

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НОРМИРОВОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПУТЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

© 2022 г. Л. Д. Блохинцев¹⁾*, Д. А. Савин¹⁾

Поступила в редакцию 18.10.2021 г.; после доработки 18.10.2021 г.; принята к публикации 28.10.2021 г.

Обсуждается метод определения асимптотических нормировочных коэффициентов (АНК) путем аналитического продолжения экспериментальных дифференциальных сечений ядерных реакций передачи в точку полюса амплитуды реакции по переменной $\cos \theta$, где θ — угол рассеяния. В рамках этого метода с использованием экспериментальных данных по дифференциальному сечению реакции $^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ})(d, p)^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ})$ определен АНК для канала $^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ}) \rightarrow ^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ}) + n$. При определении АНК учитывались поправки, вызванные кулоновским взаимодействием в начальном, конечном и промежуточном состояниях реакции. Показано, что эти поправки существенно влияют на извлекаемое значение АНК.

DOI: 10.31857/S0044002722020039

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотические нормировочные коэффициенты (АНК) определяют асимптотику волновых функций связанных ядерных состояний a в бинарных каналах $b + c$ и выражаются через вычет по энергии парциальной амплитуды упругого bc -рассеяния в полюсе, отвечающем энергии связи системы a [1]. АНК являются фундаментальными ядерными характеристиками, важными как в физике ядерных реакций, так и в физике структуры ядра. АНК — это наблюдаемые *on-shell* величины, в отличие от часто используемых спектроскопических факторов, которые являются величинами вне энергетической поверхности и не могут быть надежно извлечены из экспериментальных данных. Роль АНК особенно велика при определении сечений ядерных реакций с заряженными частицами при низких энергиях, недоступных для прямого измерения из-за большого кулоновского барьера. Важнейшим классом таких процессов являются астрофизические ядерные реакции, протекающие в ядрах звезд, включая Солнце. Важная роль АНК в ядерной астрофизике была впервые отмечена в работе [2], в которой было показано, что АНК определяют общую нормировку сечений периферических реакций радиационного захвата (см. также работы [3–5]). Результаты расчетов АНК в рамках

различных подходов существенно зависят от используемой теоретической модели. При этом АНК оказываются заметно более чувствительными к модели, чем такие величины, как энергии связи или среднеквадратичные радиусы. Это обстоятельство позволяет использовать сравнение рассчитанных и экспериментальных значений АНК для оценки качества теоретических моделей.

Из вышесказанного следует важность знания АНК и включения их в число важных ядерных характеристик наряду с такими величинами, как энергии связи, вероятности электромагнитных переходов и др. АНК не могут быть непосредственно измерены в эксперименте, для их определения нужно проводить специальный анализ экспериментальных данных.

АНК могут быть определены из анализа сечений периферических реакций передачи в рамках метода искаженных волн. Этот способ определения АНК основан на утверждении, что сечения периферических реакций следует параметризовать в терминах АНК, а не спектроскопических факторов [4]. Значения АНК могут быть также извлечены из данных по реакциям радиационного захвата при низких энергиях [2, 6].

Существуют подходы, специально разработанные для определения АНК без использования предположений, основанных на конкретных ядерных моделях. Одним из таких подходов является метод, основанный на аналитическом продолжении по энергии парциальных амплитуд упругого рассеяния, определенных из фазового

¹⁾Институт ядерной физики имени Д.В. Скобельцына Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

*E-mail: blokh@srd.sinp.msu.ru

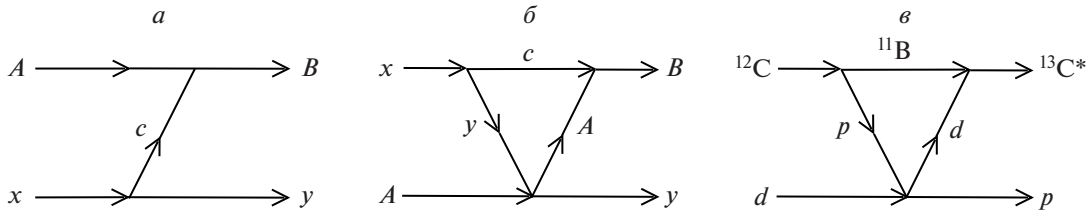


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для реакции $A + x \rightarrow B + y$.

