ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2021, том 84, № 6, с. 535–552

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

РАСЧЕТ ДВУХБОЗОННОГО ОБМЕНА С КОМПЛЕКСНЫМИ МАССАМИ

© 2021 г. В. А. Зыкунов[1),2)*]

Поступила в редакцию 9.12.2020 г.; после доработки 22.01.2021 г.; принята к публикации 22.01.2021 г.

Описан новый метод расчета вклада в сечение четырехфермионного процесса диаграмм двухбозонного обмена (боксов) с одной и двумя комплексными массами бозонов. Сделан подробный численный анализ полученных результатов и их сверка с асимптотическими выражениями для областей энергий ниже и выше Z-резонанса.

DOI: 10.31857/S0044002721050160

1. ВВЕДЕНИЕ

Нетривиальная задача расчета вклада диаграмм двухбозонного обмена (ДО) возникла как часть задачи учета однопетлевых электромагнитных радиационных поправок в экспериментах физики высоких энергий. На первом этапе эта задача в основном решалась аналитически. Одним из первых методически последовательных аналитических расчетов ДО для случая двух фотонов была работа Дж. Кахане (J. Kahane) [1]. Ключом для упрощения вычислений в [1] стала догадка скомбинировать инфракрасно-расходящиеся 3- и 4-точечные функции в инфракрасно-конечное выражение. Хотя это выражение более сложно по форме в сравнении с простым скалярным 4-точечным интегралом (из-за наличия в числителе комбинации, квадратичной по 4-импульсу переменной интегрирования), однако рассчитывается проще, так как из-за инфракрасной конечности учет инфинитезимальной массы фотона λ в нем не требуется.

Далее, Г. 't Хоофтом и М. Велтманом в работе [2] был предложен общий метод аналитического расчета скалярных многоточечных интегралов. Для 3-точечных функций метод приводит к выражению, состоящему из не более чем 12 дилогарифмов (или функций Спенса [3], см. Приложение А). Если для 3-точечных функций метод [2] хорошо работает при произвольных массах и значениях энергии, то для 4-точечных функций в случае комплексных масс (характерных для s-канальных амплитуд) сложность выражения существенно увеличивается, например, количество слагаемых возрастает до 108. Принципиальной трудностью является также то, что предлагаемое представление приводит к неточностям при расчете в некоторых проблемных кинематических областях из-за возникающих численных "псевдонеопределенностей" вида $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, либо их более сложной комбинации. Определенные успехи в упрощении были достигнуты, например, в работе [4] (там результат состоит из "всего 16 функций Спенса") и в работе [5], где получены простые аналитические выражения для нейтральных s-канальных боксов, но только в области $m_f^2 \ll s \leq 2\mathrm{Re}m_a^2$.

По прошествии времени, с развитием компьютерных технологий, появилось большое число программных комплексов, позволяющих эффективно рассчитывать диаграммы не только в однопетлевом приближении (например, коды FF [6], LoopTools [7]), но и в высших порядках (в настоящий момент до четырехпетлевого уровня). Поскольку стандартным приемом остается объединение знаменателей с помощью приема Фейнмана (так называемый Feynman's trick [8], см. ниже), то усилия в основном были сосредоточены на эффективном интегрировании по фейнмановским параметрам. Среди разработанных с тех пор программ-интеграторов необходимо упомянуть программу 1978 г. VEGAS [9] (автор — П. Лепаж [P. Lepage]). Этот код задал высочайший уровень качества подобных программ и до сих пор весьма продуктивно используется. Из популярных в настоящее время интеграторов следует назвать библиотеку программ Cuba [10] (автор — Т. Хан [T. Hahn]). В нее, кроме кода VEGAS, входят также алгоритмы Cuhre, Divonne и Suave. Библиотека Cuba лежит в основе ряда современных программ многопетлевых вычислений, стоит упомятуть такие эффективные пакеты как, например, FIESTA [11] и SECDEC [12].

[1)]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.
[2)]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь.
[*]E-mail: zykunov@cern.ch

Не стояли на месте и аналитические методы расчета многопетлевых диаграмм. Так, давно хорошо изученными функциями, наряду с упоминаемыми дилогарифмами, стали так называемые кратные полилогарифмы (multiple polylogarithms) [13], с помощью которых выражаются результаты для некоторых классов многопетлевых диаграмм (например, для вычисления боксов пакетами XLOOPS-GiNaC [14]). Активно идет работа по изучению эллиптических полилогарифмов [15], которые помогают в ряде случаев при расчете тех высших диаграмм, которые не выражаются через кратные полилогарифмы.

В настоящей работе будет показано, как точно и быстро рассчитать вклад ДО в канале нейтрального тока с комплексными массами без сложностей, связанных с представлением через комплекснозначные дилогарифмы и применением продвинутых адаптивных техник интегрирования. Другими словами, полученный аналитический результат прост, удобен для программирования, анализа и применения для конкретной интерпретации в физическом эксперименте (это будет проиллюстрировано на примере реакции Дрелла–Яна на эксперименте CMS LHC). План работы следующий: в разд. 2 дано общее описание четырехфермионного процесса, в разд. 3 приведены выражения для сечения процесса с ДО, в разд. 4 с использованием новой техники проделан расчет 4-точечных функций: для γZ-бокса (разд. 4.1), для ZZ- и WW-боксов (разд. 4.2). Численный анализ проведен в разд. 5. Технические детали вынесены в Приложения, в частности, в Приложении Г приведен упрощенный вариант формул, пригодных для расчета ДО с комплексными массами в произвольной кинематической области.

2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Дадим общее описание четырехфермионного процесса с продольной поляризацией начальных частиц. Для определенности рассмотрим в начальном состоянии кварки, а в конечном — лептоны (пользуясь элементарными заменами, можно использовать все полученные формулы для произвольной фермионной конфигурации):

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \to c(q) \to l^-(p_3) + l^+(p_4). \qquad (1)$$

Поляризацию полезно удержать в расчете, так как в планируемых экспериментах на будущем электрон-позитронном коллайдере, описание которых входит в круг задач, которые возможно решить предлагаемым в этой работе методом, намечается поляризовать по крайней мере электрон.

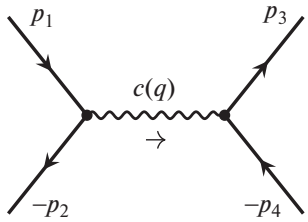

Рис. 1. Фейнмановская диаграмма процесса $q\bar{q} \to \to l^-l^+$ в борновском приближении. Волнистой линией обозначены фотон или Z-бозон.

Фейнмановская диаграмма, соответствующая процессу (1) в борновском приближении, приведена на рис. 1. Обозначения на диаграмме следующие:

- p_1 — 4-импульс первого кварка с ароматом q и массой m_q;
- p_2 — 4-импульс второго антикварка (с тем же ароматом и массой);
- p_3 — 4-импульс конечного лептона l^- с ароматом l и массой m_l;
- p_4 — 4-импульс конечного антилептона l^+ (с тем же ароматом и массой);
- $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ — 4-импульс c-бозона с массой m_c.

Промежуточные бозоны везде в работе будут обозначаться малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots = \gamma, Z, W$.

Приведем стандартный набор лоренц-инвариантных переменных Мандельштама:

$$s = q^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2, \qquad (2)$$

которые сформированы из 4-импульсов частиц. В работе применяется ультрарелятивистское приближение (УРП):

$$s, |t|, |u| \gg m_f^2. \qquad (3)$$

Также будем пользоваться общим фермионным индексом $f = q, l$.

Для расчета $d\sigma^0$ — дифференциального сечения процесса (1), изображенного на рис. 1, — применяется стандартная техника. Прежде всего, сформируем амплитуды, используя правила Фейнмана из [5], и кратко опишем их. Входящему фермиону с 4-импульсом p соответствует биспинорная амплитуда $u(p)$, выходящему — биспинорная амплитуда $\bar{u}(p)$.

Пропагатору бозона (в калибровке Фейнмана) отвечает выражение $-ig^{\alpha\beta}D_a(q)$, где

$$D_a(q) = \frac{1}{q^2 - m_a^2}, \tag{4}$$

а q — 4-импульс передачи в пропагаторе. Используется общее правило так называемых комплексных масс

$$m_a^2 \to m_a^2 - i\epsilon_a. \tag{5}$$

Фотонная масса $m_\gamma \equiv \lambda$ равна нулю везде, кроме специально отмеченных случаев, где она используется как инфинитезимальный параметр, который регуляризует инфракрасную расходимость. Масса Z-бозона обозначена как m_Z, величина Γ_Z — это его ширина. Мнимая часть знаменателя пропагатора в случае фотона $\epsilon_\gamma \to 0$ служит для обхода полюса. В случае массивного Z-бозона могут быть использованы разные схемы для корректного учета ширины. В настоящей работе используется схема с фиксированной шириной, для которой величина ϵ_Z выглядит следующим образом:

$$\epsilon_Z = m_Z\Gamma_Z. \tag{6}$$

Фермионный (электронный) пропагатор выглядит так (тут p — 4-импульс передачи, также везде используется сокращенная запись $\hat{p} = \gamma^\mu p_\mu$):

$$iS(p) = i\frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}. \tag{7}$$

Вершине взаимодействия фермиона f с калибровочным бозоном a соответствует выражение

$$ie\gamma_\mu\Gamma_f^a, \quad \text{где} \quad \Gamma_f^a = v_f^a - a_f^a\gamma_5. \tag{8}$$

Векторные и аксиально-векторные константы связи фермиона аромата f с фотоном и Z-бозоном:

$$v_f^\gamma = -Q_f, \quad a_f^\gamma = 0,$$
$$v_f^Z = \frac{I_f^3 - 2Q_f s_{\mathrm{W}}^2}{2s_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}}, \quad a_f^Z = \frac{I_f^3}{2s_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}};$$

константы связи фермионов с W-бозоном:

$$v_f^W = a_f^W = \frac{1}{2\sqrt{2}s_{\mathrm{W}}}.$$

Используются следующие параметры Стандартной модели (СМ): Q_f — электрический заряд f-частицы в единицах протонного заряда e, третья компонента слабого изоспина для конкретного типа фермиона:

$$I_\nu^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_e^3 = -\frac{1}{2}, \quad I_u^3 = +\frac{1}{2}, \quad I_d^3 = -\frac{1}{2}, \tag{9}$$

а s_{W} (c_{W}) — синус (косинус) угла Вайнберга, которые связаны с массами Z- и W-бозона согласно правилам СМ:

$$c_{\mathrm{W}} = \frac{m_W}{m_Z}, \quad s_{\mathrm{W}} = \sqrt{1 - c_{\mathrm{W}}^2}. \tag{10}$$

Амплитуда процесса (1) выглядит так:

$$\mathcal{M}_0^c = ie^2 D_c(q) \cdot \bar{u}(-p_2)\gamma_\mu\Gamma^c u(p_1) \times \times \bar{u}(p_3)\gamma^\mu\Gamma^c u(-p_4). \tag{11}$$

Сечение формируется по общему правилу

$$d\sigma = \frac{1}{8\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2 d\Phi_2, \tag{12}$$

где $\mathcal{M}$ — амплитуда процесса, а фазовый объем реакции имеет вид

$$d\Phi_2 = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \times \times \frac{d^3\mathbf{p}_3}{2p_{30}}\frac{d^3\mathbf{p}_4}{2p_{40}} \approx \frac{\pi}{2s}dt. \tag{13}$$

Квадрируя суммарную амплитуду для обмена фотоном и Z-бозоном, получим борновское сечение в виде

$$d\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s^2}\sum_{a,c=\gamma,Z}\Pi^{ac}R_q^{aac}\cdot dt. \tag{14}$$

Функция R_q получается из расчета произведения следов матриц:

$$R_q^{abc} = \mathrm{Sp}\Big[\gamma_\mu\Gamma_q^a U_1\Gamma_q^{c+}\gamma_\nu U_2\Big] \times \times \mathrm{Sp}\Big[\gamma_\mu\Gamma_l^b U_4\Gamma_l^{c+}\gamma_\nu U_3\Big], \tag{15}$$

где $U_{1,2}$ — матрицы плотности, $U_{3,4}$ — проекционные операторы:

$$U_1 = u(p_1)\bar{u}(p_1), \quad U_2 = u(-p_2)\bar{u}(-p_2),$$
$$U_3 = \sum u(p_3)\bar{u}(p_3), \quad U_4 = \sum u(-p_4)\bar{u}(-p_4).$$

Пропагаторы бозонов образуют комбинации: $\Pi^{ac} = D_a(q)D_c^*(q)$.

