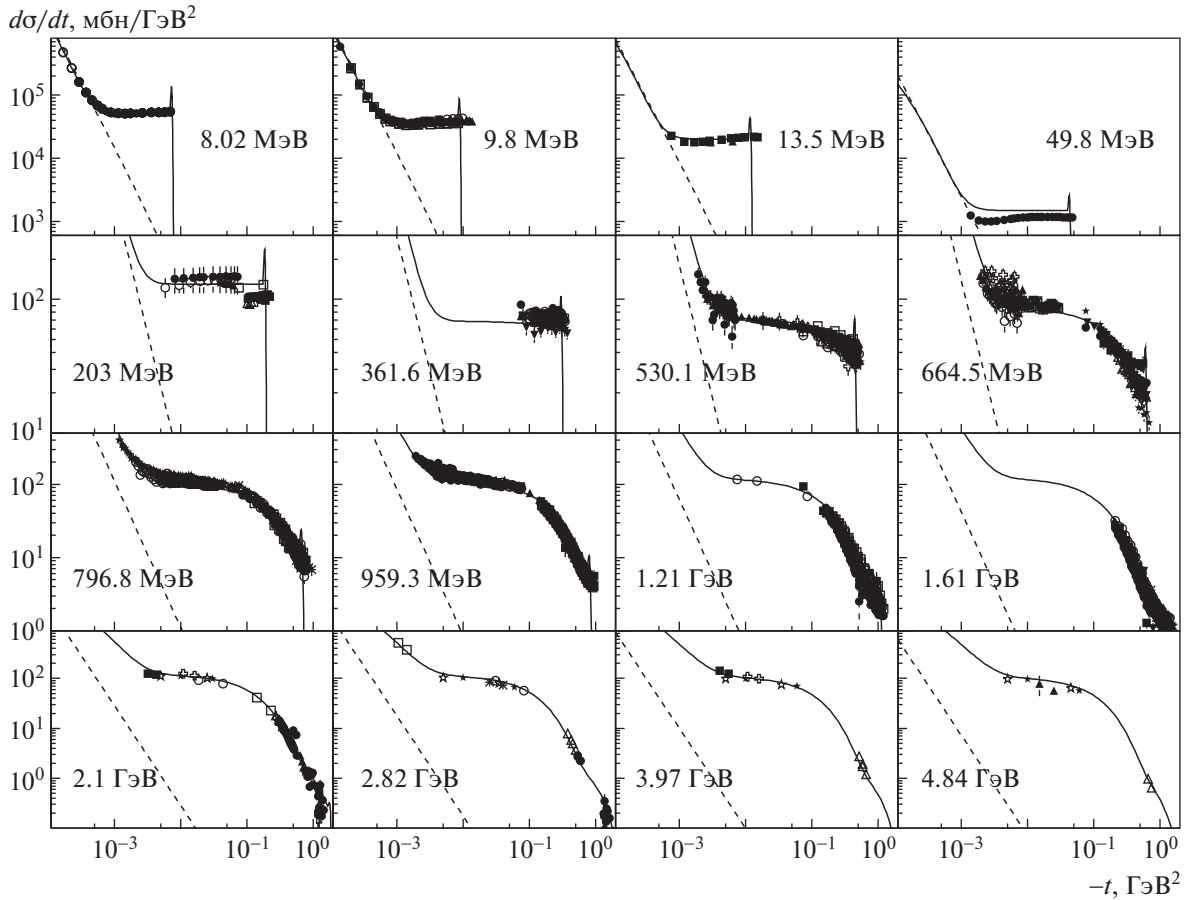


Рис. 1. Дифференциальные сечения упругого  $pp$ -рассеяния из работ [14–16, 114, 115, 117, 119–143], описанные формулой (16). Штриховая прямая — резерфордовское дифференциальное сечение (14).

$\theta_{CM} = 90^\circ$  в системе центра масс, поэтому эти значения мандельштамовской переменной на рисунках обозначены вертикальными линиями, относительно которых сечение симметрично.

Как видно из рис. 1, за исключением кинетических энергий налетающих протонов  $T_{LS} = 49.8$  и  $203$  МэВ, разработанная эмпирическая аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния хорошо описывает экспериментальные данные. При меньших энергиях она так же хорошо, как и на рис. 1, согласуется с экспериментальными данными, а при росте энергий в ГэВную область отлично совпадает с ними.

Помимо аппроксимирующей функции (16) на рис. 1 для каждой кинетической энергии налетающего протона изображена соответствующая ей кривая резерфордовского рассеяния тождественных частиц (14), где переход от  $\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}}$  к  $\frac{d\sigma}{dt}$  осуществляется с помощью якобиана перехода  $\frac{\pi}{p_{CM}^2}$ . Как видно из рис. 1, при малых энергиях в области малых углов рассеяния угловое распределе-

ние дифференциального сечения совпадает с резерфордовской кривой. Вероятно, это связано с тем, что из-за кулоновского барьера при малых кинетических энергиях и углах рассеяния ядерная амплитуда мала по сравнению с электромагнитной амплитудой рассеяния. Однако при увеличении угла рассеяния вклад резерфордовского сечения падает  $\sim t^{-2}$ , и упругое дифференциальное сечение начинает определяться вкладом ядерной амплитуды рассеяния. На рис. 1 это проявляется постоянной величиной дифференциального сечения при больших углах рассеяния, что соответствует диаграмме изотропного распада компаунд-ядра. При кинетической энергии, большей  $100$  МэВ, дифференциальные сечения упругого  $pp$ -рассеяния измерялись в области, где резерфордовское сечение дает малый вклад.

## 2.2. Описание дифференциального сечения упругого протон-ядерного рассеяния

Для описания дифференциальных угловых распределений традиционно используют оптические

модели [1], зависящие от большого числа параметров как самого оптического потенциала, так и радиального распределения плотности ядра. Существуют и другие модели расчета дифференциальных угловых распределений, но большинство из них все равно сводится к параметризации сечений. В этом смысле простая и удобная для моделирования эмпирическая параметризация дифференциальных сечений ничем не хуже модельной со сравнимым числом свободных параметров. Главным вопросом остается предсказательная сила такой эмпирической параметризации, поскольку экспериментальные данные дифференциальных сечений имеются для ограниченных энергетических диапазонов и относительно небольшого набора ядерных мишеней. Понять то, насколько надежной можно считать экстраполяцию или интерполяцию разработанной эмпирической параметризации, описывающей упругое сечение в области энергий и для ионных пар, для которых нет экспериментальных данных, можно оценивая качество параметризации дифференциальных сечений при непрерывной аппроксимации параметров фитирующей функции как функций начальной кинетической энергии  $T_{LS}$  налетающей частицы и атомного веса ядра-мишени  $A$ .

При упругом рассеянии протонов может иметь место  $t$ -канальное рассеяние, примером которого является кулоновское рассеяние с  $t$ -канальным обменом виртуальным  $\gamma$ -квантом, а также может наблюдаться  $u$ -канальное рассеяние, когда налетающая частица подхватывает  $A - 1$  нуклонов ядра-мишени, где  $A$  — массовое число ядра, и сама превращается в ядро-мишень с числом нуклонов  $A$ . Эффект подхвата  $A - 1$  нуклонов ядра-мишени налетающим ядром также называется “ядерной гордией” и при низких энергиях может иметь достаточно большую вероятность. Очевидно, что в системе центра масс при  $u$ -канальном обмене протон как бы рассеивается назад, причем при приближении угла рассеяния к  $180^\circ$  сечение не убывает, а растет. Понятно, что никакие оптические потенциалы не способны воспроизвести этот эффект, а при свободной форме фитирующей функции его описать возможно. Наиболее ярко  $u$ -канальное рассеяние протонов наблюдается на трех ядрах: дейтерии (нуклонный обмен),  $^3\text{He}$  (дейтронный обмен) и  $^4\text{He}$  (третиевый обмен). Данные для ядра трития не рассматриваются, поскольку в физических детекторах такой ядерной мишени не существует.

Была найдена единая эмпирическая параметризация дифференциального сечения упругого рассеяния протонов на легких ядрах с  $A < 7$ :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_e}{dt} + \quad (17)$$

$$+ A_d (B_d - 2C_d t) e^{B_d t - C_d t^2} + 3A_m B_m t^2 e^{B_m t^3} + A_h B_h e^{B_h t} + A_u B_u e^{B_u t},$$

где  $\frac{d\sigma_e}{dt} = A_e B_e \frac{e^{-B_e \sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}}$  и зависимости используемых параметров от импульса  $p$  налетающего протона в лабораторной системе в МэВ/с и атомного веса ядра-мишени  $A$  в атомных единицах массы приведены в табл. 2.

Первый член  $\frac{d\sigma_e}{dt}$ , так же как и для протонной мишени, приблизительно описывает дифференциальное сечение электромагнитного рассеяния с учетом электронной экранировки. Главным вкладом ядерного упругого рассеяния является дифракционный конус рассеяния, описываемый вторым членом с нормировочным коэффициентом  $A_d$ . Аппроксимация параметров дифракционного конуса наиболее сложна, поскольку она фактически выражает зависимость упругого протон-ядерного дифференциального сечения от энергии налетающего иона и атомного веса ядра-мишени. Третий член  $(A_m, B_m)$  описывает первый и единственный дифракционный максимум, а четвертый  $A_h$  — аппроксимирует вклад всех старших дифракционных максимумов, которые чаще всего из-за недостаточного разрешения измерительной установки сливаются в одну падающую экспоненту. Наконец, ядерную гордию описывает последний член  $A_u$ . Если отвлечься от множителя  $p^2$ , то в аппроксимации вклада в сечение ядерной гордии  $A_u$  выделяются два члена. Первый имеет вид гамма-функции, сначала степенным образом возрастая, а потом экспоненциально падая. Он вносит определяющий вклад при малых энергиях, но становится пренебрежимо малым уже при импульсе 200 МэВ/с (кинетическая энергия протона  $T_{LS} \approx 21$  МэВ), по порядку соответствующим импульсу Ферми нуклонов в ядре. Второй член степенным образом убывает с возрастанием импульса. Он дает небольшой, но более-менее постоянный вклад при малых энергиях и, несмотря на то что степенным образом убывает, при импульсах протона больше импульса Ферми нуклонов в ядре является определяющим фактором при описании  $u$ -канального рассеяния. Ядерная гордия на фоне быстро падающего с возрастанием величины  $-t$  дифференциального сечения приведена на рис. 2 до кинетической энергии протона порядка 900 МэВ, но в [12] сечение рассеяния назад протона на дейтроне измерено вплоть до энергии 2.7 ГэВ.

Для более тяжелых ядер вклад рассеяния назад мал, поэтому будет использоваться другая параметризация, не учитывающая  $u$ -канального рассеяния, но хорошо воспроизводящая не только первый, но и второй дифракционный максимумы.