анализа экспериментальных данных, в точку полюса, расположенную в нефизической области отрицательных энергий (см., например, работы [7, 8] и ссылки в них). Однако достаточно точных результатов фазовых анализов в опубликованных источниках не так много, что ограничивает область применимости этого метода. В настоящей работе для определения АНК используется метод, также основанный на аналитическом продолжении, но не парциальных амплитуд по энергии, а экспериментальных дифференциальных сечений (ДС) ядерных реакций передачи по переменной $z = \cos \theta$, где θ — угол рассеяния в системе центра масс. В дальнейшем будем использовать для ДС обозначение $\sigma(E, z)$.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 излагается общий формализм используемого метода. Раздел 3 посвящен применению этого метода для определения АНК для конкретной ядерной системы. Полученные результаты кратко обсуждаются в разд. 4.

В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

2. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

2.1. Формализм метода для короткодействующего взаимодействия

Для лучшего понимания используемого подхода изложим сначала его формализм в отсутствие дальнедействующего кулоновского взаимодействия. Учет кулоновских эффектов, которые могут быть существенными, будет рассмотрен в последующих разделах.

Идея метода восходит к работе Д.Ф. Чью [9], в которой было указано, что экстраполяция по $\cos \theta$ ДС упругого NN -рассеяния в полюс, отвечающий виртуальному пиону, может быть использована для определения константы пион-нуклонной связи. В нашем случае речь идет о бинарной ядерной реакции



с передачей частицы c , вклад в амплитуду которой дает полюсная диаграмма Фейнмана (рис. 1а), которую мы будем называть диаграммой 1а. При

фиксированной энергии соударения амплитуда этой диаграммы имеет полюс по $z = \cos \theta$, где θ — угол между направлениями импульсов частиц x и y в системе центра масс. Полюс $z = z_p$ лежит в нефизической области $z_p > 1$ и определяется выражением [1]:

$$z_p = [(1 + g^2)E + \varepsilon_{BAc} - g^2 \varepsilon_{xyc}] / (2g\sqrt{EE'}). \quad (2)$$

Здесь $E(E')$ — относительная кинетическая энергия в начальном (конечном) состоянии, $E' = E + Q$, $Q = m_A + m_x - m_B - m_y$, $\varepsilon_{ijk} = m_j + m_k - m_i$ — энергия связи ядра i в канале $j + k$, $g^2 = m_y m_A / (m_x m_B)$, m_i — масса ядра i .

Ввиду вклада механизма, отвечающего диаграмме 1а, ДС $\sigma(E, z)$ реакции (1) имеет полюс второго порядка при $z = z_p$. Введем величину

$$\varphi(E, z) = (z - z_p)^2 \sigma(E, z). \quad (3)$$

$\varphi(E, z)$ имеет конечный предел при $z \rightarrow z_p$ и поэтому может быть аппроксимирована в виде

$$\varphi(E, z) = \sum_{n=0}^N c_n(E) P_n(z), \quad (4)$$

где $P_n(z)$ — некоторые полиномы. В частности, в качестве $P_n(z)$ можно взять просто z^n . Идея метода, который мы будем называть методом продолжения в полюс (МПП), состоит в том, что коэффициенты $c_n(E)$ в (4) подгоняются по экспериментальным значениям $\varphi(E, z)$ в физической области $-1 \leq z \leq 1$ методом χ^2 , после чего аппроксимированная величина $\varphi(E, z)$ аналитически продолжается в нефизическую область значений z вплоть до $z = z_p$. В точке $z = z_p$ вклад неплюсных механизмов в $\varphi(E, z)$ обращается в нуль ввиду наличия в определении (3) множителя $(z - z_p)^2$, а оставшийся вклад полюсного механизма рис. 1а выражается через АНК, отвечающие вершинам $x \rightarrow y + c$ и $A + c \rightarrow B$. Для этих АНК в данной работе мы будем использовать обозначения $C_{xyc}(L_x S_x)$ и $C_{BAc}(L_B S_B)$, где L_x (L_B) и S_x (S_B) — орбитальный угловой момент и спин в канале $y + c$ ($A + c$).