Используем коммутационные свойства гамма-матриц и подберем удобную сокращенную форму записи констант связи и степеней продольной поляризации начальных частиц (λ_1 и λ_2):

$$R_q^{abc} = T_q^{abc} + U_q^{abc}, \tag{16}$$

где функции T_q и U_q выглядят так:

$$T_q^{abc} = 2t^2\big([1 - \lambda_1\lambda_2]f_{q-}^{abc} + [\lambda_1 - \lambda_2]g_{q-}^{abc}\big), \tag{17}$$
$$U_q^{abc} = 2u^2\big([1 - \lambda_1\lambda_2]f_{q+}^{abc} - [\lambda_1 - \lambda_2]g_{q+}^{abc}\big),$$

а комбинации констант связи и степеней поляризаций имеют вид

$$f_{q\pm}^{abc} = \lambda_{q+}^{ac}\lambda_{l+}^{bc} \pm \lambda_{q-}^{ac}\lambda_{l-}^{bc},$$
$$g_{q\pm}^{abc} = \lambda_{q+}^{ac}\lambda_{l-}^{bc} \pm \lambda_{q-}^{ac}\lambda_{l+}^{bc}.$$

Используются следующие обозначения для произведений констант связи:

$$\lambda_{f+}^{ab} = v_f^a v_f^b + a_f^a a_f^b, \quad \lambda_{f-}^{ab} = v_f^a a_f^b + a_f^a v_f^b. \tag{18}$$

3. ВКЛАД В СЕЧЕНИЕ ОТ ДИАГРАММ ДВУХБОЗОННОГО ОБМЕНА

Сечение вклада ДО (с обменом бозонами a и b) имеет вид

$$\frac{d\sigma^{ab}}{dt} = \frac{1}{2^3\pi s^2}\sum_{c=\gamma,Z}\Big(M_D^{ab}+M_C^{ab}\Big)M_0^{c+}. \quad (19)$$

Произведения боксовских прямой (соответствует рис. 2*а*) и перекрестной (соответствует рис. 2*б*) амплитуд с борновской выглядят так:

$$\mathcal{M}_D^{ab}\mathcal{M}_0^{c+} = +C_s\int\frac{dk}{i\pi^2}D_a(k)\times \quad (20)$$
$$\times D_b(q-k)\frac{1}{(k^2-2p_1k)(k^2-2p_3k)}\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma_\beta(\hat p_1-\hat k)\gamma_\mu U_1^{abc}\gamma_\nu U_2\Big]\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma^\mu(\hat p_3-\hat k)\gamma^\beta U_4^{abc}\gamma^\nu U_3\Big],$$

$$\mathcal{M}_C^{ab}\mathcal{M}_0^{c+} = -C_s\int\frac{dk}{i\pi^2}D_a(k)\times \quad (21)$$
$$\times D_b(q-k)\frac{1}{(k^2-2p_1k)(k^2-2p_4k)}\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma_\beta(\hat p_1-\hat k)\gamma_\mu U_1^{abc}\gamma_\nu U_2\Big]\times$$
$$\times\,\mathrm{Sp}\Big[\gamma^\beta(\hat p_4-\hat k)\gamma^\mu U_4^{abc}\gamma^\nu U_3\Big],$$

где $C_s = 4\pi\alpha^3 D_c^*(q)$. Приведем выражения U_{1-4} в УРП:

$$U_{1,4}^{abc} = \Gamma^a\Gamma^b\Gamma^c U_{1,4} = (v_0^{abc}-a_0^{abc}\gamma_5)U_{1,4}, \quad (22)$$
$$U_2 = \frac{1}{2}(1-\lambda_2\gamma_5)\hat p_2, \quad U_3 = \hat p_3.$$

Упрощая, получаем:

$$U_1^{abc} = \frac{1}{2}(v_{1,q}^{abc}-a_{1,q}^{abc}\gamma_5)\hat p_1, \quad (23)$$
$$U_4^{abc} = (v_{0,l}^{abc}-a_{0,l}^{abc}\gamma_5)\hat p_4,$$
$$v_{1,f}^{abc} = v_{0,f}^{abc}-\lambda_1 a_{0,f}^{abc},$$
$$v_{0,f}^{abc} = v_f^a v_f^b v_f^c + v_f^a a_f^b a_f^c + a_f^a v_f^b a_f^c + a_f^a a_f^b v_f^c,$$
$$a_{1,f}^{abc} = a_{0,f}^{abc}-\lambda_1 v_{0,f}^{abc},$$
$$a_{0,f}^{abc} = a_f^a a_f^b a_f^c + a_f^a v_f^b v_f^c + v_f^a a_f^b v_f^c + v_f^a v_f^b a_f^c.$$

Как выяснится ниже, в сечение ДО константы связи входят только в двух комбинациях:

$$C_3^{abc} = \big(v_{1,q}^{abc}+\lambda_2 a_{1,q}^{abc}\big)v_{0,l}^{abc}, \quad (24)$$
$$C_4^{abc} = \big(a_{1,q}^{abc}+\lambda_2 v_{1,q}^{abc}\big)a_{0,l}^{abc}.$$

Как видно из (20), нужно уметь рассчитывать четырехточечные скалярный, векторный и тензорный интегралы, для прямого бокса они имеют вид

$$I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{ab} = \int\frac{dk}{i\pi^2}\frac{1,k_\alpha,k_\alpha k_\beta}{\big(k^2-m_a^2\big)\big((k-q)^2-m_b^2\big)\big(k^2-2p_1k\big)\big(k^2-2p_3k\big)}. \quad (25)$$

Векторный и тензорный интегралы для прямого бокса представляются в виде

$$I_\alpha^{ab} = a_1p_{1\alpha}+a_2p_{3\alpha}+a_3q_\alpha, \quad (26)$$
$$I_{\alpha\beta}^{ab} = b_0g_{\alpha\beta}+b_1p_{1\alpha}p_{1\beta}+b_2p_{3\alpha}p_{3\beta}+ \quad (27)$$
$$+b_3q_\alpha q_\beta+b_4(p_{1\alpha}p_{3\beta}+p_{3\alpha}p_{1\beta})+$$
$$+b_5(p_{1\alpha}q_\beta+q_\alpha p_{1\beta})+b_6(p_{3\alpha}q_\beta+q_\alpha p_{3\beta}).$$

Выражения для перекрестного бокса получаются из формул (25), (26), (27) заменой $p_3\to p_4$.

Подставляя выражения (26), (27) в (20), получим для произведения следов гамма-матриц:

$$+\mathrm{Sp}[...]\,\mathrm{Sp}[...]\big|_D\to \quad (28)$$
$$\to 4C_3^{abc}\Big[(a_1+a_2-I_0)t(t^2+u^2)+$$
$$+2b_0(4t^2+u^2)-$$
$$-2(a_3-b_3-b_5-b_6)st^2-b_4t(2t^2+u^2)\Big]+$$
$$+4C_4^{abc}\Big[(a_1+a_2-I_0)t(u^2-t^2)+$$
$$+2b_0(u^2-4t^2)+$$
$$+2(a_3-b_3-b_5-b_6)st^2+b_4t(2t^2-u^2)\Big].$$

Во всех коэффициентах $I_0, a_{1,...}, b_{0,...}$ подразумеваются верхние индексы ab, как в левой части уравнений (26), (27). Аналогично, произведение следов для перекрестного бокса (21) такое:

$$-\mathrm{Sp}[...]\,\mathrm{Sp}[...]\big|_C\to \quad (29)$$
$$\to 4C_3^{abc}\Big[-(a_1+a_2-I_0)u(u^2+t^2)-$$
$$-2b_0(4u^2+t^2)+$$
$$+2(a_3-b_3-b_5-b_6)su^2+b_4u(2u^2+t^2)\Big]+$$
$$+4C_4^{abc}\Big[(a_1+a_2-I_0)u(t^2-u^2)+$$

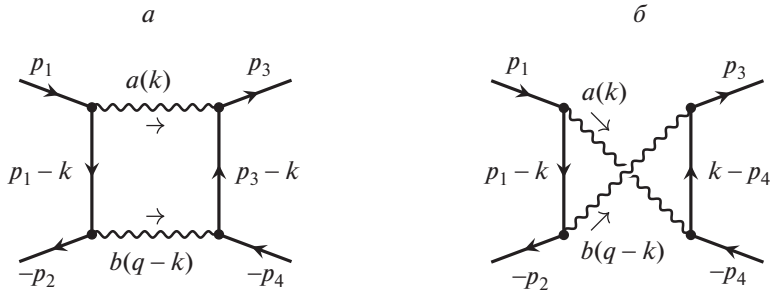

Рис. 2. Диаграммы двухбозонных вкладов в процесс $q\bar{q} \to l^- l^+$. Волнистой линией обозначен фотон, Z-бозон или W-бозон.

$$+ 2b_0(t^2 - 4u^2) +$$
$$+ 2(a_3 - b_3 - b_5 - b_6)su^2 + b_4 u(2u^2 - t^2)\Big].$$

Отметим, что коэффициенты I_0, $a_{1,\ldots}$, $b_{0,\ldots}$ для прямых и перекрестных боксов разные, связь между ними объяснена выше.

Сведение (редукция) четырехточечных векторных и тензорных интегралов к скалярным (так называемое *векторное и тензорное интегрирование*) обычно осуществляется методом Вельтмана–Пассарино [16], это довольно трудоемкая процедура. В настоящей работе будет предложен другой, как полагает автор, более простой путь.