**Таблица 2.** Коэффициенты, использовавшиеся в эмпирической аппроксимации (17) дифференциального сечения упругого протон-ядерного рассеяния при  $A \leq 6$

$A_e$	$1.5 + \frac{0.2(A-1)}{p^4}$
$B_e$	$10 \ln p + \frac{210}{A\sqrt{p}}$
$A_d$	$\frac{4000A}{1+a_1p^{A+4}} + \frac{a_2}{p^4+a_3p^{4-2A}} + \frac{0.28(\ln p)^{10}+a_4}{1+3.8p^{-2}/A}$
$a_1$	$1.2 \times 10^7 A^8 + 380A^{17}$
$a_2$	$\frac{0.7}{1+4 \times 10^{-12}A^{16}}$
$a_3$	$\frac{2.5}{A^{12}+10^{-16}A^{40}}$
$a_4$	$1.2A^2 + 2.3$
$B_d$	$\frac{b_1+0.2Ap^2}{p^4+b_2/p^{A/2}} + b_3$
$b_1$	$b_1 = \frac{0.01}{1+0.0024A^5}$
$b_2$	$b_2 = \frac{9 \times 10^{-7}}{1+0.035A^5}$
$b_3$	$b_3 = \frac{42+2.7 \times 10^{-11}A^{16}}{1+0.14A}$
$C_d$	$\frac{2.25A^3}{1+18/p^2} + \frac{c_1}{p^{6-A}+c_2/p^{16}}$
$c_1$	$\frac{0.0024A^8}{1+2.6 \times 10^{-4}A^7}$
$c_2$	$\frac{3.5 \times 10^{-36}A^{40}}{1+5 \times 10^{-15}A^{31}}$
$A_m$	$\frac{10^5}{(A^8+2.5 \times 10^{12}/A^{16})(p^{A-2}+d/p^4)} + 0.0006A^3$
$d$	$\frac{8 \times 10^7 A^{-12}}{1+10^{-28}A^{42}}$
$B_m$	$(10+4 \times 10^{-8}A^{13})p^{0.114} + \frac{0.003}{p^8+2 \times 10^{-23}/p^{16}}$
$A_h$	$0.03 + \frac{1}{(p^{A+1}+1.5 \times 10^{-4}p^{-A}/(1+5 \times 10^{-6}A^{12}))(1+10^{-4}A^8)}$
$B_h$	$\frac{A/2}{p^3+2 \times 10^{-7}A^4} + \frac{4}{1+64A^{-3}/p^2}$
$A_u$	$p^2 \left( 10^8 p^{A/2} e^{0.32A\sqrt{A}-20p^{A/2}e^{0.45A\sqrt{A}}} + \frac{7000+2.4 \times 10^6/A^5}{1+2.5 \times 10^5 e^{0.085A^3} p^{2.5A}} \right)$
$B_u$	$\frac{p^{A-2}(920+0.03A^{11})}{1+p^A(93+0.0023A^{12})}$

Все члены аппроксимирующей формулы (17) записаны в таком виде, что они легко могут быть проинтегрированы по  $-t$  от нуля до величины (7), чтобы получить интегральные сечения. Следует также заметить, что здесь использованы большие степени атомного веса  $A$  только для того, чтобы дать удовлетворительное описание дифференциального сечения для изотопа  ${}^6\text{Li}$ , более точная аппроксимация для которого может быть найдена в специальных библиотеках физического программного пакета CHIPS-TPT [13] (Свидетельство Роспатент № 2014611928).

Рассеяние протонов на ядрах дейтерия изучено достаточно подробно как при низких, так и при высоких энергиях. Эмпирическая параметризация (17) экспериментальных упругих дифференциальных сечений  $pd$ -рассеяния, измеренных при малых кинетических энергиях налетающего протона [14–43], показана на рис. 2, на каждой из частей которого кинетическая энергия указана в лабораторной системе. Заметим, что при больших  $T_{\text{LS}}$  вплоть до 900 ГэВ разработанная параметризация работает гораздо лучше, чем при низких энергиях. Из рис. 2 видно, что эффект ядерной славы проявляется начиная с самых малых энергий. Обращает на себя внимание то, что при сохранении характера зависимости дифференциального сечения от релятивистски инвариантной мандельштамовской переменной (5), имеющей смысл квадрата переданного импульса, граница распределения растет с увеличением энергии налетающего протона. Именно при максимальном квадрате переданного импульса, который соответствует углу рассеяния в системе центра масс  $180^\circ$ , и возникает эффект ядерной славы.

Дейтрон — достаточно рыхлая система, и эффект подхвата нейтрона налетающим протоном не кажется маловероятным, однако в системе центра масс это приводит к кажущемуся рассеянию налетающего протона назад, тогда как, подхватив нейтрон мишени, он продолжает лететь вперед, а назад летит протон-спектатор из состава дейтрона мишени. При кинетической энергии ниже 0.6 МэВ кулоновский барьер ядерной реакции сводит вероятность  $u$ -канального рассеяния практически к нулю, и ожидаемая ядерная слава практически отсутствует, а резкий максимум в области малых углов практически полностью описывается резерфордским рассеянием, как это показано, например, для начальной кинетической энергии 448 кэВ.

На рис. 3 показано использование параметризации (17) для описания дифференциальных сечений упругого рассеяния протонов на ядре  ${}^3\text{He}$ , измеренных в [16, 24, 33, 40, 44–54]. Отчетливо проявляющийся эффект ядерной славы соответствует  $u$ -канальному обмену ядром дейтерия — подхвату протоном рыхлого ядра дейтерия как целого. Тем

не менее, экспериментально эффект ядерной славы отчетливо проявляется вплоть до кинетической энергии 86 МэВ, что значительно больше импульса Ферми, а начинает быть заметным с энергии всего 2.6 МэВ. Как видно из рис. 3, начиная с кинетической энергии протона примерно 0.5 МэВ отличие упругого дифференциального сечения от резерфордской кривой существенно, а с ростом энергии только увеличивается.

Рассеяние протонов на ядрах основного изотопа гелия исследовано значительно подробнее, чем на ядрах  ${}^3\text{He}$ . Дифференциальные сечения упругого  $p\alpha$ -рассеяния, измеренные при достаточно малых энергиях [16, 40, 50, 51, 55–74], показаны на рис. 4. Вклад ядерной славы, наложенный на первый дифракционный максимум, виден уже с  $T_{\text{LS}} = 1.6$  МэВ. Принимая во внимание неполное исследование дифференциальных сечений, можно предположить, что при взаимодействии протонов с гелием амплитуды ядерного упругого рассеяния начинают доминировать в упругом рассеянии на большие углы, начиная с энергии 1 МэВ. Как и в случае  $p{}^3\text{He}$ -рассеяния, отличие углового распределения сечения упругого рассеяния от резерфордской кривой заметно с  $T_{\text{LS}}$  порядка сотни кэВ, а при росте энергии только увеличивается. Следует также упомянуть про более подробные измерения упругого  $p\alpha$ -рассеяния, проведенные в [74], начиная с энергии 0.8 ГэВ вплоть до 1.3 ГэВ, т. е. вплоть до рассеяния назад, которые позволяют предположить, что подобные реакции лежат за пределами области применимости оптических моделей [1] и метода искаженных волн DWA [75].

Чем тяжелее ядро мишени, тем уже дифракционный конус рассеяния, и тем больше дифракционных максимумов возникает в спектре. При начальной кинетической энергии протона больше 1 ГэВ насчитывается до десяти вторичных дифракционных максимумов. Аппроксимировать все максимумы не представляется возможным, поскольку даже для одного ядра и одной энергии положение всех максимумов не удастся описать с помощью теории рассеяния Глаубера (релятивистской оптической модели) [76], варьируя параметры плотности ядра как свободные параметры. С практической точки зрения в этом и нет необходимости, поскольку в области больших переданных импульсов, где возникают старшие максимумы, доминирует квазисвободное рассеяние с выбиванием нуклона из ядра или сильным ядерным возбуждением, поэтому старшие максимумы при высокой энергии можно описать единой экспоненциально падающей функцией.

Начиная с  $A = 7$  ( ${}^7\text{Li}$ ) ядра становятся достаточно велики, и аппроксимирующую формулу при-



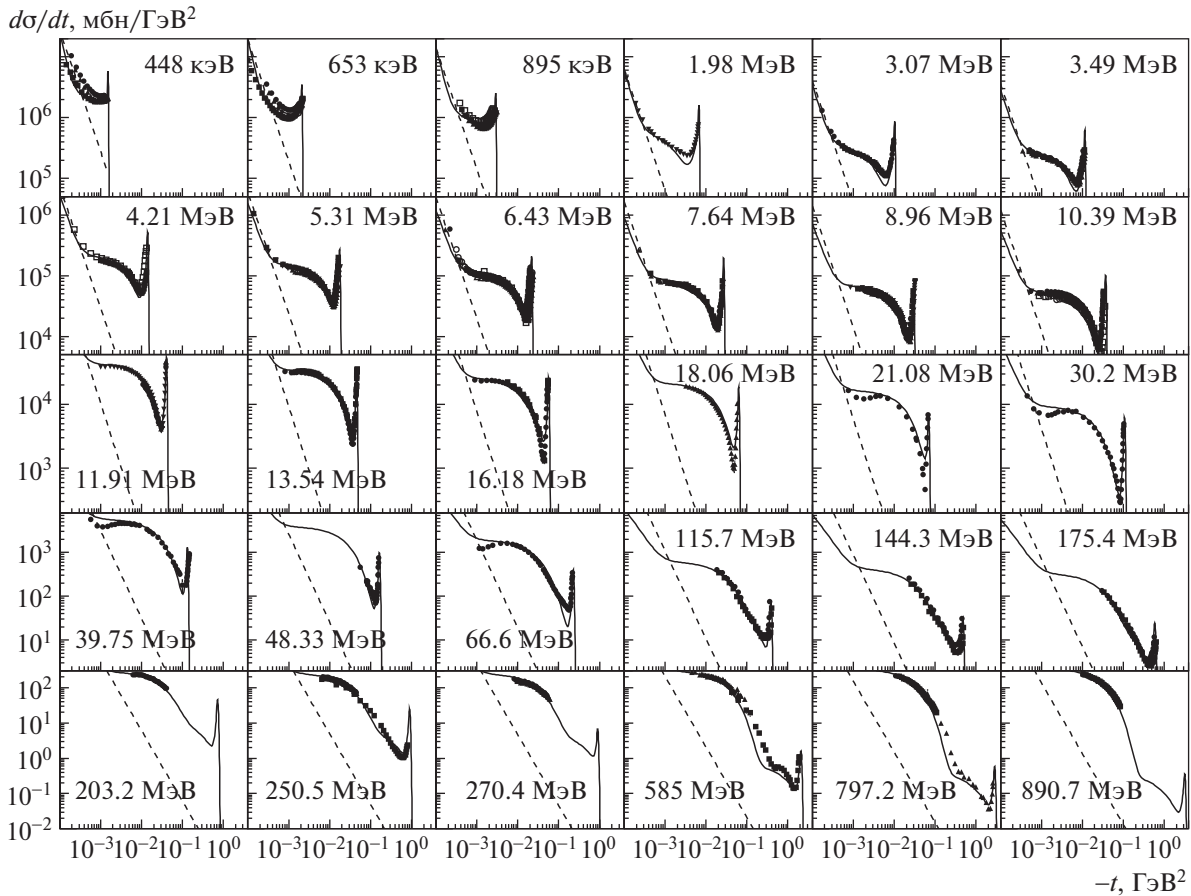


Рис. 2. Дифференциальные сечения упругого  $pd$ -рассеяния из работ [14–43], описанные формулой (17). Штриховая прямая — резерфордовское дифференциальное сечение (9).