Общее выражение для вклада полюсного механизма в ДС реакции (1) для произвольной диаграммы 1a, выраженное через так называемые вершинные константы, приведено в [1]. Оно упрощается в случае, когда спин передаваемой частицы s равен 0 или 1/2. В этом случае, используя формулы работы [1] и известную связь между вершинными константами и АНК, можно получить соотношение

$$\sum_{L_x, S_x} C^2(L_x S_x) \sum_{L_B, S_B} C^2(L_B S_B) = \quad (5)$$

$$= 16 \frac{(2J_A + 1)(2J_c + 1)}{2J_B + 1} g^4 m_c^2 \frac{p}{p'} E E' R(E).$$

В (5) J_i — спин частицы i , \mathbf{p} (\mathbf{p}') — относительный импульс частиц в начальном (конечном) состоянии, $p^2 = 2\mu_{xA}E$, $p'^2 = 2\mu_{yB}E'$, $\mu_{ij} = m_i m_j / (m_i + m_j)$ — приведенная масса частиц i и j . Множитель $R(E)$ определен как

$$R(E) = \lim_{z \rightarrow z_p} \varphi(E, z) = \quad (6)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_p} [(z - z_p)^2 \sigma(E, z)].$$

Найдя на основе экспериментальных данных величину $R(E)$, можно определить стоящее в левой части (5) произведение квадратов АНК. Если при этом значения АНК для одной из вершин известны (например, если это вершина $d \rightarrow n + p$), то из (5) и (6) будет получена информация об АНК для второй вершины.

Следует отметить одно обстоятельство, которое может осложнить практическое применение описанного выше МПП в случае, когда основной (или единственный) вклад хотя бы в одну из вершин диаграммы 1a дают АНК с ненулевыми значениями углового момента L . Дело в том, что вершинные формфакторы для трехлучевой вершины $a \leftrightarrow b + c$ содержат множитель q_{bc}^L , где \mathbf{q}_{bc} — относительный импульс частиц b и c . Поэтому, если $L > 0$, то при $q_{bc} = 0$ соответствующий формфактор обращается в нуль. Рассмотрим конкретную ситуацию, когда на диаграмме 1a в вершине $x \rightarrow y + c$ $L_{yc} = 0$, а в вершину $A + c \rightarrow B$ вклад дает единственное значение $L_{Ac} > 0$. При $q_{Ac} = 0$ вершинный формфактор в вершине $A + c \rightarrow B$ обращается в нуль и, следовательно, обращается в нуль вклад полюсного механизма в сечение $\sigma(E, z)$ и в величину $\varphi(E, z)$. Из закона сохранения импульса в вершинах диаграмм Фейнмана следует, что $\mathbf{q}_{Ac} = -\mathbf{p} + (m_A/m_B)\mathbf{p}'$, откуда

$$q_{Ac}^2 = p^2 + (m_A/m_B)^2 p'^2 - 2(m_A/m_B) p p' z, \quad (7)$$

$$z = \mathbf{p}\mathbf{p}'/pp' = \cos \theta.$$

Из (7) следует, что значению $q_{Ac} = 0$ отвечает значение $z = z_0$,

$$z_0 = \frac{p^2 + (m_A/m_B)^2 p'^2}{2(m_A/m_B) p p'}. \quad (8)$$

С другой стороны, в точке полюса вершинные формфакторы на диаграмме 1a выходят на массовую поверхность, т.е. в полюсе $q_{Ac}^2 = -\kappa_{BAc}^2$, $\kappa_{BAc} = \sqrt{2\mu_{Ac}\epsilon_{BAc}}$. Поэтому из (7) следует, что полюсное значение $z = z_p$ может быть записано в виде

$$z_p = \frac{p^2 + (m_A/m_B)^2 p'^2 + \kappa_{BAc}^2}{2(m_A/m_B) p p'}. \quad (9)$$

Из сравнения (8) и (9) легко увидеть, что $z_p > z_0 > 1$. Следовательно, при продолжении функции $\varphi(E, z)$ (3) из физической области в точку $z = z_p$ вклад полюсного механизма в $\varphi(E, z)$ сначала обращается в нуль в точке $z = z_0$ и лишь потом полностью определяет $\varphi(E, z)$ при $z = z_p$. Такое поведение интересующего нас полюсного вклада крайне сложно воспроизвести путем аналитической аппроксимации функции $\varphi(E, z)$ в физической области. Возможный способ решения этой проблемы обсуждается в Приложении.