4. РАСЧЕТ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Для начала рассмотрим прямой бокс. Приведем формулы, позволяющие объединить произведение в знаменателе 4-точечного интеграла [8],

$$\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(Ax + B\bar{x})^2}, \tag{30}$$

$$\frac{1}{A^2 B} = \int\limits_0^1 \frac{2x dx}{(Ax + B\bar{x})^3},$$

$$\frac{1}{A^3 B} = \int\limits_0^1 \frac{3x^2 dx}{(Ax + B\bar{x})^4}.$$

Параметр Фейнмана с чертой традиционно означает:

$$\bar{x} = 1 - x, \quad \bar{y} = 1 - y, \quad \bar{z} = 1 - z.$$

Последовательно применяя формулы (30), получим

$$\frac{1}{ABCD} = 3! \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dz \frac{yz^2}{E^4}, \tag{31}$$

$$E = A \cdot xyz + B \cdot \bar{x}yz + C \cdot \bar{y}z + D \cdot \bar{z}.$$

Пользуясь (31), преобразуем подынтегральное выражение 4-точечных функций I^{ab}. Существует $4! = 24$ способа выбрать последовательность множителей в знаменателе. Оказывается, только 3! из них (если $D = k^2 - m_a^2$) дают возможность факторизовать результат в целях его дальнейшего упрощения в случае $a = \gamma$. Выбирая один из таких вариантов:

$$A = (k - q)^2 - m_b^2, \quad B = k^2 - 2p_3 k, \tag{32}$$
$$C = k^2 - 2p_1 k, \quad D = k^2 - m_a^2,$$

получим для произвольного случая:

$$E = k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta,$$
$$\mathcal{P} = (\bar{y} \cdot p_1 + \bar{x}y \cdot p_3 + xy \cdot q)z,$$
$$\Delta = -m_a^2 \cdot \bar{z} + (q^2 - m_b^2) \cdot xyz.$$

Для дальнейшего нам понадобится квадрат 4-вектора $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{A} \cdot z^2, \tag{33}$$

где коэффициент $\mathcal{A}$ не зависит от индексов бокса ab при условии такого же порядка выбора последовательности A, B, C, D (заметим, что $\mathcal{A} > 0$ во всей области интегрирования):

$$\mathcal{A} = m_q^2 \cdot \bar{y}(1 - xy) + \tag{34}$$
$$+ m_l^2 \cdot \bar{x}y(1 - xy) - t \cdot \bar{x}y\bar{y} + s \cdot xy.$$

4.1. Расчет γZ-бокса

Приступаем к расчету 4-точечной функции $I_0^{\gamma Z}$ (случай $Z\gamma$ отдельно не рассматривается в силу очевидной симметрии результата: $Z\gamma = \gamma Z$). По причине инфракрасной расходимости $I_0^{\gamma Z}$ нельзя занулить массу фотона в общем выражении. Для начала поступим в духе работы [1] — скомбинируем 3- и 4-точечные функции, чтобы аналитически выделить инфракрасную расходимость (ИКР), для

этого введем 4-точечный инфракрасно-конечный интеграл:

$$Y_0^{\gamma Z} = (q^2 - m_Z^2) I_0^{\gamma Z} - H_0^{\gamma} + F_0^Z. \qquad (35)$$

3-точечные функции H_0^{γ} и F_0^Z определяются и рассчитываются в Приложении А. Интеграл $Y_0^{\gamma Z}$ после приведения к общему знаменателю подынтегрального выражения приобретает вид

$$Y_0^{\gamma Z} = \qquad (36)$$
$$= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{2kq}{k^2\big((k-q)^2 - m_Z^2\big)\big(k^2 - 2p_1k\big)\big(k^2 - 2p_3k\big)}.$$

Объединяем знаменатели по формулам (32), затем снимаем интеграл по k, пользуясь известными выражениями:

$$3! \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1; k_\alpha; k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta]^4} = \qquad (37)$$
$$= \frac{1; \mathcal{P}_\alpha; \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta - g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}^2 - \Delta)/2}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2},$$

тогда

$$Y_0^{\gamma Z} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y dy \int\limits_0^1 z^2 dz \frac{2\mathcal{P}q}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}. \qquad (38)$$

Упрощая, получим $2\mathcal{P}q = q^2(1 + xy)z$. Далее, с учетом (5) и после сокращения в дроби z^2 получаем

$$Y_0^{\gamma Z} = q^2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y(1 + xy) dy \times \qquad (39)$$
$$\times \int\limits_0^1 \frac{z dz}{(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})^2},$$

где

$$\mathcal{B} = (m_Z^2 - q^2)xy, \quad \mathcal{C} = \epsilon_Z xy.$$

Теперь нетрудно снять аналитически интеграл по z (все нужные интегралы подобного типа приведены в Приложении Б):

$$Y_0^{\gamma Z} = q^2 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y(1 + xy) \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy. \qquad (40)$$

В полученном виде (40) интеграл $Y_0^{\gamma Z}$ не имеет особенностей и областей, сложных с точки зрения возможной потери точности. Другими словами, представляется возможность интегрировать $Y_0^{\gamma Z}$ численно, не затрачивая усилий на сведение результата к дилогарифмам и трансцендентным функциям. Итак, зная $Y_0^{\gamma Z}$ (40), H_0^{γ} (П.2) и F_0^Z (П.8), получим $I_0^{\gamma Z}$:

$$I_0^{\gamma Z} = \frac{1}{q^2 - m_Z^2} \Big(Y_0^{\gamma Z} + H_0^{\gamma} - F_0^Z \Big). \qquad (41)$$

Займемся векторным интегралом (26), он инфракрасно-конечен, так что перекомбинаций делать не нужно. Объединим знаменатели и проинтегрируем по формуле (37):

$$I_\alpha^{\gamma Z} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y dy \int\limits_0^1 z^2 dz \frac{\mathcal{P}_\alpha}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}. \qquad (42)$$

Интегрируя по z и сравнивая коэффициенты при одинаковых 4-векторах с выражением (26), получим

$$a_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y\bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy, \qquad (43)$$
$$a_2 = \int\limits_0^1 \bar{x} dx \int\limits_0^1 y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy,$$
$$a_3 = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^1 y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy.$$

Теперь вычислим тензорный интеграл (27), он также инфракрасно-конечен. Объединяем знаменатели и интегрируем по формуле (37):

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma Z} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y dy \times \qquad (44)$$
$$\times \int\limits_0^1 z^2 dz \frac{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta - g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}^2 - \Delta)/2}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}.$$

Снова интегрируем по z и сравниваем коэффициенты при одинаковых тензорах с выражением (27), в результате получаем

$$b_0 = -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y \mathcal{Y}_{\mathcal{A}} dy. \qquad (45)$$

Коэффициенты b_1 и b_2 не входят в ультрарелятивистское выражение для сечения, тем не менее приведем их:

$$b_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y\bar{y}^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy, \qquad (46)$$

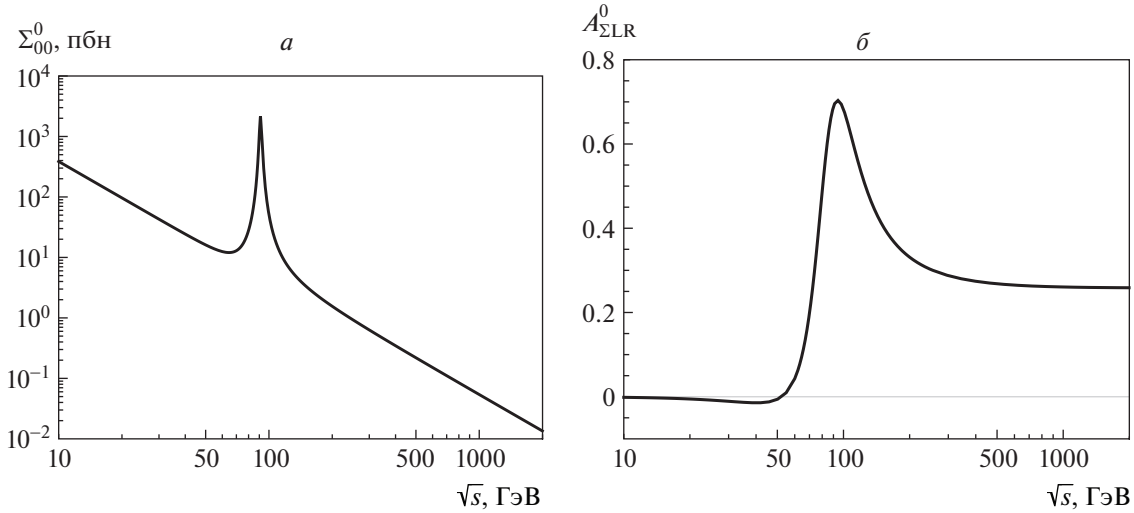

Рис. 3. Борновские полное сечение и поляризационная интегральная асимметрия в зависимости от энергии.

$$b_2 = \int\limits_0^1 \bar{x}^2 dx \int\limits_0^1 y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy.$$

Наконец, остальные тензорные коэффициенты имеют вид

$$b_3 = \int\limits_0^1 x^2 dx \int\limits_0^1 y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy, \tag{47}$$

$$b_4 = \int\limits_0^1 \bar{x} dx \int\limits_0^1 y^2 \bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy,$$

$$b_5 = \int\limits_0^1 x dx \int\limits_0^1 y^2 \bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy,$$

$$b_6 = \int\limits_0^1 x\bar{x} dx \int\limits_0^1 y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy.$$

Выражения $\mathcal{Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ приведены в Приложении Б.

Мы получили выражения для скалярных, векторных и тензорных коэффициентов для случая прямого γZ-бокса. Нетрудно сообразить, что непосредственной заменой $p_3 \to p_4$ из них получаются выражения для коэффициентов перекрестного γZ-бокса (такая замена означает перестановку $t \leftrightarrow u$).

4.2. Расчет ZZ- и WW-боксов

Для расчета вклада диаграмм с двумя массивными бозонами применяем технику, использованную выше. Выбирая вариант с последовательностью $A = k^2 - m_Z^2$, $B = (k-q)^2 - m_Z^2$, $C = k^2 - 2p_3k$, $D = k^2 - 2p_1k$, получим

$$\mathcal{P} = \bar{z} \cdot p_1 + \bar{y} z \cdot p_3 + \bar{x} y z \cdot q,$$

$$\Delta = (q^2 \cdot \bar{x} - m_Z^2) yz.$$

В случае бозонов с массами, значительно превышающими фермионные, достаточно получить ультрарелятивисткий результат. Пренебрежем фермионными массами, тогда выражения в подынтегральной функции 4-точечных интегралов I^{ZZ} выглядят снова $\mathcal{P}^2 - \Delta = z(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})$ (мы используем то же обозначение коэффициентов, что и в предыдущем разделе, но сами коэффициенты другие):

$$\mathcal{A} = t \cdot \bar{y} - s \cdot x\bar{x}y^2, \tag{48}$$

$$\mathcal{B} = -t \cdot \bar{y} + m_Z^2 \cdot y, \quad \mathcal{C} = \epsilon_Z \cdot y.$$

Приведем выражения, требующиеся для вычисления сечения (28): скалярный интеграл

$$I_0^{ZZ} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y \mathcal{Y}_{\mathcal{P}} dy, \tag{49}$$

векторные коэффициенты

$$a_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y(\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{S}}) dy, \tag{50}$$

$$a_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y\bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy,$$

$$a_3 = \int\limits_0^1 \bar{x} dx \int\limits_0^1 y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy$$