ходится модифицировать:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_e}{dt} + \quad (18)$$

$$+ A_d(B_d - 2C_d t)e^{B_d t - C_d t^2} + 5A_m D t^4 e^{D t^5} +$$

$$+ 7A_s F t^6 e^{F t^7} + A_h H e^{H t},$$

где  $\frac{d\sigma_e}{dt} = A_e B_e \frac{e^{-B_e \sqrt{-t}}}{2\sqrt{-t}}$  и зависимости используемых параметров от импульса  $p$  налетающего протона в лабораторной системе в МэВ/с и атомного веса ядра-мишени  $A$  в атомных единицах массы приведены в табл. 3. В (18) первые два члена имеют тот же смысл, что и в (17), третий член ( $A_m, D$ ) описывает первый, а четвертый ( $A_s, F$ ) — второй дифракционные максимумы, и все старшие дифракционные максимумы сливаются в единую экспоненту, аппроксимирующуюся с помощью параметров  $A_h$  и  $H$ .

На рис. 5 в качестве примера показано использование эмпирической параметризации (18) для описания дифференциальных сечений упругого рассеяния протонов на свинце, измеренных

в работах [54, 77–107]. В левом верхнем углу пунктиром показан вклад квазиупругого рассеяния протона, рассчитанного по оптической модели, и видно, что при его учете подробное описание старших максимумов не имеет смысла. Аналогичные кривые приведены и для энергий больше 0.5 ГэВ, и там также видно, что старшие дифракционные максимумы лежат в тени квазиупругого рассеяния, имеющего собственные большие погрешности, превосходящие масштаб нерегулярностей в упругом рассеянии на большие углы. Таким образом, существенной оказывается аппроксимация только первого и второго дифракционного максимума.

Из рис. 5 видно, что при малых углах рассеяния упругое дифференциальное сечение совпадает с резерфордовской кривой. Однако при увеличении  $T_{LS}$  отличие вблизи  $\theta_{CM} = 180^\circ$  увеличивается. Наконец, при энергиях порядка десятков ГэВ в рассматриваемом диапазоне  $-t$  полное упругое дифференциальное сечение везде на 2–3 порядка превышает резерфордовское дифференциальное сечение. Это может быть связано с тем, что

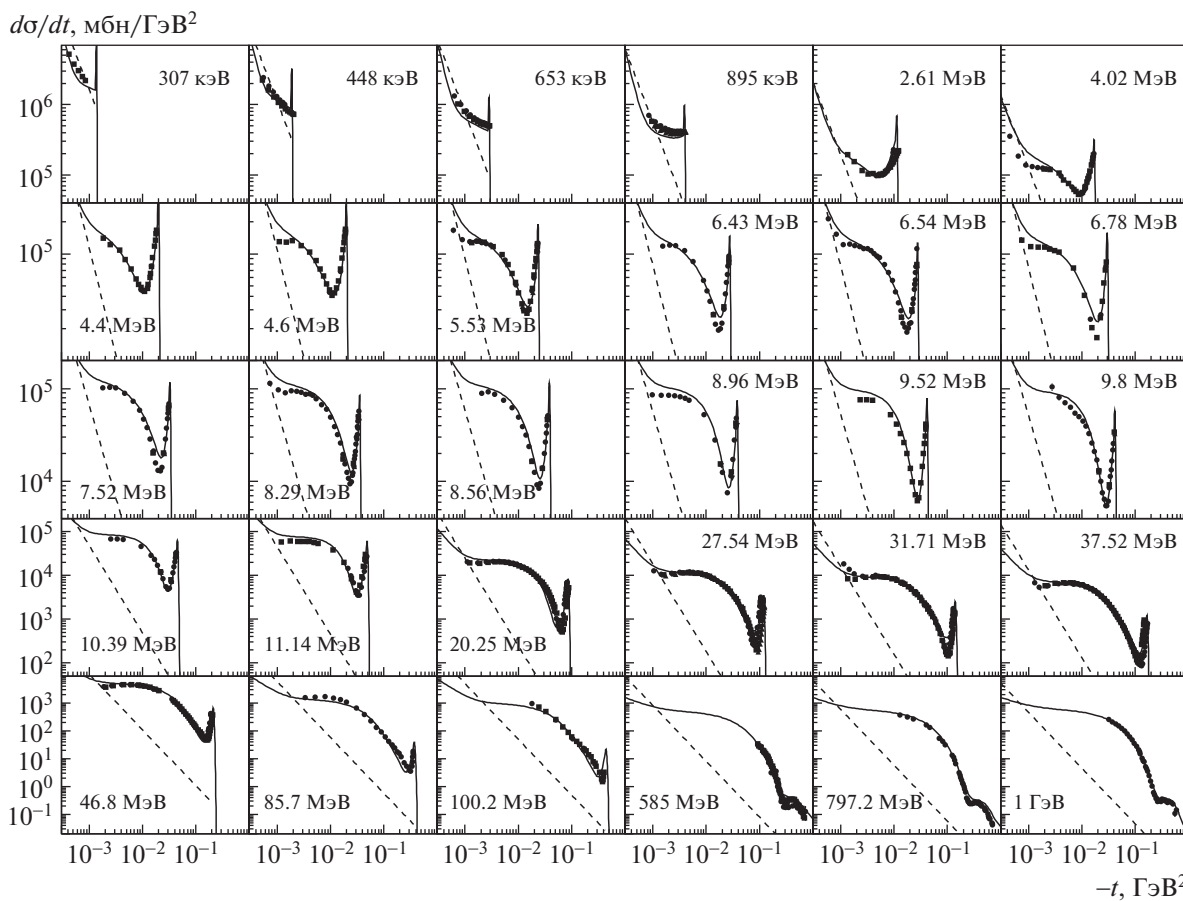


Рис. 3. Дифференциальные сечения упругого  $p^3\text{He}$ -рассеяния из работ [16, 24, 33, 40, 44–54], описанные формулой (17). Штриховая прямая — резерфордское дифференциальное сечение (9).

из-за большого заряда ядра свинца ( $Z = 82$ ) при небольших значениях кинетической энергии налетающего протона высокое значение кулоновского барьера подавляет ядерную амплитуду рассеяния, а при росте  $T_{LS}$  и преодолении кулоновского барьера сильная амплитуда рассеяния становится значительно больше резерфордской, особенно в области больших углов рассеяния.

Сравнивая формулу (18) с выражением (17) для легких ядер, можно отметить, что в ней исчез последний член, описывавший  $u$ -канальное рассеяние, но зато появился член  $A_s$ , аппроксимирующий второй дифракционный максимум. Это, однако, не означает, что при совсем низких энергиях (18) не описывает максимум в рассеянии назад. Оказывается, что параметров второго дифракционного максимума вполне достаточно, чтобы описать этот эффект, который значительно шире, чем узкий максимум ядерной глории на легких ядрах. Дело в том, что по мере снижения начальной энергии уменьшается и верхний предел аппроксимации (7), который соответствует рассеянию назад, и рассеяние назад перемещается в область второго дифракционного максимума. Примечательно то, что в отличие

от формулы (17), использовавшейся для легких ядер, теперь вклад электромагнитного рассеяния в полное сечение вообще не зависит от материала мишени и степенным образом уменьшается при росте величины начального импульса.

Найденная аппроксимирующая формула (18) была использована для всех ядер мишеней физических детекторов с  $A > 6$ , но рамки статьи не позволяют привести большое количество полученных аппроксимаций. В области легких ядер ( $A < 7$ ) аппроксимация (17) была проведена для сечений упругого рассеяния протонов на полном наборе изотопов:  $^1\text{H}$ ,  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ ,  $^6\text{Li}$ .

### 2.3. Аппроксимация дифференциального сечения упругого $pp$ -рассеяния в области низких энергий на основе теории прямых ядерных реакций

В процессе аппроксимации экспериментальных данных выяснилось, что для  $pp$ -рассеяния  $t/u$ -канальные амплитуды много меньше  $s$ -канальной амплитуды рассеяния, поэтому мы ими пренебрегли, хотя при очень больших энергиях, когда до-

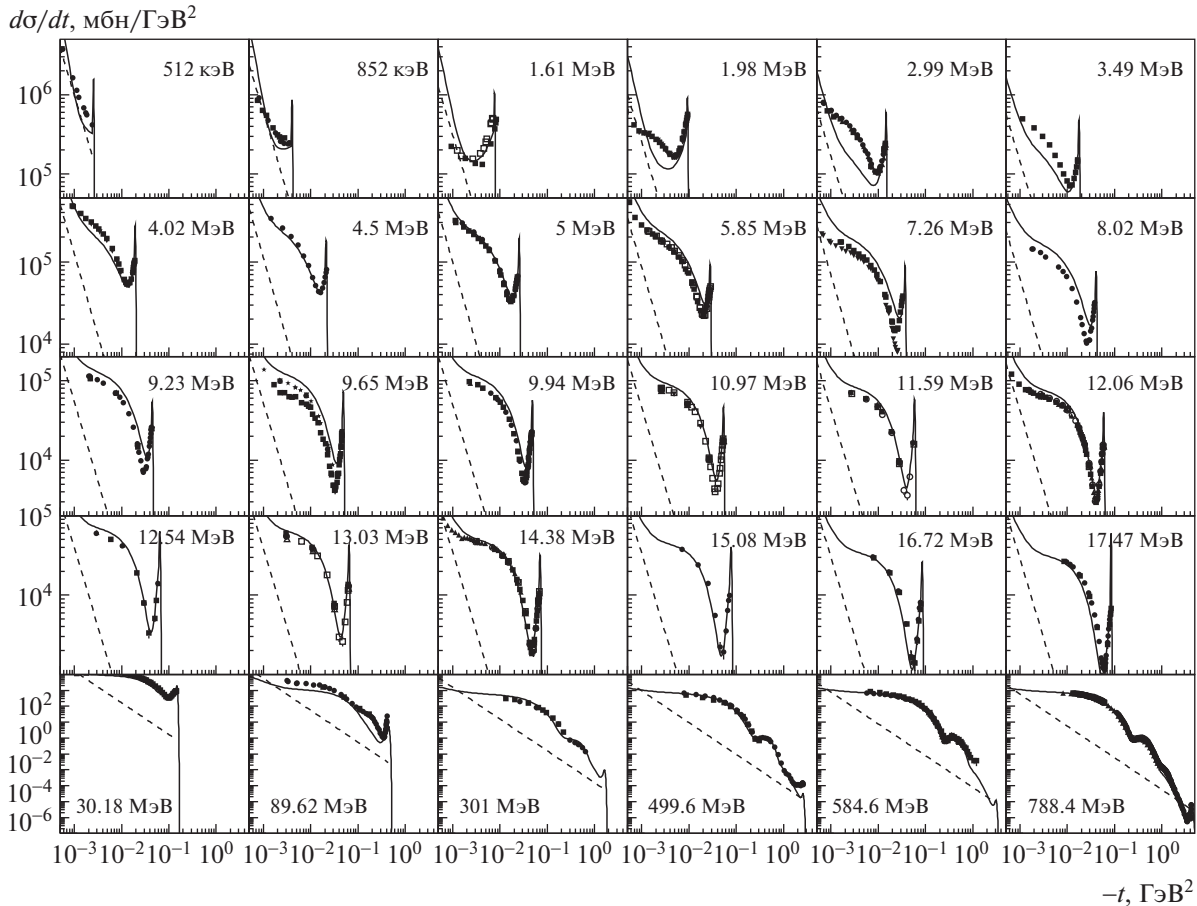


Рис. 4. Дифференциальные сечения упругого  $p\alpha$ -рассеяния из работ [16, 40, 50, 51, 55–74], описанные формулой (17). Штриховая прямая — резерфордское дифференциальное сечение (9).