2.2. Учет кулоновских эффектов

Дальнедействующее кулоновское взаимодействие существенно влияет на аналитические свойства амплитуд процессов, рассчитанных с учетом лишь короткодействующих сил. Изменения, которые вносит кулоновское взаимодействие в характеристики особых точек амплитуд диаграмм Фейнмана по переменной $z = \cos \theta$ для бинарной реакции (1), рассмотрены в работах [10–12]. В этих работах показано, что включение кулоновского взаимодействия между частицами на диаграмме, в отличие от короткодействующих сил, не меняет положения собственных особенностей диаграмм, но меняет характер и мощность этих особенностей. В случае полюсного механизма (диаграмма 1a) учет кулоновского взаимодействия в начальном, конечном и промежуточном состояниях и в вершинах диаграммы приводит к тому, что полюсная особенность превращается в точку ветвления. Для трехлучевых вершин на диаграмме 1a включение кулоновского взаимодействия между y и c и между A и c приводит к появлению в вершинных формфакторах дополнительных множителей $(z - z_p)^{\eta_{xyc}}$ и $(z - z_p)^{\eta_{BAc}}$, где η_{ijk} — кулоновский параметр (параметр Зоммерфельда) для связанного состояния:

$$\eta_{ijk} = Z_j Z_k e^2 \mu_{jk} / \kappa_{ijk}, \quad (10)$$

$$\kappa_{ijk} = \sqrt{2\mu_{jk}\epsilon_{ijk}}.$$

В результате в выражении для вклада диаграммы $1a$ в сечение реакции (1) множитель $(z - z_p)^{-2}$ переходит в множитель $(z - z_p)^{-2(1-\eta_{xyc}-\eta_{BAc})}$. Так как величины η_{ijk} положительны, то такая замена ослабляет сингулярное поведение полюсного вклада в сечение при $z \rightarrow z_p$; при $\eta_{xyc} + \eta_{BAc} > 1$ этот вклад вообще обращается в нуль в точке $z = z_p$. Это обстоятельство заметно усложняет применение МПП для реакций передачи заряженной частицы. Ниже мы будем рассматривать реакцию (d, p) , в которой передаваемой частицей s на диаграмме $1a$ является нейтрон, поэтому кулоновские эффекты в вершинах диаграммы $1a$ отсутствуют. При этом оставшиеся кулоновские поправки, которые мы будем рассматривать, не меняют множитель $(z - z_p)^{-2}$ в выражении для сечения реакции. Реально речь идет о поправках, обусловленных кулоновским взаимодействием частиц $A + x$ ($B + y$) в начальном (конечном) состоянии, а также о кулоновском взаимодействии в промежуточном состоянии. Взаимодействие в промежуточном состоянии определяется суммой диаграмм бесконечного ряда перерасеяния в системе трех тел A , y и s , на которых 4-лучевые вершины отвечают чисто кулоновскому рассеянию. Первая из диаграмм этого ряда приведена на рис. 1б. Амплитуды всех диаграмм такого ряда имеют полюс в той же точке $z = z_p$, что и диаграмма $1a$, и фактически приводят к перенормировке вычета в этом полюсе [10–12].