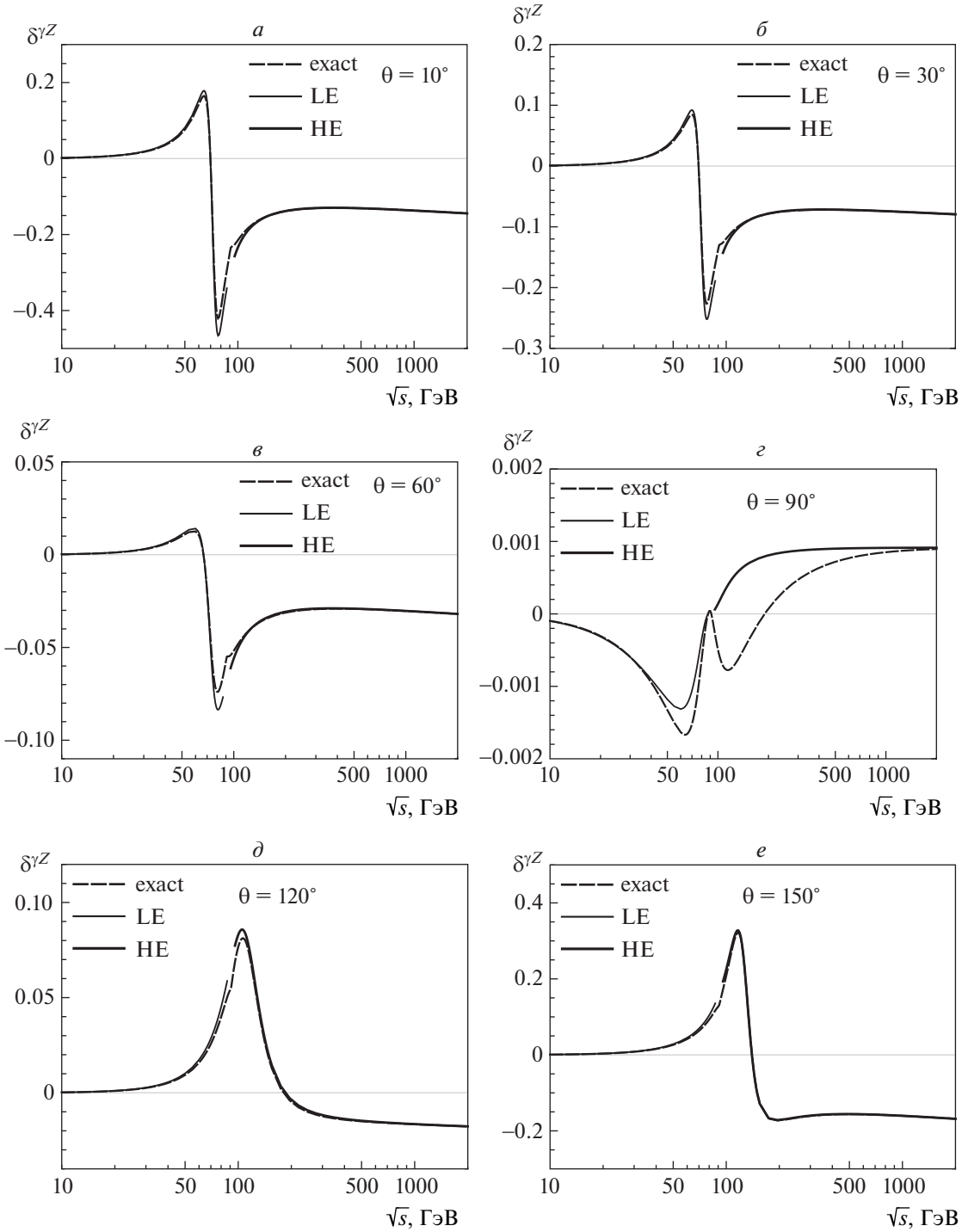

Рис. 4. Относительные поправки к дифференциальному сечению γZ-бокса в зависимости от энергии при разных углах рассеяния.

(можно легко убедиться, что комбинация, присутствующая в сечении (28)

$$c_0 = a_1 + a_2 - I_0 = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} dy \qquad (51)$$

теряет зависимость от $\mathcal{Y}_{\mathcal{P}}$). Наконец, тензорные коэффициенты выглядят так:

$$b_0 = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y \mathcal{Y}_{\mathcal{A}} dy, \qquad (52)$$

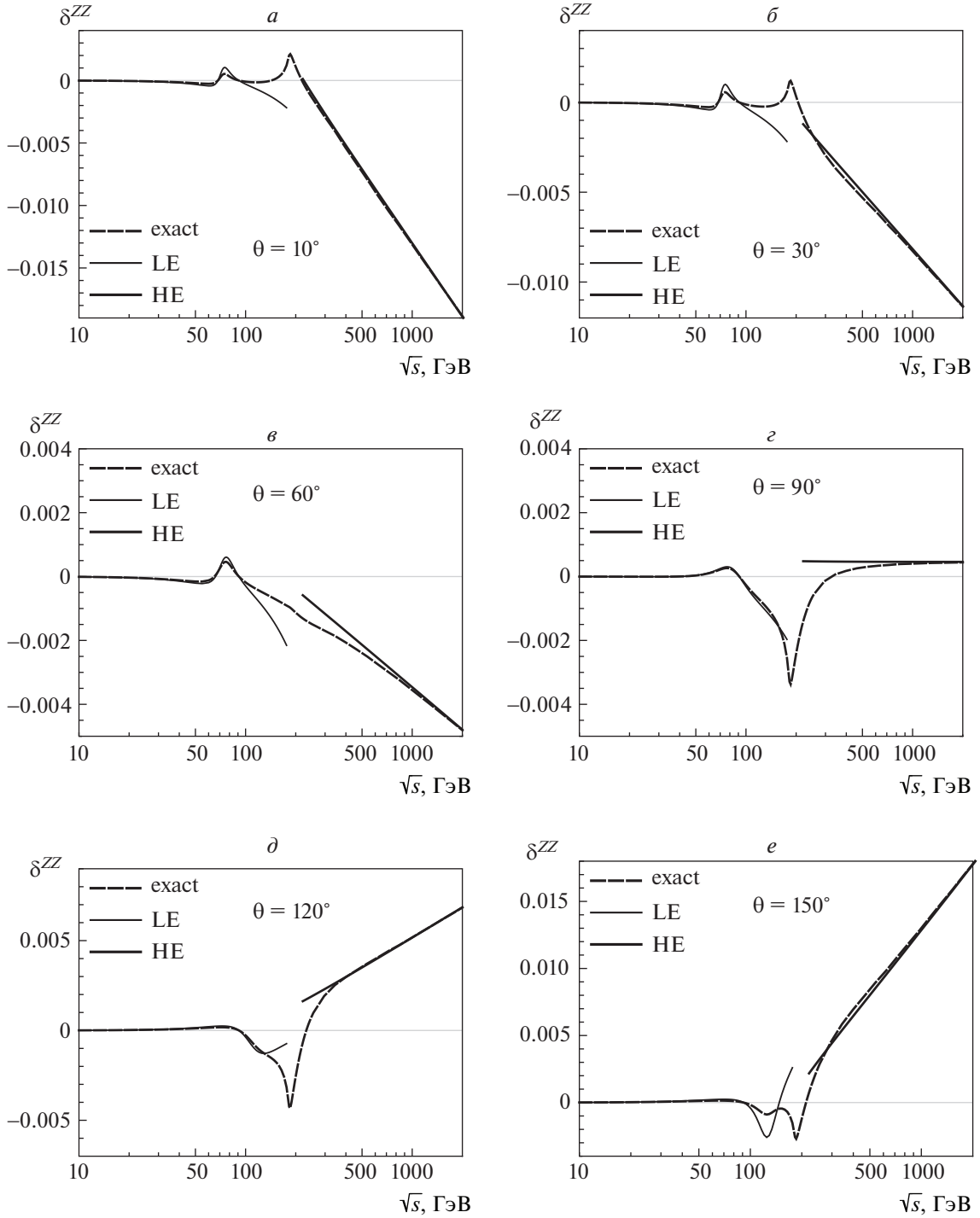

Рис. 5. Относительные поправки к дифференциальному сечению ZZ-бокса в зависимости от энергии при разных углах рассеяния.

$$b_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y(\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} - 2\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} + \mathcal{Y}_{\mathcal{B}})dy, \qquad b_2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y\bar{y}^2\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}dy,$$

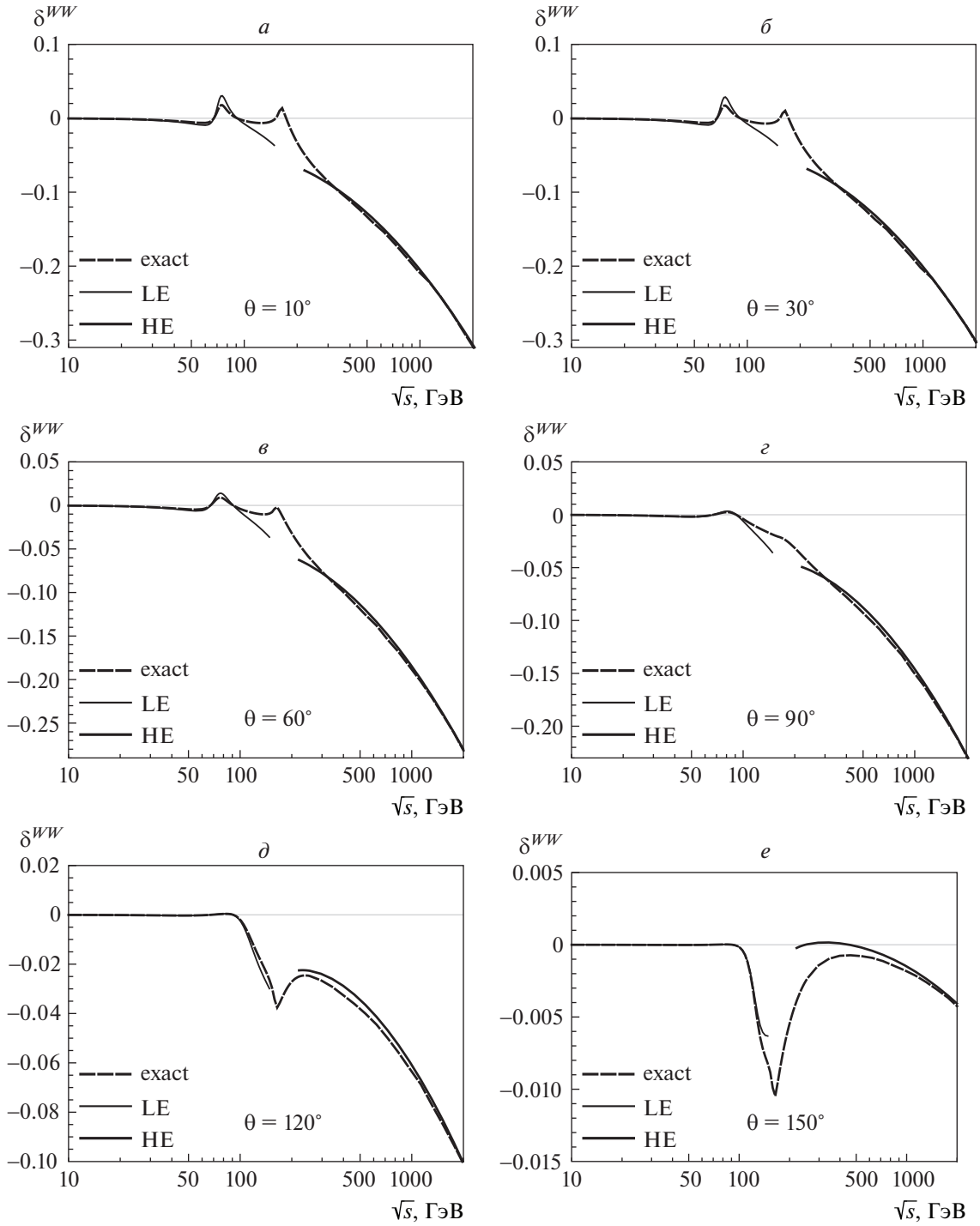

Рис. 6. Относительные поправки к дифференциальному сечению WW-бокса в зависимости от энергии при разных углах рассеяния.