стигаются значения  $-t \gg m_{\pi}^2$ , они и могут оказаться необходимыми. Мы сознательно не рассматривали этот диапазон энергий, поскольку для него существует устоявшаяся теория [108], использующая модель однобозонного обмена (ОБЕМ — One-Boson Exchange Model) [109], являющуюся обобщением хорошо известной модели однопионного обмена (ОРЕМ — One-Pion Exchange Model) [110]. Для аппроксимации отбирались данные экспериментов с кинетической энергией протонов в лабораторной системе не более 200 МэВ. В процессе аппроксимации дифференциальных сечений упругого  $pp$ -рассеяния было установлено, что получающееся значение параметра электронной экранировки  $\mu_s$  мало и в рассматриваемом диапазоне  $-t$  не оказывает влияния на получающуюся аппроксимацию, в связи с чем эффект электронной экранировки не учитывался.

Для рассеяния протонов с зарядом  $z = 1$  и спином  $S = \frac{1}{2}$  согласно (14) получается следующее выражение дифференциального сечения:

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega_{CM}} = \left( \frac{2\mu\alpha\hbar c}{t} \right)^2 \times \left( 1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\theta_{CM}}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \times \cos \left( \frac{\alpha}{\beta_{CM}^r} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \right) \right) \right). \quad (19)$$

Принимая во внимание (4), амплитуду резерфордского  $pp$ -рассеяния можно представить в виде

$$A_{Rtot}^{p-p} = A_R \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\theta_{CM}}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{\beta_{CM}^r} \ln \left( \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_{CM}}{2} \right) \right)}. \quad (20)$$

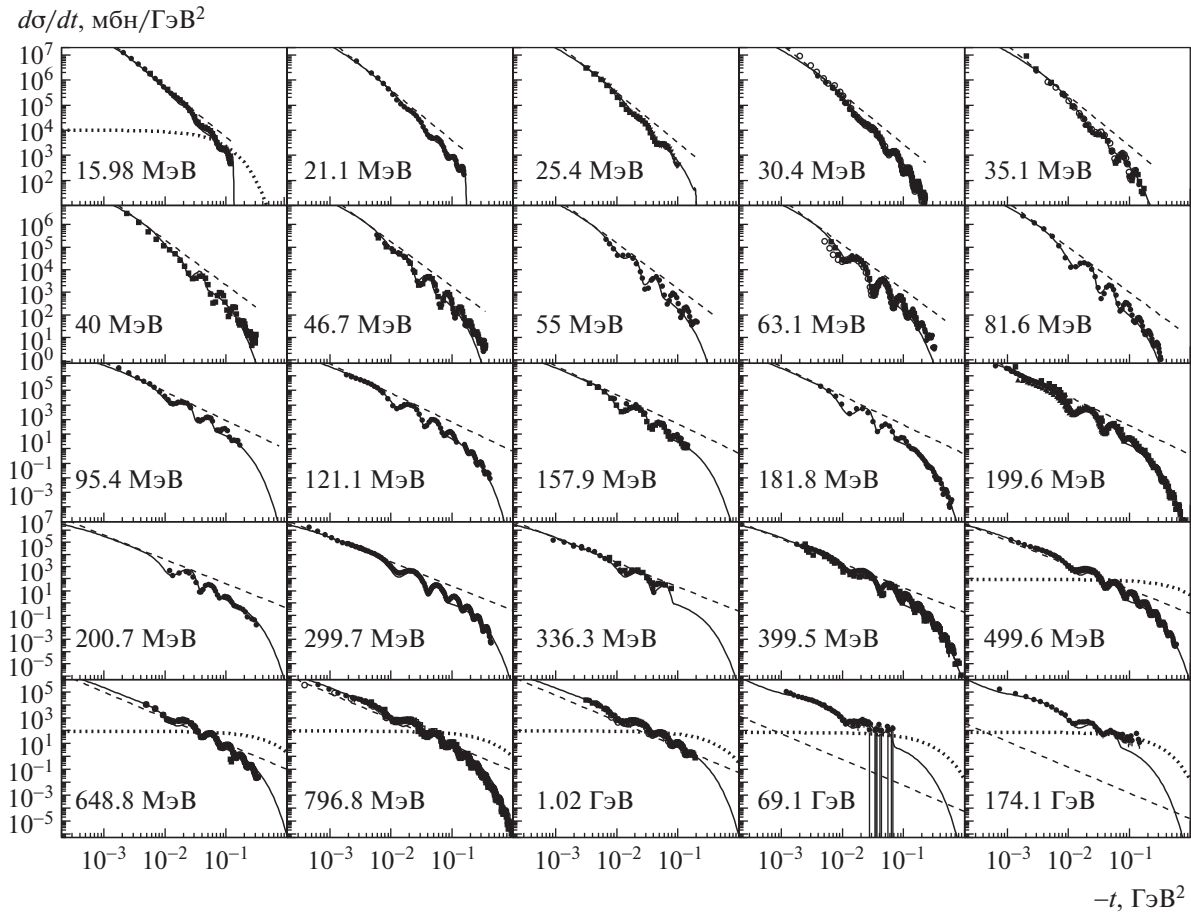


Рис. 5. Дифференциальные сечения упругого рассеяния протонов на ядрах свинца из работ [54, 77–107], описанные формулой (18). Штриховая прямая — резерфордское дифференциальное сечение (9). Точечная кривая — фоновое квазиупругое протон-нуклонное рассеяние для ядра свинца.

Тогда резерфордское сечение рассеяния протона на протоне будет определяться выражением (11), где в качестве амплитуды рассеяния следует использовать  $A_{Rtot}^{p-p}$ . Запишем действительную и мнимую части полной амплитуды упругого  $pp$ -рассеяния  $A$ , в которой интерферируют ее электромагнитная и сильная составляющие, в виде

$$\text{Re}(A) = A_{Rtot}^{p-p} + A_s \cdot \cos(\phi_s), \quad (21)$$

$$\text{Im}(A) = A_s \cdot \sin(\phi_s), \quad (22)$$

где в выражении (21) для  $\text{Re}(A)$  первый член соответствует амплитуде резерфордского рассеяния, а члены с  $A_s$  в (21), (22) обозначают вклад  $s$ -канальной амплитуды рассеяния.

Для упругого  $pp$ -рассеяния непрерывная по кинетической энергии налетающего протона аппроксимация дифференциального сечения на основе теории прямых ядерных реакций была выполнена с использованием двух параметрических зависимостей — амплитуды ( $A_s$ ) и фазы ( $\phi_s$ )  $s$ -канала. Их

зависимости от кинетической энергии протонов в системе центра масс  $T_{CM}$  показаны на рис. 6 и 7.

Безразмерная амплитуда  $s$ -канала, показанная на рис. 6, аппроксимировалась как

$$A_s = \frac{2670.5 \cdot \left(1 + \left(\frac{T_{CM}}{24.4}\right)^{0.957}\right)}{\left(1 + \frac{T_{CM}}{1.22}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{0.188}{T_{CM}}\right)^2\right)} \cdot \sqrt{P}, \quad (23)$$

где проницаемость кулоновского барьера  $P$ , входящая в фактор Гамова и снижающая сильную амплитуду при уменьшении  $T_{CM}$ , определяется формулой (2).

Фаза  $s$ -канала, изображенная на рис. 7, описывалась функцией

$$\phi_s = \frac{\pi \cdot \left(1 + \left(\frac{T_{CM}}{0.255}\right)^{9.2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{T_{CM}}{47.0}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{T_{CM}}{0.246}\right)^{9.262}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{T_{CM}}{62.3}\right)^3\right)}. \quad (24)$$

**Таблица 3.** Коэффициенты, использовавшиеся в эмпирической аппроксимации (18) дифференциального сечения упругого протон-ядерного рассеяния при  $A > 6$