Оценка кулоновских поправок к сечению для полюсного механизма была проведена в работах [10–12] путем исследования асимптотики парциальных амплитуд $f_l(E)$ реакции (1) по переменной углового момента l и использования однозначной связи между видом асимптотики $f_l(E)$ по l и поведением полной амплитуды реакции $f(E, z)$ вблизи ее ближайшей особенности по z [13]. Полученные для этих поправок аналитические выражения весьма громоздки, и мы их здесь не приводим, отсылая читателя к формулам (61)–(71) обзора [12]. Обсуждаемые поправки будут использованы при применении МПП к конкретной реакции.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МПП К РЕАКЦИИ $^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ})(d, p)^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ})$

В данном разделе МПП применяется для определения АНК для вершины $^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ}) \rightarrow ^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ}) + n$ путем аналитического продолжения ДС реакции $^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ})(d, p)^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ})$. На диаграмме $1a$ для этой реакции $A = ^{12}\text{C}$, $x = d$, $B = ^{13}\text{C}$, $y = p$. При этом в обеих вершинах на диаграмме $1a$ угловые моменты L_{yc} и L_{Ac} равны нулю, так что описанная выше проблема, связанная с ненулевыми угловыми

моментами, отсутствует. Небольшая примесь D -состояния в дейтроне роли не играет. Отметим, что рассматриваемый АНК важен для астрофизики.

Для анализа использовались экспериментальные ДС из работ [14–18], отвечающие энергии налетающего дейтрона в лабораторной системе $E_d = 3.7, 5.03, 9.0, 12.0$ и 30.0 МэВ. Значения измеренных в этих работах ДС брались из базы данных [19]. Экспериментальные значения величины $\varphi(E, z)$ в передней полусфере аппроксимировались согласно (4), где в качестве $P_n(z)$ брались полиномы Чебышева. Коэффициенты c_n подгонялись по экспериментальным данным методом χ^2 . Полученные выражения аналитически продолжались в точку $z = z_p$. После этого значения АНК C для вершины $^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ}) \rightarrow ^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ}) + n$ находились с помощью формул (5) и (6). Для величины $\sum_{L_d, S_d} C^2(L_d S_d)$, характеризующей вершину $d \rightarrow n + p$, бралось значение 0.7715 фм^{-1} [20].

Результаты расчетов представлены в табл. 1 и 2. Таблица 1 носит вспомогательный характер. В первой строке этой таблицы приведены значения энергии дейтрона в Л-системе E_d , соответствующие использованным экспериментальным данным, а во второй — отвечающие этим энергиям значения положения полюса z_p . С ростом энергии значения z_p уменьшаются и приближаются к границе физической области $z = 1$; при этом предельное значение z_p при $E \rightarrow \infty$ равно 1.05. Для сравнения в третьей строке указано положение ближайшей к z_p особенности z_t амплитуды рассматриваемой реакции. В нашем случае z_t является собственной особенностью диаграммы рис. 1в. Значения z_t были рассчитаны с помощью общих формул для положения собственных особенностей произвольной треугольной диаграммы Фейнмана [21]. Информация о ближайшей к z_p особенности важна, так как если эти особенности близки друг к другу, то полиномиальная аппроксимация (4) может быть неоправданной. Отметим, что при наличии двух близко расположенных особых точек для повышения точности аналитического продолжения функции из физической области в ближайшую из них используется метод оптимального конформного отображения переменной, по которой проводится продолжение [22, 23]. В нашем случае, как видно из табл. 1, величина $z_t - 1$, характеризующая расстояние от z_t до границы физической области, для всех энергий более чем на порядок превышает соответствующее значение $z_p - 1$, так что в конформном отображении нет необходимости. Так как обсуждаемые кулоновские поправки определяются в основном значениями кулоновских параметров в начальном (η_i) и конечном (η_f) состояниях, то в

Таблица 1. Положение особых точек амплитуды реакции $d + {}^{12}\text{C} \rightarrow p + {}^{13}\text{C}^*$

E_d , МэВ	3.7	5.03	9.0	12.0	30.0
z_p	1.34	1.27	1.18	1.16	1.11
z_t	14.88	11.15	6.54	5.15	2.69
$\eta_i + \eta_f$	1.24	1.06	0.78	0.69	0.43

Таблица 2. Рассчитанные значения АНК

E_d , МэВ	β	β_t	C_0 , фм ^{-1/2}	C , фм ^{-1/2}	Литература
3.7	0.0822	0.0853	0.543	1.858	[14]
5.03	0.156	0.162	0.783	1.948	[15]
9.0	0.357	0.369	1.320	2.174	[16]
12.0	0.469	0.484	1.238	1.780	[17]
30.0	0.776	0.797	1.379	1.543	[18]

последней строке табл. 1 для справки приведена величина $\eta_i + \eta_f$, убывающая с ростом энергии соударения.