$$b_3 = \int\limits_0^1 \bar{x}^2 dx \int\limits_0^1 y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} dy, \qquad b_4 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 y\bar{y}(\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}) dy,$$

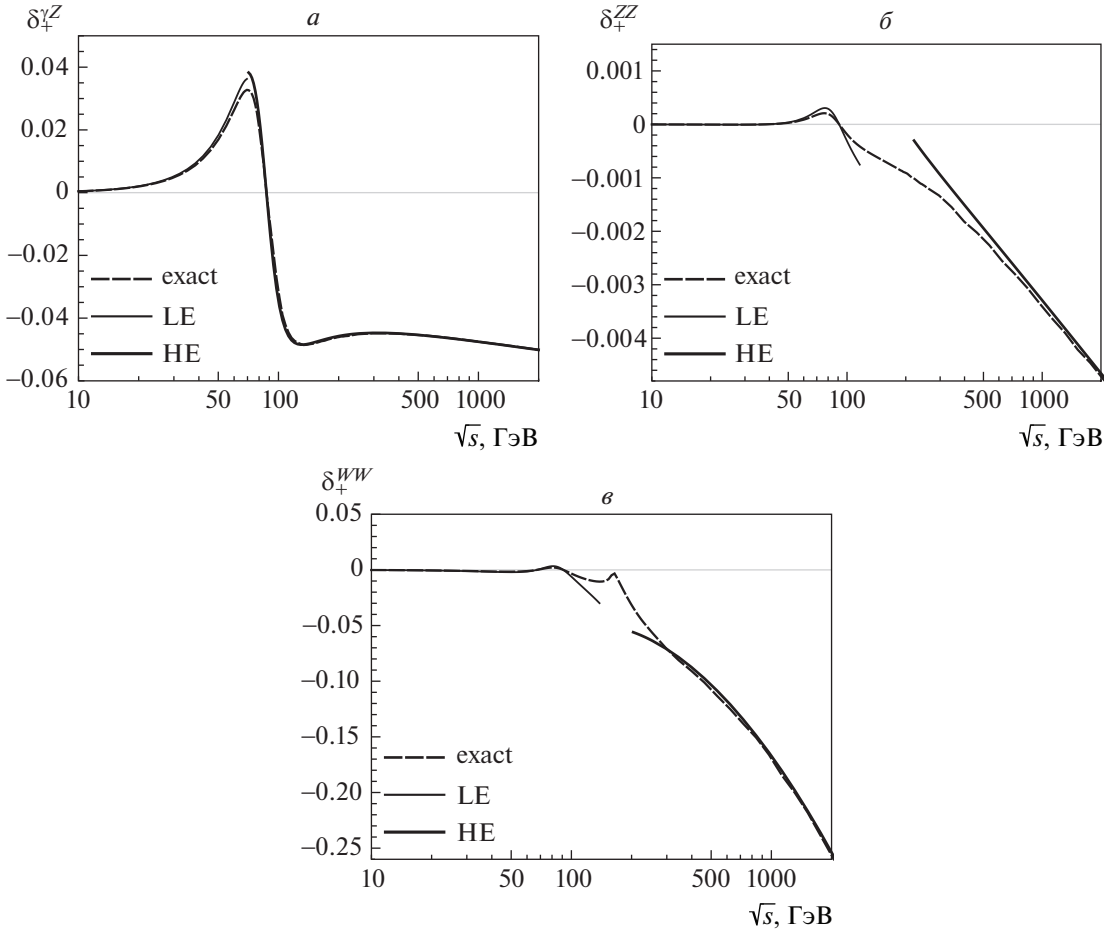

Рис. 7. Относительные поправки к полному сечению γZ-, ZZ-, WW-боксов в зависимости от энергии.

$$b_5 = \int\limits_0^1 \bar{x}dx \int\limits_0^1 y^2(\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{B}})dy,$$

$$b_6 = \int\limits_0^1 \bar{x}dx \int\limits_0^1 y^2\bar{y}\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}dy.$$

Выражения $\mathcal{Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{S},\mathcal{P}}$ приведены в Приложении Б.

Выражения для WW-боксов можно получить из формул для ZZ-случая заменой индекса $Z \to W$ в константах связи и пропагаторах, кроме этого, требуется “выключить” прямой бокс, запрещенный законом сохранения электрического заряда.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Для иллюстрации работы метода была выбрана реакция $u\bar{u} \to \mu^-\mu^+$ с продольно поляризованными кварками. Электрослабые параметры и массы частиц взяты из [17] (масса u-кварка: $m_u = 0.06983$ ГэВ [18]), масса фотона: $\lambda = 10^{-7}$ ГэВ. Рассмотрены три наблюдаемых величины. Первая — дифференциальное сечение $\frac{d\sigma_{00}^C}{dc}$ с неполяризованными начальными частицами (нижний индекс будет означать степени поляризации), где $c = \cos\theta$, θ — угол рассеяния мюона в с.ц.м. начальных частиц, а индекс C означает происхождение вклада. Вторая наблюдаемая — полное сечение (см. рис. 3*а*):

$$\Sigma_{00}^C = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\sigma_{00}^C}{dc} \cdot dc, \tag{53}$$

третья наблюдаемая величина — поляризационная интегральная асимметрия (см. рис. 3*б*):

$$A_{\mathrm{LR}\Sigma}^C = \frac{\Sigma_L^C - \Sigma_R^C}{\Sigma_L^C + \Sigma_R^C}, \tag{54}$$

сформированная из аналогичных (53) сечений

$$\Sigma_L^C = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\sigma_{L0}^C}{dc} \cdot dc, \quad \Sigma_R^C = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\sigma_{R0}^C}{dc} \cdot dc.$$

Будут рассмотрены три относительных поправки — к дифференциальному сечению без поляризации и две поправки к комбинациям полного се-

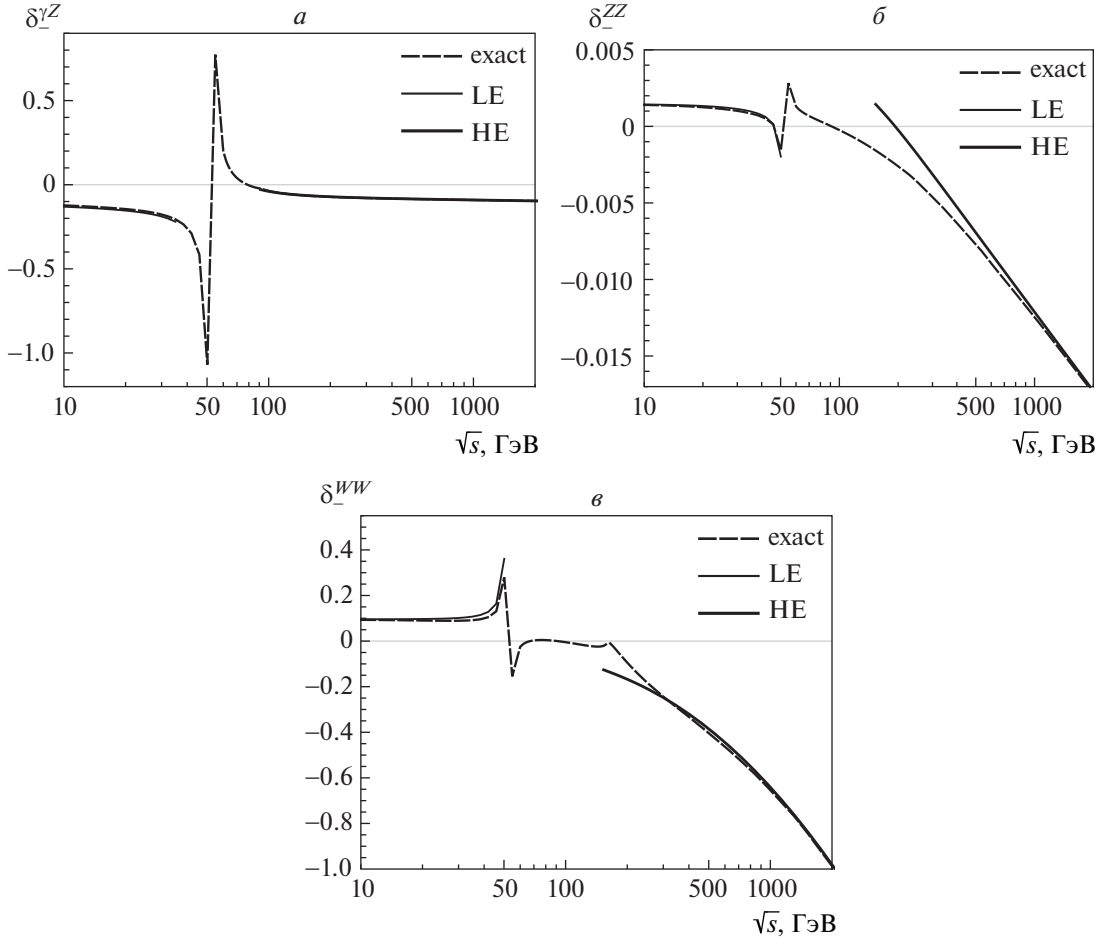

Рис. 8. Относительные поправки δ_- для γZ-, ZZ-, WW-боксов в зависимости от энергии.

чения:

$$\delta^C = \frac{d\sigma_{00}^C}{d\sigma_{00}^0}, \quad \delta_\pm^C = \frac{\Sigma_L^C \pm \Sigma_R^C}{\Sigma_L^0 \pm \Sigma_R^0}. \tag{55}$$

Последние две формируют поправку к поляризационной интегральной асимметрии:

$$\delta_A^C = \frac{A_{\mathrm{LR}\Sigma}^C - A_{\mathrm{LR}\Sigma}^0}{A_{\mathrm{LR}\Sigma}^0} = \frac{\delta_-^C - \delta_+^C}{1 + \delta_+^C}. \tag{56}$$

Будем пользоваться следующими сокращениями:

1. LE-режим (от “low energies”, низкие энергии): $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$,
2. RE-режим (от “resonance”, Z-резонанс): $\sqrt{s} \sim m_Z$,
3. HE-режим (от “high energies”, высокие энергии): $\sqrt{s} \gg m_Z$.

Анализ показал, что мнимая часть от всех интегралов заметна только в RE-режиме, но и там для всех относительных поправок она не превышает промилле в исследованной кинематической области.

На рис. 4–6 приведены относительные поправки к дифференциальному сечению для случаев $C = \gamma Z, ZZ, WW$ в зависимости от энергии и угла рассеяния, на рис. 7 и рис. 8 в таком же стиле показаны поправки $\delta_\pm$. Изображены три кривые: точный (exact) расчет по новой технологии этой работы, асимптотический расчет для LE-режима и асимптотический расчет для HE-режима. Все асимптотические формулы для LE- и HE-режимов приведены в Приложении B. Видно превосходное согласие точных и асимптотических результатов и нетривиальное поведение точного результата в RE-режиме: в областях $\sqrt{s} \sim m_{Z,W}$ и $\sqrt{s} \sim 2m_{Z,W}$. В HE-режиме хорошо видны известные закономерности поведения [19]: сечение WW-бокса пропорционально второй степени судаковского логарифма (СЛ), сечения γZ- и ZZ-боксов пропорциональны первой степени СЛ (из-за сокращения прямых и перекрестных вкладов), в точке $\theta = 90°$ (где $t = u$) нейтральные боксы не зависят от СЛ.