$A_e$	$30000 + \frac{1000}{p^3}$	$d_1$	$\frac{0.002A^4}{1. + 7 \times 10^7(A - 6.83)^{-14}}$
$B_e$	$100 + 25 \ln(p)$	$d_2$	$\frac{2 \times 10^6}{A^6} + \frac{7.2}{A^{0.11}}$
$A_d$	$\frac{a_1}{1 + a_2 p^{-4}} + \frac{a_3}{p^4 + a_4 p^{-2}} + \frac{a_5}{p^5 + a_6 p^{-16}}$	$d_3$	$\frac{11A^3}{1 + 7 \times 10^{23} A^{-24}}$
$a_1$	$4.5A^{1.15}$	$d_4$	$\frac{100}{A^{3/2}}$
$a_2$	$0.06A^{0.6}$	$A_s$	$\frac{s_1 p^{-s_4}}{1 + s_5 p^{-12}} + \frac{s_2}{1 + s_3 p^{-6}}$
$a_3$	$\frac{0.6A}{1 + 2 \times 10^{15} A^{16}}$	$s_1$	$\frac{0.1 + 4.4 \times 10^{-5} A^2}{1 + 5 \times 10^5 A^{-4}}$
$a_4$	$\frac{0.17}{A + 9 \times 10^5 A^{-3} + 1.5 \times 10^{33} A^{-32}}$	$s_2$	$\frac{3.5 \times 10^{-4} A^2}{1 + 10^8 A^{-8}}$
$a_5$	$\frac{0.001 + 7 \times 10^{-11} A^5}{1 + 4.4 \times 10^{-11} A^5}$	$s_3$	$1.3 + 3 \times 10^5 A^{-4}$
$a_6$	$\frac{(2.2 \times 10^{-28} A^{10})^2 + 2 \times 10^{-29}}{1 + 2 \times 10^{-22} A^{12}}$	$s_4$	$\frac{500}{A^2 + 50} + 3$
$B_d$	$\frac{b_1 p^{-8} + b_5}{p + b_2 p^{-b_6}} + \frac{b_3}{1 + b_4 p^{-4}}$	$s_5$	$10^{-9} A^{-1} + (6 \times 10^{14} A^{-16})^4$
$b_1$	$\frac{400}{A^{12}} + 2 \times 10^{-22} A^9$	$F$	$f_1 p^{-8} + f_2 p^{-2} + \frac{f_3}{1 + 10 p^{-8}}$
$b_2$	$\frac{10^{-32} A^{12}}{1 + 5 \times 10^{22} A^{-14}}$	$f_1$	$0.4A^{3/2} + 3 \times 10^{-9} A^6$
$b_3$	$\frac{1000}{A^2} + 9.5A^{3/4}$	$f_2$	$5 \times 10^{-4} A^5$
$b_4$	$4 \times 10^{-6} A^{5/2} + \frac{10^{11}}{A^{16}}$	$f_3$	$0.002A^5$
$b_5$	$\frac{120/A + 0.002A^2}{1 + 2 \times 10^{14} A^{-16}}$	$A_h$	$\frac{r_1 p^{-4} + r_6/p}{1 + r_2 p^{-10}} + \frac{r_3 + r_4(\ln(p) - 5)^2}{1 + r_5 p^{-12}}$
$b_6$	$9 + 100/A$	$r_1$	$0.05 + 0.005A$
$C_d$	$\frac{c_1}{p^4 p^{-c_3} + c_2 p^{-4}}$	$r_2$	$7 \times 10^{-8} A^{-1/2}$
$c_1$	$0.002A^3 + \frac{3 \times 10^7}{A^6}$	$r_3$	$0.8A^{1/2}$
$c_2$	$7 \times 10^{-15} A^{11/2}$	$r_4$	$0.02A^{1/2}$
$c_3$	$\frac{9000}{A^4}$	$r_5$	$10^8 A^{-3}$
$A_m$	$A_m = \frac{g_1 p^{-4}}{p^{g_2} + g_3 p^{-12}} + g_4$	$r_6$	$\frac{3 \times 10^{32}}{A^{32} + 10^{32}}$
$g_1$	$\frac{0.0011A^{3/2}}{1 + 3 \times 10^{34} A^{-36}}$	$H$	$\frac{24}{1 + h_1/p} + \frac{h_2 p^4}{1 + h_3 p^5}$

Таблица 3. Окончание

$g_2$	$10^{-5}A^2 + 2 \times 10^{14}A^{-16}$	$h_1$	$20A^{-1/2}$
$g_3$	$\frac{1.2 \times 10^{-11}A^2}{1 + 1.5 \times 10^{19}A^{-12}}$	$h_2$	$\frac{7000A}{A^{1/2} + 1}$
$g_4$	$\frac{0.016A^{3/2}}{1 + 5 \times 10^{16}A^{-16}}$	$h_3$	$\frac{900A^{1/2}}{1 + 500A^3}$
$D$	$d_1p^{-d_2} + d_3p^{-d_4}$		

Погрешности данных на рис. 7, как и на рис. 6, не видны, так как находятся в пределах размера маркеров. Кинетическая энергия в системе центра масс  $T_{CM}$  измеряется в МэВ. При ее стремлении к нулю фаза становится полностью деструктивной ( $\phi_s = \pi$ ), что отчетливо проявляется в первой точке ( $T_{LS} = 499.2$  кэВ), а при больших энергиях — полностью конструктивной ( $\phi_s = 0$ ). Как видно из рис. 7, точки с  $T_{LS} = 14.16$  и  $50.06$  МэВ недостаточно хорошо описываются функцией (24), хотя это и не сказывается на качестве итоговой аппроксимации, изображенной на рис. 8.

Гипотеза деструктивной интерференции при малых энергиях не оказывает большого влияния на упругие дифференциальные сечения, поскольку из-за фактора Гамова сильная амплитуда  $A_s$  экспоненциально падает при уменьшении энергии. Тенденция в последней точке по энергии ( $T_{LS} = 190$  МэВ) к уменьшению фазы позволила предположить, что при больших энергиях можно ожидать стремления фазы к конструктивному значению, однако, поскольку для столь больших  $T_{LS}$  надо также использовать  $t/u$ -канальные амплитуды рассеяния, этот вопрос требует дальнейшего исследования при необходимости продления аппроксимации в область больших энергий.

На рис. 8 аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния (сплошная кривая), полученная по формулам (10) и (21)–(22), в которых использованы параметрические зависимости (23) и (24) — амплитуда и фаза  $s$ -канала, сравнивается с доминирующим при малых  $-t$  резерфордовским рассеянием (штриховая кривая). Большая часть экспериментальных данных работ [111–119] взята из базы ядерных данных EXFOR [11]. Погрешности экспериментальных точек не превышают размера изображающих их маркеров. На рис. 8 переменная  $-t$  изменяется от 0 до величины  $|t_{max}|/2$  из-за того, что рассеивающиеся частицы тождественные, а значит, распределение  $\frac{d\sigma}{dt}$  симметрично относительно этой величины, соответствующей согласно (5) углу рассеяния  $\theta_{CM} = 90^\circ$  в системе центра масс.

Эмпирическая аппроксимация (16) углового распределения упругого  $pp$ -рассеяния показана на рис. 8 точечной кривой. Ее преимуществом является то, что она выполнена в широком диапазоне энергий. Однако, как видно из рис. 8, в рассматриваемой области небольших кинетических энергий налетающего протона разработанная аппроксимация на основе ТПР обеспечивает существенно лучшее описание экспериментальных данных (при кинетической энергии налетающего протона  $T_{LS} = 499.2$  кэВ, а также больше 10 МэВ).

При уменьшении кинетической энергии налетающих протонов ниже 0.5 МэВ (наименьшая кинетическая энергия, экспериментальные дифференциальные сечения упругого  $pp$ -рассеяния для которой имеются в базе данных EXFOR, составляет 499.2 кэВ) отличие полученной аппроксимации дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния от резерфордовской кривой сокращается. Например, при 100 кэВ наибольшее отличие наблюдается при  $\theta_{CM} = 90^\circ$  — максимальном угле рассеяния тождественных частиц — и составляет всего 2%, а при  $\theta_{CM} < 90^\circ$  — еще меньше, т. е. является пренебрежимо малым.

Отметим, что обычно изучается только сильное взаимодействие протонов, а электромагнитное считается тривиальным фактором, который иногда даже вычитается из экспериментальных значений сечений. Кроме того, долгое время общепринятым являлось мнение об изотропном сильном упругом рассеянии при малых энергиях. На рис. 8 это выражается практически постоянной величиной  $\frac{d\sigma}{dt}$  при больших величинах  $-t$ , где сильная амплитуда доминирует. В рамках ТПР это передается не зависящей от величины  $t$   $s$ -канальной амплитудой  $A_s$  (диаграмма изотропного распада компаунд-ядра), а в потенциальных моделях типа ОБЕМ (One-Boson Exchange Model) [109] —  $S$ -волновым рассеянием. Существенным эффектом является то, что при малых кинетических энергиях вместо того, чтобы складываться с резерфордовской амплитудой (20), сильная амплитуда  $A_s$  вычитается из нее (деструктивная фаза  $\phi_s = \pi$  при малых  $T_{CM}$  на рис. 7),

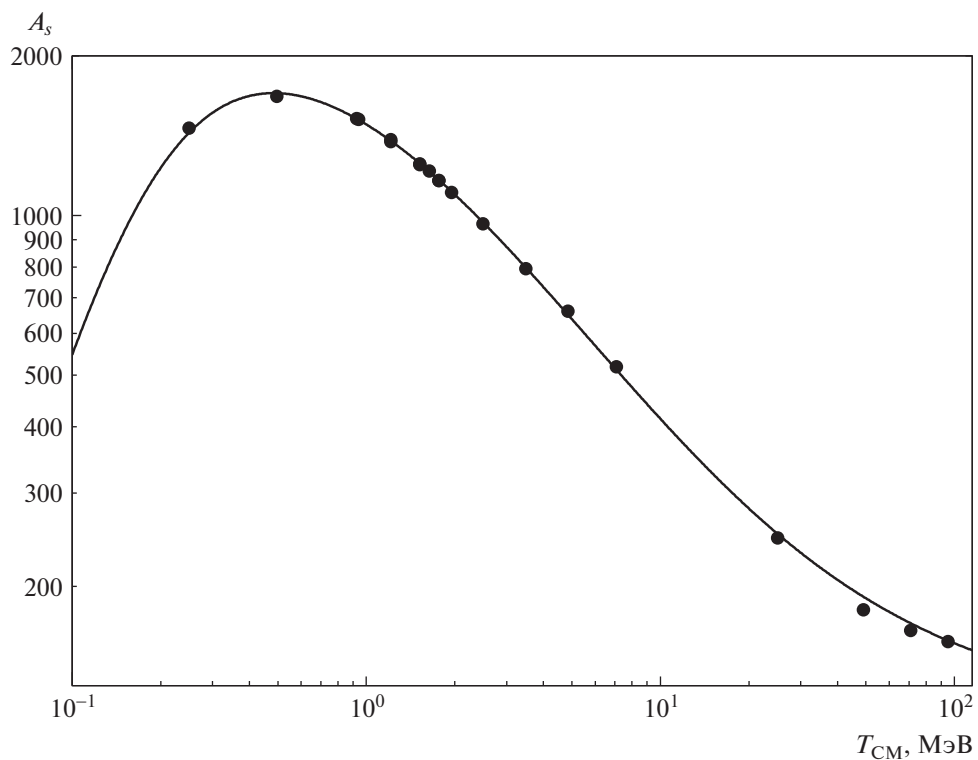


Рис. 6. Зависимость амплитуды  $s$ -канала  $A_s$  от кинетической энергии  $T_{CM}$ .