Основные результаты расчетов представлены в табл. 2. Во втором и третьем столбцах табл. 2 приведены рассчитанные кулоновские поправки β и β_t . β вычислялась с учетом только взаимодействия в начальном и конечном состояниях, а β_t дополнительно учитывает еще и кулоновское взаимодействие в промежуточном состоянии. Значения β и β_t близки, откуда можно заключить, что основной вклад в поправки вносит кулоновское взаимодействие в начальном и конечном состояниях. Реально учет кулоновских поправок при определении АНК выражается в том, что коэффициент β_t (или β) должен быть добавлен в виде множителя в левую часть (5). В четвертом и пятом столбцах табл. 2 приведены значения АНК, рассчитанные без учета (C_0) и с учетом (C) кулоновских поправок. АНК C связан с C_0 соотношением: $C = C_0/\sqrt{\beta_t}$. Для каждого значения энергии дейтрона число слагаемых в разложении (4) и значения коэффициентов c_n находились методом χ^2 . В последнем столбце табл. 2 даются ссылки на экспериментальные работы, результаты которых были использованы для определения АНК.

Из сравнения значений C и C_0 следует, что рассматриваемые кулоновские поправки существенно влияют на значения АНК, полученные с помощью МПП. Это влияние особенно заметно при низких энергиях. Из представленных в табл. 2 значений АНК C , полученных из анализа различных экспериментальных данных, следует, что среднее

значение полученного нами АНК есть $C = 1.86 \pm 0.16$ фм^{-1/2}.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе МПП использован для определения АНК для канала ${}^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ}) \rightarrow {}^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ}) + n$ на основе экспериментальных данных по дифференциальным сечениям реакции ${}^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ МэВ})(d, p){}^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ МэВ})$ при различных энергиях налетающего дейтрона. Существенно новым элементом является учет поправок, обусловленных кулоновским взаимодействием в начальном, конечном и промежуточном состояниях реакции. Показано, что эти поправки сильно влияют на извлеченные значения АНК, особенно при низких энергиях. С учетом этих поправок получено значение АНК $C = 1.86 \pm 0.16$ фм^{-1/2}. В работе [6] из анализа данных по радиационному захвату ${}^{12}\text{C}(n, \gamma){}^{13}\text{C}$ найдено $C = 1.61$ фм^{-1/2}. Аналитическое продолжение по энергии данных фазового анализа упругого рассеяния нейтронов на ${}^{12}\text{C}$ дает существенно более высокое значение $C = 2.07 \pm 0.13$ фм^{-1/2} [8]. Таким образом, полученное в данной работе значение АНК C лежит между значениями, приведенными в работах [6] и [8].

МПП имеет некоторые принципиальные преимущества перед другими методами определения АНК на основе экспериментальных данных. Он не опирается на использование каких-либо ядерных моделей, как при определении АНК из анализа реакций передачи в рамках метода искаженных волн. В отличие от метода, основанного на аналитическом продолжении по энергии данных фазового анализа, МПП использует лишь непосредственно измеряемую величину — ДС реакции. Точность определения АНК с помощью МПП определяется в основном наличием достаточно аккуратных экспериментальных данных по дифференциальным сечениям при малых углах рассеяния.

МПП и близкий к нему метод вычитания сингулярности [24] использовался в ряде работ [24–27] для определения выражающихся через АНК ядерных вершинных констант для нескольких легчайших и легких ядер. Однако в этих работах не учитывались рассмотренные в настоящей статье кулоновские поправки, а также игнорировались проблемы, связанные с ненулевыми орбитальными угловыми моментами в вершинах полюсной диаграммы. Эти обстоятельства заставляют относиться с осторожностью к полученным в указанных работах результатам.