Отдельное исследование по сверке боксов для HE-режима с результатами групп SANC [20] и

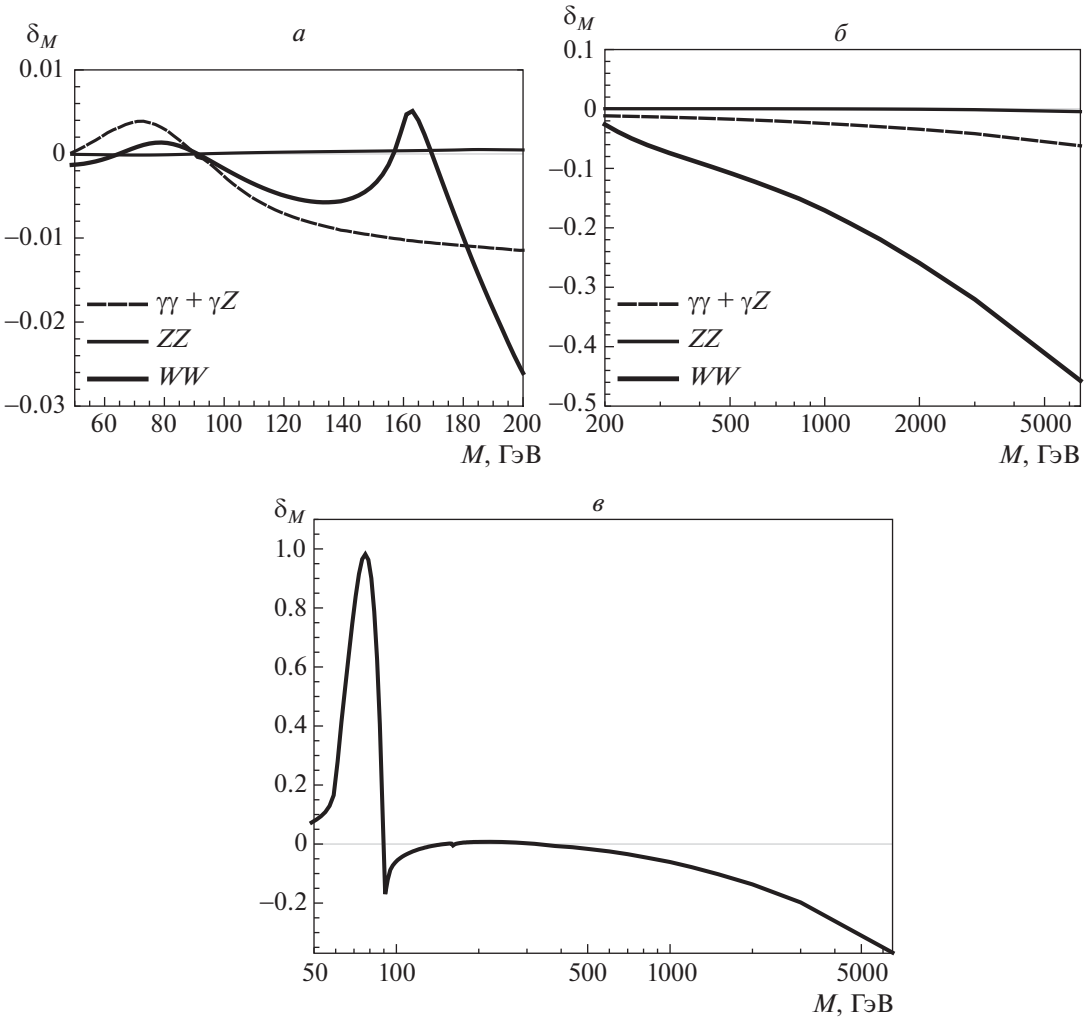

Рис. 9. Относительные поправки δ_M к дифференциальному сечению процесса Дрелла–Яна в зависимости от инвариантной массы димюона: *а* — вклады боксов в LE- и RE-режимах, *б* — вклады боксов в HE-режиме, *в* — полная ЭСП.

ZGRAD [21] было проделано в [19], как видно из приведенных здесь результатов, согласие с результатами этих групп распространяется и на RE-режим. На рис. 9 показаны относительные поправки

$$\delta_M^C = \frac{d\sigma_{\rm DY}^C/dM}{d\sigma_{\rm DY}^0/dM}$$

к дифференциальному сечению процесса Дрелла–Яна в зависимости от инвариантной массы димюона M: *а* — вклады боксов в LE- и RE-режимах, *б* — боксы в HE-режиме, *в* — полная электрослабая поправка (ЭСП). Наконец, на рис. 10 приведены асимметрия вперед-назад $A_{\rm FB}$ в борновском приближении, $A_{\rm FB}$ с учетом ЭСП и их разница для процесса Дрелла–Яна в зависимости от инвариантной массы димюона: *а*, *в* — в LE- и RE-режимах, *б*, *г* — в HE-режиме. Расчет произведен с помощью программы автора READY (версия 9.0). Были использованы партонные распределения [22], “bare” setup, стандартные ограничения эксперимента CMS (в частности, для рис. 10 применялось ограничение на быстроту димюона $|y| < 2.5$). Сравнивая оценки READY с результатами аналогичных расчетов, проведенных другими группами, приведенных в работе [23], можно убедиться в хорошем согласии во всех изученных областях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описана новая техника расчета вклада в сечение процесса с произвольными поляризованными фермионами диаграмм двухбозонного обмена как части ЭСП. Проведена успешная сверка полученных результатов с асимптотическими выражениями для энергий ниже и выше Z-резонанса. Преимущества нового метода:

1. для вклада ДО получены простые аналитические выражения без особенностей, позволяющие получить точную оценку, которая надежно контролируется,

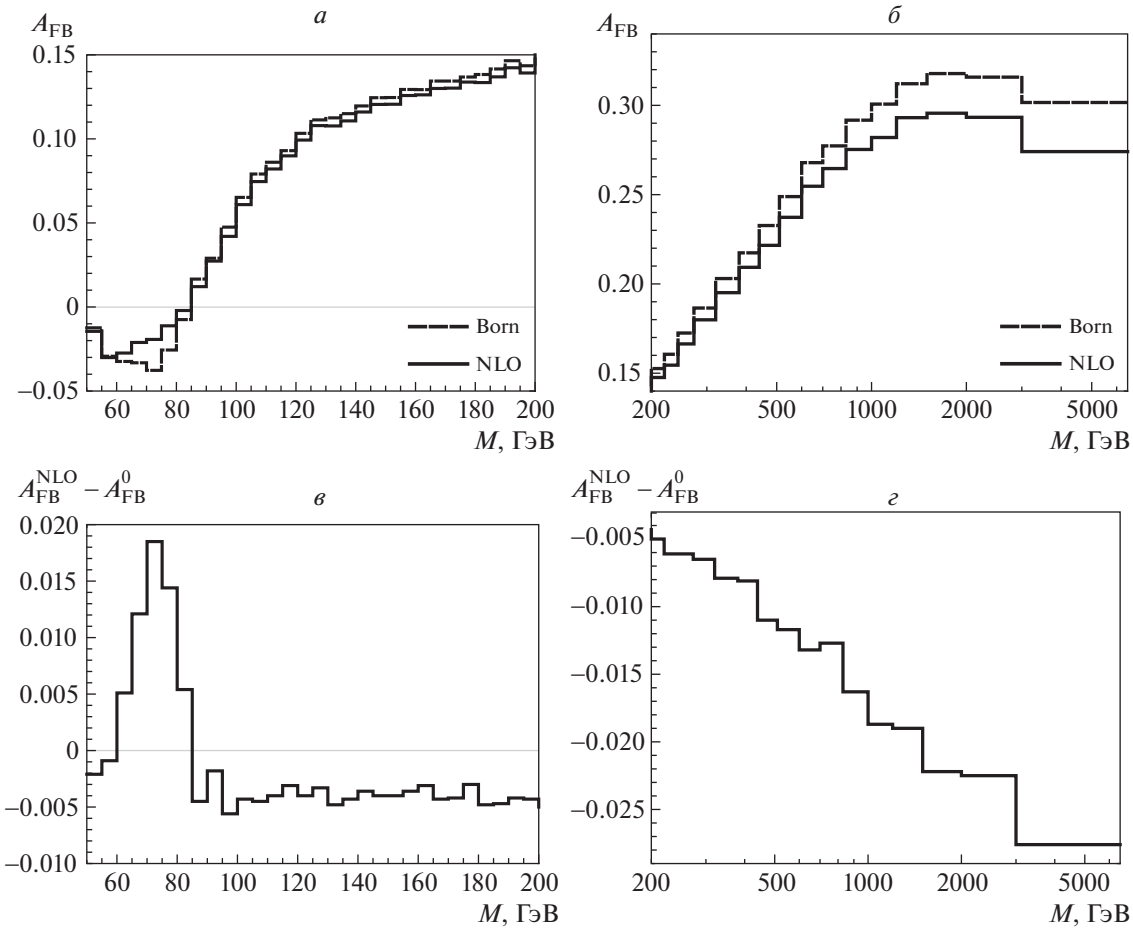

Рис. 10. Асимметрия вперед-назад в борновском приближении и с учетом ЭСП для процесса Дрелла–Яна в зависимости от инвариантной массы димюона: *а* — в LE- и RE-режимах, *б* — в HE-режиме. Разница между асимметрией вперед-назад с учетом ЭСП и асимметрией вперед-назад в борновском приближении для процесса Дрелла–Яна в зависимости от инвариантной массы димюона: *в* — в LE- и RE-режимах, *г* — в HE-режиме.

2. в явном виде представлены действительная и мнимая части,

3. в расчете не возникают ультрафиолетовые расходимости, которые появляются при редукции Вельтмана–Пассарино [16] в 2-точечных функциях,

4. может быть распространена на взаимодействие, отличное от стандартно-модельного $V-A$ типа: контактное (скалярное) взаимодействие, присутствие аномальных вершин, Z'-бозона, W'-бозона и другое.

Указанные преимущества полезны в круге физических задач, ограниченных одной петлей и s-каналом: фермион-антифермионная аннигиляция (в том числе в канале с заряженным током), процесс Дрелла–Яна, рождение одиночных W-бозонов в протонных столкновениях, расчета распадов мезонов и т.д. Вышесказанное относится и к моделям Новой физики, например тем, в которых присутствует дополнительный бозон (Z', W', “тяжелый” фотон и т.д.).