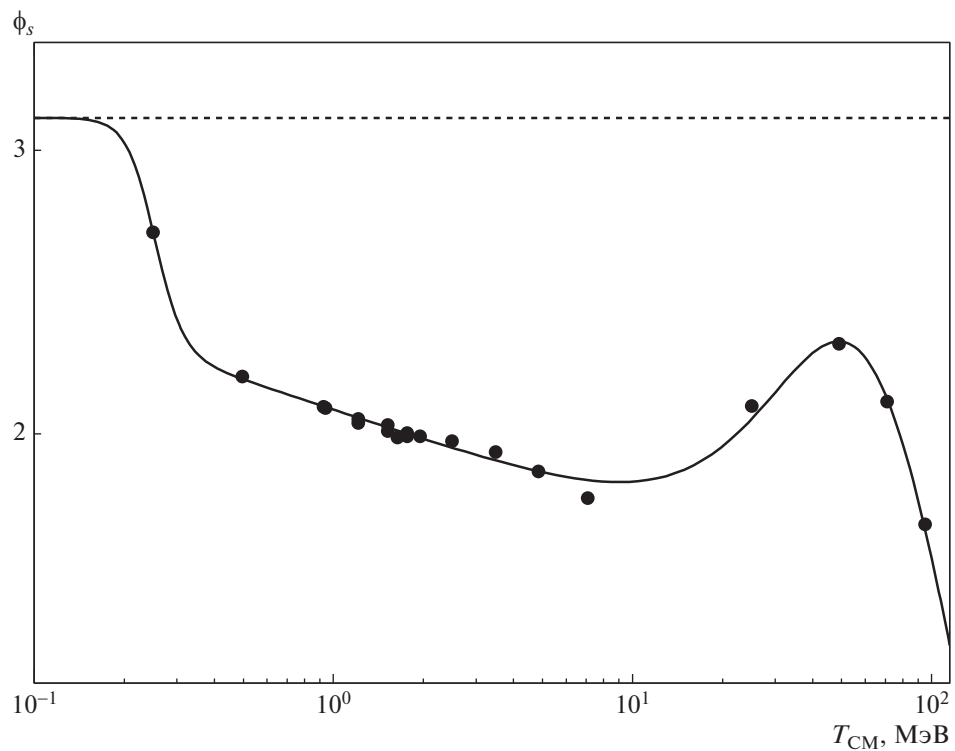
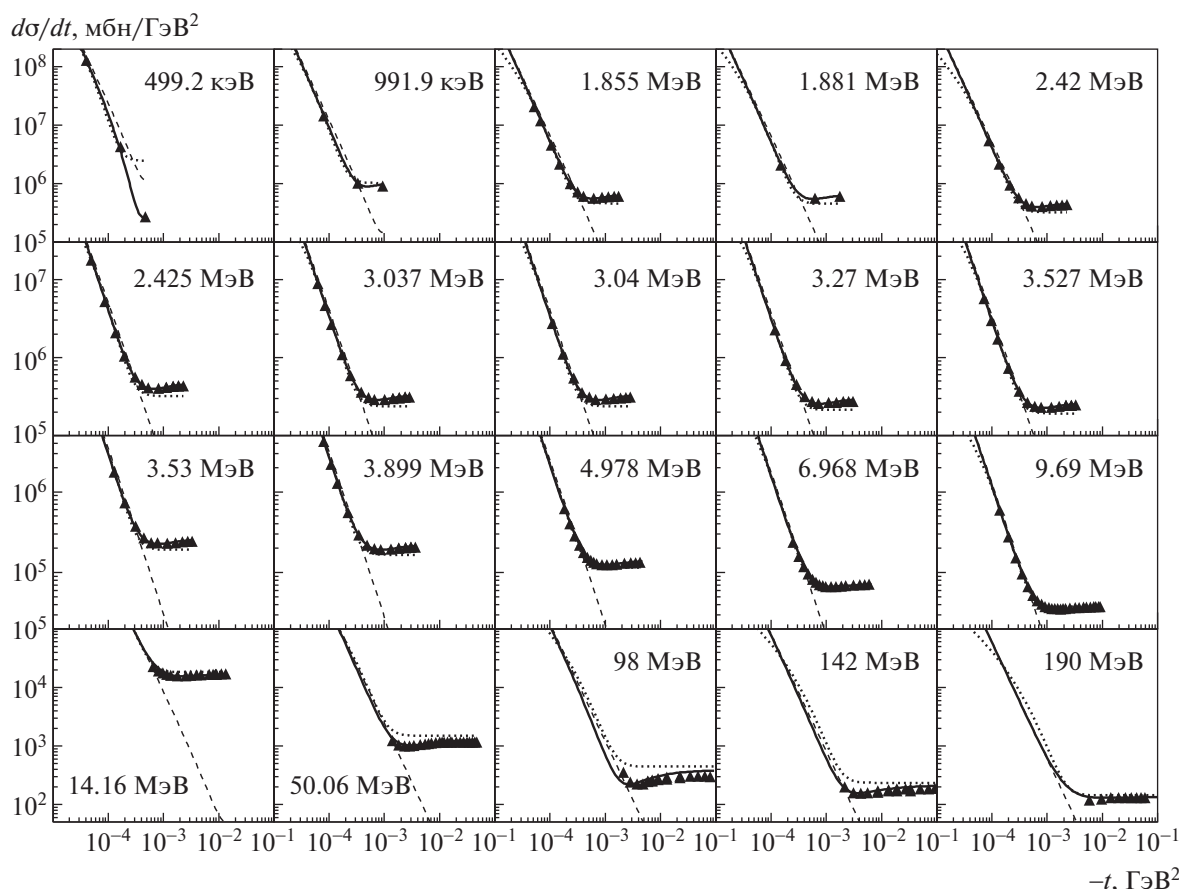


Рис. 7. Зависимость фазы  $s$ -канала  $\phi_s$  от кинетической энергии  $T_{CM}$ .



**Рис. 8.** Аппроксимация в области низких энергий экспериментальных дифференциальных сечений упругого  $pp$ -рассеяния из работ [111–119] на основе теории прямых ядерных реакций (сплошная кривая). Штриховая прямая — резерфордское дифференциальное сечение (11), точечная кривая — эмпирическая аппроксимация (16).

что доказывает несостоятельность независимого моделирования многократного резерфордского и сильного упругого рассеяния в области низких энергий.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате обработки большого количества экспериментальных данных в широком диапазоне энергий разработаны непрерывная по энергии эмпирическая аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния, а также непрерывная по энергии налетающего протона и атомному весу ядра-мишени эмпирическая аппроксимация протон-ядерного рассеяния. В области малых энергий получена аппроксимация дифференциального сечения упругого  $pp$ -рассеяния на основе теории прямых ядерных реакций, а также приведено сравнение качества описания экспериментальных данных с помощью нее и разработанной эмпирической аппроксимации. Показано, что отличие угловых распределений упругих сечений, являющихся результатом интерференции электромагнитной и

ядерной амплитуд рассеяния, от дифференциального сечения стандартного резерфордского рассеяния может быть существенно. Особенностью разработанных эмпирических аппроксимаций является то, что они очень легко интегрируются и могут быть использованы для вычисления полных упругих сечений, а простота фитирующих функций позволяет с высокой производительностью разыгрывать полученные угловые распределения в процессе численного моделирования.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. V. Ivanov, J. R. Vignote, R. Alvarez-Rodriguez, and J. M. Udias, Nucl. Theory **30**, 116 (2011).
2. I. S. Shapiro, Nucl. Phys. **28**, 244 (1961).
3. I. S. Shapiro, V. M. Kolybasov, and G. R. Augst, Nucl. Phys. **61**, 353 (1965).
4. P. Zyla *et al.* (Particle Data Group), PTEP **2020**, 083C01 (2020).
5. M. V. Kosov and D. I. Savin, Phys. At. Nucl. **81**, 656 (2018).
6. G. Gamow, Z. Phys. A **51**, 204 (1928).



7. W. A. Fowler, G. R. Caughlan, and B. A. Zimmerman, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **5**, 525 (1967).
8. M. Boschini, C. Consolandi, M. Gervasi, S. Giani, D. Grandi, V. Ivanchenko, S. Pensotti, P. G. Rancoita, and M. Tacconi, in *Proceedings of the 12th ICATPP Conference* (2010).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика* (Наука, Москва, 1988).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, Москва, 1989).
11. N. Otuka, E. Dupont, V. Semkova, B. Pritychenko, A. Blokhin, M. Aikawa, S. Babykina, M. Bossant, G. Chen, S. Dunaeva, *et al.*, *Nucl. Data Sheets* **120**, 272 (2014).
12. P. Berthet, R. Frascaia, M. P. Combes, C. F. Perdrisat, B. Tatischeff, J. Banaigs, J. Berger, A. Codino, J. Duflo, L. Goldzahl, *et al.*, *J. Phys. G* **8**, L111 (1982).
13. P. V. Degtyarenko, M. V. Kossov, and H.-P. Wellisch, *Eur. Phys. J. A* **8**, 217 (2000).
14. J. C. Allred, A. H. Armstrong, R. O. Bondelid, and L. Rosen, *Phys. Rev.* **88**, 433 (1952).
15. V. I. Grancev, V. I. Konfederatenko, V. A. Kornilov, O. F. Nemets, R. G. Ofengenden, B. A. Rudenko, M. V. Sokolov, and B. G. Struzhko, *Ukr. Fiz. Zh.* **28**, 506 (1983).
16. E. T. Boschitz, W. K. Roberts, J. S. Vincent, M. Blecher, K. Gotow, P. C. Gugelot, C. F. Perdrisat, L. W. Swenson, and J. R. Priest, *Phys. Rev. C* **6**, 457 (1972).
17. E. Huttel, W. Arnold, H. Berg, H. H. Krause, J. Ulbricht, and G. Clausnitzer, *Nucl. Phys. A* **406**, 435 (1983).
18. C. R. Brune, W. H. Geist, H. J. Karwowski, E. J. Ludwig, K. D. Veal, M. H. Wood, A. Kievsky, S. Rosati, and M. Viviani, *Phys. Rev. C* **63**, 044013 (2001).
19. M. H. Wood, C. R. Brune, B. M. Fisher, H. J. Karwowski, D. S. Leonard, E. J. Ludwig, A. Kievsky, S. Rosati, and M. Viviani, *Phys. Rev. C* **65**, 034002 (2002).
20. D. C. Kocher and T. B. Clegg, *Nucl. Phys. A* **132**, 455 (1969).
21. F. Lahlou, R. J. Slobodrian, P. Bricault, S. S. Dasgupta, R. Roy, and C. Rioux, *J. Phys. France* **41**, 485 (1980).
22. A. S. Wilson, M. C. Taylor, J. C. Legg, and G. C. Phillips, *Nucl. Phys. A* **130**, 624 (1969).
23. K. Sagara, H. Oguri, S. Shimizu, K. Maeda, H. Nakamura, T. Nakashima, and S. Morinobu, *Phys. Rev. C* **50**, 576 (1994).
24. J. E. Brolley, T. M. Putnam, L. Rosen, and L. Stewart, *Phys. Rev.* **117**, 1307 (1960).
25. S. Kistryn, J. Lang, J. Liechti, H. Luscher, T. Maier, R. Muller, M. Simonius, J. Smyrski, J. Sromicki, and W. Haerberli, *Phys. Lett. B* **219**, 58 (1989).
26. R. Grötzschel, B. Kühn, H. Kumpf, K. Möller, and J. Mösner, *Nucl. Phys. A* **174**, 301 (1971).
27. A. E. Borzakovskij and S. V. Romanovskij, *Ukr. Fiz. Zh.* **22**, 2056 (1977).
28. W. Grüebler, V. König, P. A. Schmelzbach, B. Jenny, H. R. Bürgi, P. Doleschall, G. Heidenreich, H. Roser, F. Seiler, and W. Reichart, *Phys. Lett. B* **74**, 173 (1978).
29. G. Rauprich, H. J. Hähn, M. Karus, P. Nießen, K. R. Nyga, H. Oswald, L. Sydow, H. P. gen Schieck, and Y. Koike, *Few-Body Syst.* **5**, 67 (1988).
30. M. Sawada, S. Seki, K. Furuno, Y. Tagishi, Y. Nagashima, J. Schimizu, M. Ishikawa, T. Sugiyama, L. S. Chuang, W. Grüebler, *et al.*, *Phys. Rev. C* **27**, 1932 (1983).
31. R. O. Kerman and R. Nilson, *Phys. Rev.* **107**, 200 (1957).
32. D. O. Caldwell and J. R. Richardson, *Phys. Rev.* **98**, 28 (1955).
33. C. C. Kim, S. M. Bunch, D. W. Devins, and H. H. Forster, *Nucl. Phys.* **58**, 32 (1964).
34. J. H. Williams and M. K. Brussel, *Phys. Rev.* **110**, 136 (1958).
35. H. Shimizu, K. Imai, N. Tamura, K. Nisimura, K. Hatanaka, T. Saito, Y. Koike, and Y. Taniguchi, *Nucl. Phys. A* **382**, 242 (1982).
36. K. Ermisch, H. R. Amir-Ahmadi, A. M. van den Berg, R. Castelijns, B. Davids, E. Epelbaum, E. van Garderen, W. Glöckle, J. Golak, M. N. Harakeh, *et al.*, *Phys. Rev. C* **68**, 051001 (2003).
37. H. Rohdjeß, W. Scobel, H. O. Meyer, P. V. Pancella, S. F. Pate, M. A. Pickar, R. E. Pollock, B. v. Przewoski, T. Rinckel, F. Sperisen, *et al.*, *Phys. Rev. C* **57**, 2111 (1998).
38. J. Golak, W. Glöckle, H. Kamada, H. Witala, R. Skibiński, and A. Nogga, *Phys. Rev. C* **65**, 044002 (2002).
39. H. Sakai, K. Sekiguchi, H. Witala, W. Glöckle, M. Hatano, H. Kamada, H. Kato, Y. Maeda, A. Nogga, T. Ohnishi, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5288 (2000).
40. J. Fain, J. Gardes, A. Lefort, L. Meritet, J. F. Pauty, G. Peynet, M. Querrou, F. Vazeille, and B. Ille, *Nucl. Phys. A* **262**, 413 (1976).
41. G. N. Velichko *et al.*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **47**, 755 (1988).
42. F. Irom, G. J. Igo, J. B. McClelland, C. A. Whitten, Jr., and M. Bleszynski, *Phys. Rev. C* **28**, 2380 (1983).
43. E. Winkelmann, P. R. Bevington, M. W. McNaughton, H. B. Willard, F. H. Cverna, E. P. Chamberlin, and N. S. P. King, *Phys. Rev. C* **21**, 2535 (1980).
44. H. Berg, W. Arnold, E. Huttel, H. H. Krause, J. Ulbricht, and G. Clausnitzer, *Nucl. Phys. A* **334**, 21 (1980).
45. T. A. Tombrello, C. M. Jones, G. C. Phillips, and J. L. Weil, *Nucl. Phys.* **39**, 541 (1962).
46. D. G. McDonald, W. Haerberli, and L. W. Morrow, *Phys. Rev. B* **133**, 1178 (1964).
47. T. B. Clegg, A. C. L. Barnard, J. B. Swint, and J. L. Weil, *Nucl. Phys.* **50**, 621 (1964).
48. R. H. Lovberg, *Phys. Rev.* **103**, 1393 (1956).