Отметим, что если вклад в вершинные функции полюсной диаграммы 1а дают более одного АНК, то информацию об отношениях этих АНК можно в

принципе получить, применяя МПП к поляризационным наблюдаемым.

Приложение

Как отмечено выше в разд. 2, при продолжении в полюс функции $\varphi(E, z)$ в случае, когда хотя бы в одной из вершин диаграммы 1a орбитальный момент $L > 0$, возникает проблема, так как функция в этом случае имеет вид (аргумент E для краткости опускаем):

$$\varphi(z) \equiv (z - z_p)^2 \sigma(z) = (z - z_0)^{2L} A(z) + (z - z_0)^L (z - z_p) B(z) + (z - z_p)^2 D(z). \quad (\text{П.1})$$

Информация об АНК содержится в функции $A(z)$, однако получить сколько-нибудь надежное значение $A(z_p)$ путем прямого продолжения $\varphi(z)$ из физической области в точку $z = z_p$ практически невозможно, так как $1 < z_0 < z_p$, и поэтому слагаемое в (П.1), содержащее $A(z)$, обращается в нуль в процессе продолжения. Можно, однако, предложить подход, позволяющий (по крайней мере, в принципе) решить эту проблему. Рассмотрим его на примере $L = 1$. В этом случае

$$\varphi(z) = (z - z_0)^2 A(z) + (z - z_0)(z - z_p) B(z) + (z - z_p)^2 D(z). \quad (\text{П.2})$$

Положив $z = z_0$, получим

$$D(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{(z_0 - z_p)^2}. \quad (\text{П.3})$$

С учетом (П.3) нетрудно получить соотношение

$$\frac{\varphi(z) - \frac{(z - z_p)^2}{(z_0 - z_p)^2} \varphi(z_0)}{z_0 - z_p} = (z - z_0) A(z) + (z - z_p) B(z) + (z - z_p)^2 \frac{D(z) - D(z_0)}{z - z_0}. \quad (\text{П.4})$$

Отметим, что левая часть (П.4) не имеет особенностей в точке $z = z_0$. Обозначив для краткости левую часть (П.4) через $\varphi_1(z)$, перепишем (П.4) в виде

$$\varphi_1(z) = (z - z_0) A(z) + (z - z_p) B_1(z), \quad (\text{П.5})$$

$$B_1(z) \equiv B(z) + (z - z_p) \frac{D(z) - D(z_0)}{z - z_0}.$$

Проведем еще одно преобразование. Положив в (П.5) $z = z_0$, получим

$$B_1(z_0) = \frac{\varphi_1(z_0)}{z_0 - z_p}. \quad (\text{П.6})$$

Отсюда по аналогии с (П.4) следует соотношение

$$\frac{\varphi_1(z) - \frac{z - z_p}{z_0 - z_p} \varphi_1(z_0)}{z - z_0} = \quad (\text{П.7})$$

$$= A(z) + (z - z_p) \frac{B_1(z) - B_1(z_0)}{z - z_0}.$$

Обозначив левую часть (П.7) через $\varphi_2(z)$, перепишем (П.7) в виде

$$\varphi_2(z) = A(z) + (z - z_p) B_2(z), \quad (\text{П.8})$$

$$B_2(z) \equiv (z - z_p) \frac{B_1(z) - B_1(z_0)}{z - z_0}.$$

Положив в (П.8) $z = z_p$, получаем нужную нам величину $A(z_p)$, которая выражается через АНК. Эту процедуру в принципе можно проделать и для $L > 1$, повторив ее нужное число раз.

Изложенная выше процедура позволяет формально решить проблему аналитического продолжения в полюс для $L > 0$. Однако для ее практического применения необходимо установить с хорошей точностью поведение $\varphi(z)$ в окрестности $z = z_0$. Как видно из (П.4) и (П.7), для рассмотренного примера с $L = 1$ для определения $A(z_p)$ фактически требуется знание не только $\varphi(z_0)$, но и первой ($\varphi^{(1)}(z_0)$) и второй ($\varphi^{(2)}(z_0)$) производных $\varphi(z)$ в точке $z = z_0$. Для $L > 1$ потребуются знание еще большего числа производных $\varphi^{(n)}(z_0)$. Возможность достаточно аккуратного определения указанных величин предъявляет весьма высокие требования к полноте и точности экспериментальных ДС. Имеющиеся в настоящее время в литературе экспериментальные данные вряд ли удовлетворяют этим требованиям.