Недостатком подхода является то, что по двум фейнмановским параметрам x и y нужно безальтернативно интегрировать численно. Тем не менее, как показал численный анализ, полученные выражения точно и быстро численно рассчитываются во всей доступной экспериментам области энергий и углов. Можно использовать любой алгоритм численного интегрирования (например, метод прямоугольников или метод Симпсона). Выбор тем не менее был оставлен за Монте-Карло техникой, поскольку она удобна для применения в конкретной обстановке физического эксперимента (в работе сделано приложение к расчету реакции Дрелла–Яна на эксперименте CMS LHC). Итак, используя Монте-Карло интегратор VEGAS [9], получаем относительную точность интегрирования порядка 10^{-4} при затраченном времени ~ 0.1 с работы процессора с тактовой частотой 1.2 ГГц на одну кинематическую точку.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция–2020” (подпрограмма “Микромир и Вселенная”). Автор признателен коллегам по группе RDMS CMS и Ю.М. Быстрицкому за обсуждение. Численный расчет относительных поправок к процессу Дрелла–Яна с помощью READY проведен на Гетерогенной платформе HybriLIT Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Приложение А

РАСЧЕТ 3-ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Скалярная 3-точечная функция H_0, встречающаяся в (35), определяется так:

$$H_0^a = H_0^a\left(p_1, p_3\right) = \tag{П.1}$$
$$= \int \frac{dk}{i\pi^2} \frac{1}{\left(k^2 - m_a^2\right)\left(k^2 - 2p_1k\right)\left(k^2 - 2p_3k\right)}.$$

Расчет интегралов такого типа нетрудно осуществить методом ’т Хоофта–Велтмана [2] (подробное вычисление можно найти, например, в [18]). Для случая $a = \gamma$ в УРП получаем компактное выражение, симметричное относительно замены $m_q \leftrightarrow m_l$:

$$H_0^\gamma\left(p_1, p_3\right) = \frac{1}{t}\left(\ln\frac{-t}{\lambda^2}\ln\frac{-t}{m_q m_l} - \right. \tag{П.2}$$
$$\left. - \frac{1}{2}\ln\frac{-t}{m_q^2}\ln\frac{-t}{m_l^2} - \ln^2\frac{m_q}{m_l} - \frac{1}{6}\pi^2\right).$$

Аналогичная формула для $H_0^\gamma\left(p_1, p_4\right)$ получается заменой $t \to u$.

Скалярная 3-точечная функция F_0 из (35) определяется так:

$$F_0^b = \int \frac{dk}{i\pi^2} \times \tag{П.3}$$
$$\times \frac{1}{\left((k-q)^2 - m_b^2\right)\left(k^2 - 2p_1k\right)\left(k^2 - 2p_3k\right)}.$$

Заменой $k \to k + q$ ее нетрудно привести к виду (П.1) (так доказывается, что $F_0^b = H_0^b$), затем рассчитать по технологии [2]. Результатом (для $b = Z$) будет нетривиальная комбинация 12 дилогарифмов. Покажем здесь, как методом, примененным для 4-точечных интегралов, получить простые формулы и в случае 3-точечной функции.

Итак, после замены переменной интегрирования интеграл выглядит так:

$$H_0^Z = \int \frac{dk}{i\pi^2} \times \tag{П.4}$$
$$\times \frac{1}{\left(k^2 - m_Z^2\right)\left(k^2 - 2p_1k\right)\left(k^2 - 2p_3k\right)}.$$

Выбирая $A = k^2 - m_Z^2$, $B = k^2 - 2p_1k$, $C = k^2 - 2p_3k$, получим

$$H_0^Z = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 ydy \int \frac{dk}{i\pi^2}\frac{1}{E^3}, \tag{П.5}$$
$$E = (Ax + B\bar{x})y + C\bar{y}.$$

После преобразований получим

$$E = k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta,$$
$$\mathcal{P} = \bar{x}y \cdot p_1 + \bar{y} \cdot p_3, \quad \Delta = -m_Z^2 \cdot xy.$$

Квадрат 4-вектора $\mathcal{P}$ положителен в любой точке области интегрирования:

$$\mathcal{P}^2 = m_q^2 \cdot \bar{x}y(1 - xy) + \tag{П.6}$$
$$+ m_l^2 \cdot \bar{y}(1 - xy) - t \cdot \bar{x}y\bar{y}.$$

Снимая интеграл по известной формуле

$$2\int \frac{dk}{i\pi^2}\frac{1; k_\alpha}{[k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta]^3} = \tag{П.7}$$
$$= -\frac{1; \mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}^2 - \Delta},$$

получим

$$H_0^Z = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{ydy}{\mathcal{E} - i\epsilon_Z \cdot xy}, \tag{П.8}$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{P}^2 + m_Z^2 \cdot xy.$$

В результате получим компактные выражения

$$\mathrm{Re}\, H_0^Z = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \frac{\mathcal{E} \cdot y}{\mathcal{E}^2 + \epsilon_Z^2 \cdot x^2y^2},$$
$$\mathrm{Im}\, H_0^Z = -\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \frac{\epsilon_Z \cdot xy^2}{\mathcal{E}^2 + \epsilon_Z^2 \cdot x^2y^2}.$$

Для сравнения представим здесь аналитический результат, полученный методом [2] (подробный вывод приведен в [18]). В конечном счете (максимально имеем шестикратную вложенность выражений) он зависит от шести параметров

$$a = m_q^2, \quad b = m_q^2 + m_l^2 - 2p_1p_3,$$
$$c = -2m_q^2 + 2p_1p_3,$$
$$d = -f = -m_Z^2 + i\epsilon_Z, \quad e = 0$$

и представляется в виде комбинаций дилогарифмов:

$$H_0^Z = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{3} F_1^{(i)}, \tag{П.9}$$

$$F_1^{(i)} = \mathrm{Li}_2\frac{\alpha_i}{y_i^-} - \mathrm{Li}_2\frac{\beta_i}{y_i^-} + \mathrm{Li}_2\frac{\alpha_i}{y_i^+} - \mathrm{Li}_2\frac{\beta_i}{y_i^+}.$$

Дилогарифм — частный случай полилогарифма — определяется при $z \in \mathbb{C}$ так:

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int\limits_0^z \frac{\ln(1-t)}{t}dt. \qquad (\text{П}.10)$$

Расчет значений дилогарифма с необходимой точностью проводят через разложение в ряд: $\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$. Чтобы аргумент z попал в область сходимости, обычно сводят дилогарифм к какой-либо комбинации дилогарифма с другим аргументом и других функций, пользуясь одним из многих имеющихся тождеств, например:

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\mathrm{Li}_2\Big(\frac{1}{z}\Big) - \frac{1}{2}\ln^2(-z) - \frac{1}{6}\pi^2. \qquad (\text{П}.11)$$

В выражении (П.9) $\beta = c + 2\alpha b$, а остальные коэффициенты такие:

$$\alpha_1 = \beta_2 = 1 - \alpha - y_0, \quad \alpha_2 = \beta_3 = -y_0,$$
$$\alpha_3 = \beta_1 = -\alpha - y_0, \quad y_0 = -\frac{d + \alpha e}{\beta}.$$

Выражение α выбирается двузначно, конечный результат от выбора знака не зависит:

$$\alpha = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2b}.$$

Выражения $y_i^{\pm}$ являются корнями уравнения $A_i y^2 + B_i y + 1 = 0$ с коэффициентами, зависящими от K_0 и γ ($K_0 = by_0^2 + ey_0 + f$, $\gamma = 2by_0 + e$), так что

$$A_1 K_0 = b,$$
$$A_2 K_0 = b + \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad A_3 K_0 = b + \frac{\beta}{-\alpha},$$
$$B_1 K_0 = \gamma + c + 2b\alpha,$$
$$B_2 K_0 = \gamma + y_0\frac{\beta}{1-\alpha}, \quad B_3 K_0 = \gamma + y_0\frac{\beta}{-\alpha}.$$

Приложение Б

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

В расчете встретились следующие интегралы:

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} = \int\limits_0^1 \frac{zdz}{\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C}}, \qquad (\text{П}.12)$$

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{B}} = \int\limits_0^1 \frac{z^2dz}{(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})^2},$$

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} = \int\limits_0^1 \frac{zdz}{(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})^2},$$

$$\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} = \int\limits_0^1 \frac{dz}{(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})^2}.$$

Приведем вычисленные выражения:

$$\mathrm{Re}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mathcal{A}^2}\Big(\mathcal{A} + \mathcal{C}\,\mathcal{G}_{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\,\mathcal{G}_{\mathcal{L}}\Big), \qquad (\text{П}.13)$$
$$\mathrm{Im}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{\mathcal{A}^2}\Big(\mathcal{B}\,\mathcal{G}_{\mathcal{A}} + \mathcal{C}\,\mathcal{G}_{\mathcal{L}}\Big),$$
$$\mathrm{Re}\mathcal{Y}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mathcal{A}}\Big(2\mathrm{Re}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} - \frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{\mathcal{D}}\Big),$$
$$\mathrm{Im}\mathcal{Y}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{\mathcal{A}}\Big(2\mathrm{Im}\mathcal{Y}_{\mathcal{A}} - \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}\Big),$$
$$\mathrm{Re}\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{A}^2}\Big(-\frac{\mathcal{A}(\mathcal{A}+\mathcal{B})}{\mathcal{D}} + \mathcal{G}_{\mathcal{L}}\Big),$$
$$\mathrm{Im}\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{\mathcal{A}^2}\Big(-\frac{\mathcal{A}\,\mathcal{C}}{\mathcal{D}} - \mathcal{G}_{\mathcal{A}}\Big),$$
$$\mathrm{Re}\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{B}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) - \mathcal{C}^2}{(\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2)\mathcal{D}},$$
$$\mathrm{Im}\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} = \frac{(\mathcal{A}+2\mathcal{B})\mathcal{C}}{(\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2)\mathcal{D}}.$$

Используются следующие сокращения:

$$\mathcal{D} = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 + \mathcal{C}^2, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}, \qquad (\text{П}.14)$$
$$\mathcal{G}_{\mathcal{A}} = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}} - \mathrm{arctg}\,\frac{\mathcal{A}+\mathcal{B}}{\mathcal{C}}.$$

В точке резонанса $q^2 = m_Z^2$ получаем:

$$\mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \ln\frac{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{C}^2}}{\mathcal{C}}, \quad \mathcal{G}_{\mathcal{A}} = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}}.$$

Приложение В

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ LE- И HE-РЕЖИМОВ

Чтобы получить LE-формулы для γZ-бокса, нужно воспользоваться общим выражением через коэффициенты и занулить все, кроме b_0 и интеграла H_0^{γ} из I_0 (это доказано, например, в [18], см. также ссылки там). Для b_0 (прямого бокса) используем асимптотическое выражение:

$$b_0^{\gamma Z,\mathrm{LE}} = -\frac{1}{4m_Z^2}\Big(\frac{3}{2} + \log\frac{m_Z^2}{-t}\Big). \qquad (\text{П}.15)$$

Для ZZ-бокса важен только тензорный коэффициент b_0:

$$b_0^{ZZ,\mathrm{LE}} = -\frac{1}{4m_Z^2}. \qquad (\text{П}.16)$$

Чтобы получить HE-формулы, воспользуемся асимптотическими выражениями для прямых боксов (они работают для всех случаев: $ab = \gamma\gamma, \gamma Z, ZZ, WW$):

$$\mathcal{M}_D^{ab}\mathcal{M}_0^{c+} = +\frac{2C_s}{s}\Big[C_3^{abc}l_{st}^2(3t^2+u^2) + C_4^{abc}l_{st}^2(u^2-t^2) + 2C_{3+4}^{abc}l_{st}su\Big] - 2C_s t\Pi_3^{ab}(q)H_{ss}^{abc}. \quad (\text{П}.17)$$