49. B. T. Murdoch, D. K. Hasell, A. M. Sourkes, W. T. H. van Oers, P. J. T. Verheijen, and R. E. Brown, *Phys. Rev. C* **29**, 2001 (1984).
50. L. G. Votta, P. G. Roos, N. S. Chant, and R. Woody, *Phys. Rev. C* **10**, 520 (1974).
51. J. S. Wesick, Tech. Rep. PhD. Thesis, University of Maryland (1983).
52. N. P. Goldstein, A. Held, and D. G. Stairs, *Can. J. Phys.* **48**, 2629 (1970).
53. M. Geso, A. Azizi, K. Amos, P. K. Deb, G. Igo, K. Jones, J. B. Mclelland, G. Westen, R. Whitney, and C. Whitten, *Phys. Rev. C* **65**, 034005 (2002).
54. G. D. Alkhasov, S. L. Belostotsky, E. A. Damas-kinsky, Y. V. Dotsenko, O. A. Domchenkov, N. P. Kuropatkin, D. Legrand, V. N. Nikulin, O. E. Prokof'ev, M. A. Shuvaev, *et al.*, *Phys. Lett. B* **85**, 43 (1979).
55. A. V. Dobrovolsky *et al.*, Tech. Rep. LENI-88-1454, LENI (1988).
56. L. Kraus and I. Linck, *Nucl. Phys. A* **224**, 45 (1974).
57. A. C. L. Barnard, C. M. Jones, and J. L. Weil, *Nucl. Phys.* **50**, 604 (1964).
58. P. D. Miller and G. C. Phillips, *Phys. Rev.* **112**, 2043 (1958).
59. W. E. Kreger, W. Jentschke, and P. G. Kruger, *Phys. Rev.* **93**, 837 (1954).
60. T. M. Putnam, J. E. Brolley, Jr., and L. Rosen, *Phys. Rev.* **104**, 1303 (1956).
61. J. Sanada, *J. Phys. Soc. Jap.* **14**, 1463 (1959).
62. R. Freemantle, T. Grotdal, W. Gibson, R. McKeague, D. Prowse, and J. Rotblat, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **45**, 1090 (1954).
63. B. Cork and W. Hartsough, *Phys. Rev.* **96**, 1267 (1954).
64. J. H. Williams and S. W. Rasmussen, *Phys. Rev.* **98**, 56 (1955).
65. D. C. Dodder, G. M. Hale, N. Jarmie, J. H. Jett, P. W. Keaton, Jr., R. A. Nisley, and K. Witte, *Phys. Rev. C* **15**, 518 (1977).
66. K. W. Brockman, *Phys. Rev.* **108**, 1000 (1957).
67. D. Garreta, J. Sura, and A. Tarrats, *Nucl. Phys.* **132**, 204 (1969).
68. S. M. Bunch, H. H. Forster, and C. C. Kim, *Nucl. Phys.* **53**, 241 (1964).
69. M. Yoshimura, M. Nakamura, H. Akimune, I. Daito, T. Inomata, M. Itoh, M. Kawabata, T. Noro, H. Sakaguchi, H. Takeda, *et al.*, *Phys. Rev. C* **63**, 034618 (2001).
70. O. Chamberlain, E. Segrè, R. D. Tripp, C. Wiegand, and T. Ypsilantis, *Phys. Rev.* **102**, 1659 (1956).
71. G. A. Moss, L. G. Greeniaus, J. M. Cameron, D. A. Hutcheon, R. L. Liljestrang, C. A. Miller, G. Roy, B. K. S. Koene, W. T. H. van Oers, A. W. Stetz, *et al.*, *Phys. Rev. C* **21**, 1932 (1980).
72. S. M. Sterbenz, D. Dehnhard, M. K. Jones, S. K. Nanda, C. E. Parman, Y.-F. Yen, K. W. Jones, and C. L. Morris, *Phys. Rev. C* **45**, 2578 (1992).
73. H. Courant, K. Einsweiler, T. Joyce, H. Kagan, Y. I. Makdisi, M. L. Marshak, B. Mossberg, E. A. Peterson, K. Ruddick, T. Walsh, *et al.*, *Phys. Rev. C* **19**, 104 (1979).
74. J. Fong, T. S. Bauer, G. J. Igo, G. Pauletta, R. Ridge, R. Rolfe, J. Soukup, C. A. Whitten, Jr., G. W. Hoffmann, *et al.*, *Phys. Lett. B* **78**, 205 (1978).
75. D. H. Madison and W. N. Shelton, *Phys. Rev. A* **7**, 499 (1973).
76. R. J. Glauber, in *Lectures in Theoretical Physics*, Ed. by W. E. Brittin *et al.* (Intersci. Publ., New York, 1959), Vol. 1, p. 315.
77. W. Makofske, G. W. Greenlees, H. S. Liers, and G. J. Pyle, *Phys. Rev. C* **5**, 780 (1972).
78. R. L. Varner, W. J. Thompson, T. L. McAbee, E. J. Ludwig, and T. B. Clegg, *Phys. Rep.* **201**, 57 (1991).
79. W. T. H. van Oers, H. Haw, N. E. Davison, A. Ingemarsson, B. Fagerström, and G. Tibell, *Phys. Rev. C* **10**, 307 (1974).
80. B. W. Ridley and J. F. Turner, *Nucl. Phys.* **58**, 497 (1964).
81. D. W. Devins, H. H. Forster, and G. G. Gigas, *Nucl. Phys.* **35**, 617 (1962).
82. W. T. Wagner, G. M. Crawley, G. R. Hammerstein, and H. McManus, *Phys. Rev. C* **12**, 757 (1975).
83. J. E. Finck, G. M. Crawley, J. A. Nolen, Jr., and R. T. Kouzes, *Nucl. Phys. A* **407**, 163 (1983).
84. T. Stovall and N. M. Hintz, *Phys. Rev. B* **135**, B330 (1964).
85. L. N. Blumberg, E. E. Gross, A. V. D. Woude, A. Zucker, and R. H. Bassel, *Phys. Rev.* **147**, 812 (1966).
86. K. Yagi, T. Ishimatsu, Y. Ishizaki, and Y. Saji, *Nucl. Phys. A* **121**, 161 (1968).
87. C. B. Fulmer, J. B. Ball, A. Scott, and M. L. Whiten, *Phys. Rev.* **181**, 1565 (1969).
88. H. Sakaguchi, M. Nakamura, K. Hatanaka, A. Goto, T. Noro, F. Ohtani, H. Sakamoto, H. Ogawa, and S. Kobayashi, *Phys. Rev. C* **26**, 944 (1982).
89. H. Sakaguchi, M. Nakamura, K. Hatanaka, T. Noro, F. Ohtani, H. Sakamoto, H. Ogawa, and S. Kobayashi, *Phys. Lett. B* **99**, 92 (1981).
90. A. Nadasen, P. Schwandt, P. P. Singh, W. W. Jacobs, A. D. Bacher, P. T. Debevec, M. D. Kaitchuck, and J. T. Meek, *Phys. Rev. C* **23**, 1023 (1981).
91. G. Gerstein, J. Niederer, and K. Strauch, *Phys. Rev.* **108**, 427 (1957).
92. V. Comparat, R. Frascaria, N. Marty, M. Morlet, and A. Willis, *Nucl. Phys. A* **221**, 403 (1974).
93. D. A. Hutcheon, W. C. Olsen, H. S. Sherif, R. Dymarz, J. M. Cameron, J. Johansson, P. Kitching, P. R. Liljestrang, W. J. McDonald, C. A. Miller, *et al.*, *Nucl. Phys. A* **483**, 429 (1988).
94. L. Lee, T. E. Drake, S. S. M. Wong, D. Frekers, R. E. Azuma, L. Buchmann, A. Galindo-Uribarri, J. D. King, R. Schubank, R. Abegg, *et al.*, *Phys. Lett. B* **205**, 219 (1988).

95. D. K. McDaniels, J. R. Tinsley, J. Lisantti, D. M. Drake, I. Bergqvist, L. W. Swenson, F. E. Bertrand, E. E. Gross, D. J. Horen, T. P. Sjoreen, *et al.*, Phys. Rev. C **33**, 1943 (1986).
96. C. Djalali, N. Marty, M. Morlet, and A. Willis, Nucl. Phys. A **380**, 42 (1982).
97. F. E. Bertrand, E. E. Gross, D. J. Horen, R. O. Sayer, T. P. Sjoreen, D. K. McDaniels, J. Lisantti, J. R. Tinsley, L. W. Swenson, J. B. McClelland, *et al.*, Phys. Rev. C **34**, 45 (1986).
98. R. E. Richardson, W. P. Ball, C. E. Leith, Jr., and B. J. Moyer, Phys. Rev. **86**, 29 (1952).
99. A. M. Mack, N. M. Hintz, D. Cook, M. A. Franey, J. Amann, M. Barlett, G. W. Hoffmann, G. Pauletta, D. Ciskowski, and M. Purcell, Phys. Rev. C **52**, 291 (1995).
100. G. W. Hoffmann, L. Ray, M. L. Barlett, R. Fergerson, J. McGill, E. C. Milner, K. K. Seth, D. Barlow, M. Bosko, S. Iverson, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **47**, 1436 (1981).
101. G. W. Hoffmann, L. Ray, M. Barlett, J. McGill, G. S. Adams, G. J. Igo, F. Irom, A. T. M. Wang, C. A. Whitten, Jr., *et al.*, Phys. Rev. C **21**, 1488 (1980).
102. G. S. Blanpied, B. G. Ritchie, M. L. Barlett, G. W. Hoffmann, J. A. McGill, M. A. Franey, and M. Gazzaly, Phys. Rev. C **32**, 2152 (1985).
103. N. M. Hintz, D. Cook, M. Gazzaly, M. A. Franey, M. L. Barlett, G. W. Hoffmann, R. Fergerson, J. McGill, G. Pauletta, R. L. Boudrie, *et al.*, Phys. Rev. C **37**, 692 (1988).
104. M. M. Gazzaly, N. M. Hintz, G. S. Kyle, R. K. Owen, G. W. Hoffmann, M. Barlett, and G. Blanpied, Phys. Rev. C **25**, 408 (1982).
105. G. D. Alkhozov *et al.*, Sov. J. Nucl. Phys. **26**, 357 (1977).
106. R. Bertini, R. Beurtey, F. Brochard, G. Bruge, H. Catz, A. Chaumeaux, J. M. Durand, J. C. Faivre, J. M. Fontaine, D. Garreta, *et al.*, Phys. Lett. B **45**, 119 (1973).
107. A. Schiz, L. A. Fajardo, R. Majka, J. N. Marx, P. Némethy, L. Rosselet, J. Sandweiss, A. J. Slaughter, C. Ankenbrandt, M. Atac, *et al.*, Phys. Rev. D **21**, 3010 (1980).
108. R. B. Norman, F. Dick, J. W. Norbury, and S. R. Blattinig, Tech. Rep. NASA/TP-2009-215565, NASA Center for Aero Space Information (2009).
109. S. Huber and J. Aichelin, Nucl. Phys. A **573**, 587 (1994).
110. V. Suslenko and I. Gaisak, Sov. J. Nucl. Phys. **43**, 252 (1986).
111. H. Wassmer and H. Muhry, Helv. Phys. Acta **46**, 626 (1973).
112. H. R. Worthington, J. N. Mcgruer, and D. E. Findley, Phys. Rev. **90**, 899 (1953).
113. J. M. Blair, G. Freier, E. E. Lampi, W. Sleator, Jr., and J. H. Williams, Phys. Rev. **74**, 553 (1948).
114. K. Imai, K. Nisimura, N. Tamura, and H. Sato, Nucl. Phys. A **246**, 76 (1975).
115. L. H. Johnston and D. E. Joung, Phys. Rev. **116**, 989 (1959).
116. S. Kikuchi, J. Sanada, S. Suwa, I. Hayashi, K. Nisimura, and K. Fukunaga, J. Phys. Soc. Jpn. **15**, 9 (1960).
117. A. Berdoz, F. Foroughi, and C. Nussbaum, J. Phys. G **12**, L133 (1986).
118. A. E. Taylor, E. Wood, and L. Bird, Nucl. Phys. **16**, 320 (1960).
119. M. Mahjour-Shafiei, J. C. S. Bacelar, M. D. Cozma, M. J. V. Goethem, M. N. Harakeh, M. Hoefman, H. Huisman, N. Kalantar-Nayestanaki, H. Löhner, J. G. Messchendorp, *et al.*, Phys. Rev. C **70**, 024004 (2004).
120. R. J. Slobodrian, H. E. Conzett, E. Shield, and W. F. Tivol, Phys. Rev. **174**, 1122 (1968).
121. N. Jarmie, J. H. Jett, J. L. Detch, Jr., and R. L. Hutson, Phys. Rev. Lett. **25**, 34 (1970).
122. N. Jarmie, J. H. Jett, J. L. Detch, Jr., and R. L. Hutson, Phys. Rev. C **3**, 10 (1971).
123. N. Jarmie and J. H. Jett, Phys. Rev. C **10**, 54 (1974).
124. A. Johansson, U. Svanberg, and P. E. Hodgson, Ark. Fys. (Sweden) **19**, 541 (1961).
125. M. Avan, A. Baldit, J. Castor, G. Chaigne, A. Devaux, J. Fargeix, P. Force, G. Landaud, G. Roche, J. Vicente, *et al.*, Phys. Rev. C **30**, 521 (1984).
126. B. A. Ryan, A. Kanofsky, T. J. Devlin, R. E. Mischke, and P. F. Shepard, Phys. Rev. D **3**, 1 (1971).
127. EDDA Collab., Eur. Phys. J. A **22**, 125 (2004).
128. M. G. Albrow, S. Andersson/Almehed, B. Bošnjakovic, C. Daum, F. C. Ern e, J. P. Lagnaux, J. C. Sens, and F. Udo, Nucl. Phys. B **23**, 445 (1970).
129. K. Yasuda, H. Akiyoshi, T. Hotta, K. Imai, M. Kato, M. Kawabata, Y. Maeda, N. Matsuoka, T. Matsuzuka, Y. Mizuno, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4775 (1999).
130. A. J. Simon, G. Glass, M. W. McNaughton, T. Noro, K. H. McNaughton, P. J. Riley, E. G lmez, C. A. Whitten, Jr., V. R. Cupps, *et al.*, Phys. Rev. C **48**, 662 (1993).
131. G. W. Hoffmann, M. L. Barlett, R. W. Fergerson, J. A. Marshall, J. A. McGill, E. C. Milner, L. Ray, and J. F. Amann, Phys. Rev. C **37**, 397 (1988).
132. G. N. Velichko, Sov. J. Exp. Phys. **33**, 615 (1981).
133. P. Baillon, C. Bricman, M. Ferro-Luzzi, P. Jenni, J. M. Perreau, R. D. Tripp, T. Ypsilantis, Y. Declais, and J. Seguinot, Nucl. Phys. B **105**, 365 (1976).
134. A. V. Dobrovolsky, A. V. Khanzadeev, G. A. Korolev, E. M. Maev, V. I. Medvedev, G. L. Sokolov, N. K. Terentyev, Y. Terrien, G. N. Velichko, A. A. Vorobyov, *et al.*, Nucl. Phys. B **214**, 1 (1983).
135. D. T. Williams, I. J. Bloodworth, E. Eisenhandler, W. R. Gibson, P. I. P. Kalmus, L. C. Y. L. C. Kwong, G. T. J. Arnison, A. Astbury, S. Gjesdal, E. Lillethun, *et al.*, Nuovo Cimento A **8**, 447 (1972).
136. J. K. Ahn, H. Akikawa, J. Arvieux, B. Bassalleck, M. S. Chung, H. En'yo, T. Fukuda, H. Funahashi, S. V. Golovkin, A. M. Gorin, *et al.*, Nucl. Instrum. Methods A **457**, 137 (2001).

137. G. Pauletta, G. Adams, S. M. Haji-saeid, G. J. Igo, J. B. McClelland, A. T. M. Wang, C. A. Whitten, Jr., A. Wriekat, M. M. Gazzaly, *et al.*, Phys. Rev. C **27**, 282 (1983).
138. M. L. Barlett, G. W. Hoffmann, J. A. McGill, B. Hoistad, L. Ray, R. W. Ferguson, E. C. Milner, J. A. Marshall, J. F. Amann, B. E. Bonner, *et al.*, Phys. Rev. C **27**, 682 (1983).
139. G. D. Alkhazov *et al.*, Preprint LENI-79-531 (1979).
140. K. A. Jenkins, L. E. Price, R. Klem, R. J. Miller, P. Schreiner, H. Courant, Y. I. Makdisi, M. L. Marshak, E. A. Peterson, and K. Ruddick, Phys. Rev. Lett. **40**, 425 (1978).
141. T. Fujii, G. B. Chadwick, G. B. Collins, P. J. Duke, N. C. Hien, M. A. R. Kemp, and F. Turkot, Phys. Rev. **128**, 1836 (1962).
142. C. M. Ankenbrand, A. R. Clark, B. Cork, T. Elioff, L. T. Kerth, and W. A. Wenzel, Phys. Rev. **170**, 1223 (1968).
143. I. Ambats, D. S. Ayres, R. Diebold, A. F. Greene, S. L. Kramer, A. Lesnik, D. R. Rust, C. E. W. Ward, A. B. Wicklund, and D. D. Yovanovitch, Phys. Rev. D **9**, 1179 (1974).

## AN APPROXIMATION OF ELASTIC PROTON–NUCLEAR SCATTERING DIFFERENTIAL CROSS SECTIONS

A. A. Galyuzov<sup>1)</sup>, M. V. Kosov<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>*Dukhov Automatics Research Institute, Moscow, Russia*

An empiric approximation of elastic proton–nuclear differential cross sections is proposed in a wide energy range and for all target nuclei. At small energies the *pp* elastic scattering differential cross section is refined by the direct nuclear reaction theory taking into account an interference of electromagnetic and nuclear scattering amplitudes.