Для перекрестных боксов получим:

$$\mathcal{M}_C^{ab}\mathcal{M}_0^{c+} = -\frac{2C_s}{s}\Big[C_3^{abc}l_{su}^2(t^2+3u^2) + C_4^{abc}l_{su}^2(u^2-t^2) + 2C_{3-4}^{abc}l_{su}st\Big] + 2C_s u\Pi_4^{ab}(q)H_{ss}^{abc}. \quad (\text{П}.18)$$

Здесь $C_{i\pm j}^{abc} = C_i^{abc} \pm C_j^{abc}$, также используются следующие сокращения:

$$H_{ss}^{abc} = 2\big[C_3^{abc}(u^2+t^2) + C_4^{abc}(u^2-t^2)\big], \quad (\text{П}.19)$$

$$l_{r_1r_2} = \ln\frac{|r_1|}{|r_2|}.$$

Перед пропагаторными структурами факторизуются трехточечные функции:

$$\Pi_{3,4}^{ab}(q) = H_0^a(p_1,p_{3,4})D_b(q) + H_0^b(p_1,p_{3,4})D_a(q). \quad (\text{П}.20)$$

Выпишем в явном виде ИКР-части $\gamma\gamma$-бокса:

$$M_D^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_0^{c+}|^{\text{IR}} = -16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \times D_\gamma(q)D_c^*(q)\cdot R_q^{\gamma\gamma c}\cdot tH_0^\gamma(p_1,p_3), \quad (\text{П}.21)$$

$$M_C^{\gamma\gamma}\mathcal{M}_0^{c+}|^{\text{IR}} = +16\pi\alpha^3 Q_q Q_l \times D_\gamma(q)D_c^*(q)\cdot R_q^{\gamma\gamma c}\cdot uH_0^\gamma(p_1,p_4),$$

где “борновское” R_q [см. формулу (15)] связано с комбинациями $C_{3,4}$ соотношениями:

$$Q_q Q_l R_q^{aac} = 2\big[C_3^{a\gamma c}(u^2+t^2) + C_4^{a\gamma c}(u^2-t^2)\big]. \quad (\text{П}.22)$$

ИКР-части γZ-бокса такие же по форме, как выражения (П.21):

$$M_D^{\gamma Z}\mathcal{M}_0^{c+}|^{\text{IR}} = -8\pi\alpha^3 Q_q Q_l \times D_Z(q)D_c^*(q)\cdot R_q^{ZZc}\cdot tH_0^\gamma(p_1,p_3), \quad (\text{П}.23)$$

$$M_C^{\gamma Z}\mathcal{M}_0^{c+}|^{\text{IR}} = +8\pi\alpha^3 Q_q Q_l \times D_Z(q)D_c^*(q)\cdot R_q^{ZZc}\cdot uH_0^\gamma(p_1,p_4).$$

Понятно, что IR-части $Z\gamma$-бокса дадут такой же вклад и, следовательно, в сумме удвоение. В результате IR-часть сечения от боксовских диаграмм такая:

$$\frac{d\sigma_{\text{IR}}^{\text{Box}}}{dt} = -\frac{2\alpha^3}{s^2}Q_q Q_l \times \sum_{a,c=\gamma,Z}\Pi^{ac}R_q^{aac}\Big[tH_0^{\gamma,\text{IR}}(p_1,p_3) - (t\leftrightarrow u)\Big], \quad (\text{П}.24)$$

где

$$tH_0^{\gamma,\text{IR}}(p_1,p_3) = \ln\frac{s}{\lambda^2}\ln\frac{-t}{m_q m_l}.$$

Приложение Г

СВОДКА СОКРАЩЕННЫХ ФОРМУЛ

Дадим для справочных целей упрощенный вариант формул для действительной части сечения ДО:

$$\frac{d\sigma^{ab}}{dt} = \frac{2\alpha^3}{s^2}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,\text{Re}\times \sum_{c=\gamma,Z}D_c^*(q)\Big(C_3^{abc}[\mathcal{K}_3^{\mathcal{D}}+\mathcal{K}_3^{\mathcal{C}}] + C_4^{abc}[\mathcal{K}_4^{\mathcal{D}}+\mathcal{K}_4^{\mathcal{C}}]\Big), \quad (\text{П}.25)$$

где коэффициенты в сечении (их происхождение легко проследить по тексту статьи) выглядят так:

$$\mathcal{K}_3^{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_0^{\mathcal{D}}t(t^2+u^2) + 2\mathcal{B}_0^{\mathcal{D}}(4t^2+u^2) - 2\mathcal{C}_1^{\mathcal{D}}st^2 - \mathcal{B}_4^{\mathcal{D}}t(2t^2+u^2), \quad (\text{П}.26)$$

$$\mathcal{K}_4^{\mathcal{D}} = \mathcal{C}_0^{\mathcal{D}}t(u^2-t^2) + 2\mathcal{B}_0^{\mathcal{D}}(u^2-4t^2) + 2\mathcal{C}_1^{\mathcal{D}}st^2 + \mathcal{B}_4^{\mathcal{D}}t(2t^2-u^2),$$

$$\mathcal{K}_3^{\mathcal{C}} = -\mathcal{K}_3^{\mathcal{D}}|_{t\leftrightarrow u}, \quad \mathcal{K}_4^{\mathcal{C}} = +\mathcal{K}_4^{\mathcal{D}}|_{t\leftrightarrow u}.$$

Формулы (П.25), (П.26) работают для всех случаев (γZ и ZZ), коэффициенты же $\mathcal{C}_{0,1}$ и $\mathcal{B}_{0,4}$ разные, приведем их. Для прямого γZ-бокса $\mathcal{C}_{0,1}$ и $\mathcal{B}_{0,4}$ выглядят так:

$$\mathcal{C}_0^{\mathcal{D}} = y\big[1-xy-(1+xy)\cdot sD_Z\big]\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - D_Z\Big[H_0^\gamma + \frac{\mathcal{E}y}{\mathcal{E}^2+\epsilon_Z^2x^2y^2}\Big],$$

$$\mathcal{B}_0^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2}y\mathcal{Y}_{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{C}_1^{\mathcal{D}} = xy^2\big[\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} + (1-2xy)\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}\big],$$

$$\mathcal{B}_4^{\mathcal{D}} = \bar{x}y^2\bar{y}\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}.$$

Для прямого ZZ-бокса выражения $\mathcal{C}_{0,1}$ и $\mathcal{B}_{0,4}$ такие:

$$\mathcal{C}_0^{\mathcal{D}} = -y^2\mathcal{Y}_{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{B}_0^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2}y\mathcal{Y}_{\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{C}_1^{\mathcal{D}} = x\bar{x}y^3\mathcal{Y}_{\mathcal{B}}, \quad \mathcal{B}_4^{\mathcal{D}} = y\bar{y}\big[\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}\big].$$

Выражение H_0^γ определяется формулой (П.2), $\mathcal{E}$ — формулой (П.8). Выражения $\mathcal{Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{S}}$ приведены в Приложении Б. Они зависят от значений коэффициентов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, которые приведены в табл. 1 для различных конфигураций бозонов в прямой диаграмме.

Таблица 1. Коэффициенты $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ для различных конфигураций бозонов в прямом боксе

Случай	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$
γZ	$(m_q^2 \cdot \bar{y} + m_l^2 \cdot \bar{x}y)(1-xy) - t \cdot \bar{x}y\bar{y} + s \cdot xy$	$(m_Z^2 - s) \cdot xy$	$\epsilon_Z \cdot xy$
ZZ	$t \cdot \bar{y} - s \cdot x\bar{x}y^2$	$-t \cdot \bar{y} + m_Z^2 \cdot y$	$\epsilon_Z \cdot y$
WW	$t \cdot \bar{y} - s \cdot x\bar{x}y^2$	$-t \cdot \bar{y} + m_W^2 \cdot y$	$\epsilon_W \cdot y$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Kahane, Phys. Rev. B **135**, 975 (1964).
2. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
3. W. Spence, *An Essay on the Theory of the Various Orders of Logarithmic Transcendants* (London, London and Edinburgh, 1809).
4. A. Denner, U. Nierste, and R. Scharf, Nucl. Phys. B **367**, 637 (1991).
5. M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik, Fortschr. Phys. **34**, 687 (1986).
6. G. J. van Oldenborgh and J. A. M. Vermaseren, Z. Phys. C **46**, 425 (1990).
7. T. Hahn and M. Pérez-Victoria, Comput. Phys. Commun. **118**, 153 (1999); hep-ph/9807565.
8. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
9. P. G. Lepage, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978).
10. T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **168**, 78 (2005); hep-ph/0404043.
11. A. V. Smirnov and M. N. Tentyukov, Comput. Phys. Commun. **180**, 735 (2009); arXiv: 0807.4129 [hep-ph]
12. S. Borowka, G. Heinrich, S. P. Jones, M. Kerner, J. Schlenk, and T. Zirke, Comput. Phys. Commun. **196**, 470 (2015); arXiv: 1502.06595v2 [hep-ph].
13. E. Remiddi and J. A. M. Vermaseren, Int. J. Mod. Phys. A **15**, 725 (2000); hep-ph/9905237.
14. C. Bauer and H. S. Do, Comput. Phys. Commun. **144**, 154 (2002); hep-ph/0102231.
15. J. Broedel, C. Duhr, F. Dulat, B. Penante, and L. Tancredi, JHEP **1905**, 120 (2019); arXiv: 1902.09971[hep-ph].
16. G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
17. Particle Data Group (P. A. Zyla *et al.*), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).
18. В. А. Зыкунов, *Пертурбативные расчеты в физике высоких энергий* (ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2020).
19. V. A. Zykunov, Phys. Rev. D **75**, 073019 (2007); hep-ph/0509315.
20. A. Andonov, A. Arbuzov, D. Bardin, S. Bondarenko, P. Christova, L. Kalinovskaya, G. Nanava, and W. von Schlippe, Comput. Phys. Commun. **174**, 481 (2006); hep-ph/0411186.
21. U. Baur, O. Brein, W. Hollik, C. Schappacher, and D. Wackeroth, Phys. Rev. D **65**, 033007 (2002); hep-ph/0108274.
22. Jun Gao, Marco Guzzi, Joey Huston, Hung-Liang Lai, Zhao Li, Pavel Nadolsky, Jon Pumplin, Daniel Stump, and C.-P. Yuan, Phys. Rev. D **89**, 033009 (2014); arXiv: 1302.6246[hep-ph].
23. C. Buttar, J. D'Hondt, M. Krämer, G. Salam, M. Wobisch, N. E. Adam, V. Adler, A. Arbuzov, D. Bardin, U. Baur, A. A. Bhatti, S. Bondarenko, V. Buge, J. M. Butterworth, M. Cacciari, M. Campanelli, *et al.*, in *Proceedings of the Workshop on Physics at TeV Colliders* (Les Houches, 2007), p. 121; arXiv: 0803.0678[hep-ph].

CALCULATION OF TWO-BOSON EXCHANGE WITH COMPLEX MASSES

V. A. Zykunov[1),2)]

[1)] *JINR, Dubna, Moscow region, Russia*
[2)] *Francisk Skorina Gomel State University, Belarus*

New technique for calculation of two-boson-exchange diagram (boxes) contribution to four-fermion cross section with one and two complex masses is described. The detailed numerical analysis of results and comparison with asymptotic estimations for energy regions below and above Z resonance is done.