Авторы благодарны А.М. Мухамеджанову за полезные обсуждения. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 19-02-00014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Д. Блохинцев, И. Борбей, Э. И. Долинский, ЭЧАЯ **8**, 1189 (1977) [Sov. J. Part. Nucl. **8**, 485 (1977)].
2. А. М. Мухамеджанов, Н. К. Тимофеюк, ЯФ **51**, 679 (1990).
3. Н. М. Xu, С. А. Gagliardi, R. E. Tribble, А. М. Mukhamedzhanov, and N. K. Timofeyuk, Phys. Rev. Lett. **73**, 2027 (1994).
4. А. М. Mukhamedzhanov and R. E. Tribble, Phys. Rev. C **59**, 3418 (1999).
5. А. М. Mukhamedzhanov, С. А. Gagliardi, and R. E. Tribble, Phys. Rev. C **63**, 024612 (2001).
6. J. T. Huang, С. А. Bertulani, and V. Guimarões, At. Data Nucl. Data Tables **96**, 824 (2010).
7. L. D. Blokhintsev, A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, and D. A. Savin, Phys. Rev. C **98**, 064610 (2018).
8. L. D. Blokhintsev, A. S. Kadyrov, A. M. Mukhamedzhanov, and D. A. Savin, Phys. Rev. C **100**, 024627 (2019).

9. G. F. Chew, Phys. Rev. **112**, 1380 (1958).
10. Е. И. Долинский, А. М. Мухамеджанов, ЯФ **3**, 252 (1966).
11. E. I. Dolinsky and A. M. Mukhamedzhanov, Czech. J. Phys. B **32**, 302 (1982).
12. Л. Д. Блохинцев, А. М. Мухамеджанов, А. Н. Сафронов, ЭЧАЯ **15**, 1296 (1984) [Sov. J. Part. Nucl. **15**, 580 (1984)].
13. В. С. Попов, ЖЭТФ **47**, 2229 (1964).
14. Huang Binguin *et al.*, 74 SHANGH, 89, 1974 (Conference on Nuclear Physics, Lanzhou, 1974).
15. Mao Zhenlin *et al.*, 72 LANZH, 3, 1972 (Conference on Low Energy Nuclear Physics, Shanghai, 1972).
16. M. Takai, T. Kambara, K. Tada, M. Nakamura, and S. Kobayashi, J. Phys. Soc. Jpn. **43**, 17 (1977).
17. J. Lang, J. Liechti, R. Müller, P. A. Schmelzbach, J. Smyrski, M. Godlewski, L. Jarczyk, A. Stralkowski, and H. Witła, Nucl. Phys. A **477**, 77 (1988).
18. H. Ohnuma, N. Hoshino, O. Mikoshiba, K. Raymond, A. Sakaguchi, G. G. Shute, B. M. Spicer, M. H. Tanaka, M. Tanifuji, T. Terasawa, and M. Yasue, Nucl. Phys. A **448**, 205 (1986).
19. *Универсальная электронная система информации по атомным ядрам и ядерным реакциям ЦДФЭ НИИЯФ МГУ*, <http://cdfe.sinp.msu.ru/services/unifsys/index.html>
20. V. A. Babenko and N. M. Petrov, Phys. At. Nucl. **74**, 352 (2011).
21. L. D. Blokhintsev, E. I. Dolinsky, and V. S. Popov, Nucl. Phys. **40**, 117 (1963).
22. R. F. Cutkosky and B. B. Deo, Phys. Rev. **174**, 1859 (1968).
23. S. Ciulli, Nuovo Cimento A **61**, 787 (1969).
24. I. Borbély, Nucl. Phys. A **262**, 244 (1976).
25. I. Borbély, Phys. Lett. B **49**, 325 (1974).
26. S. Dubnička and O. V. Dumbrajs, Nucl. Phys. A **235**, 417 (1974).
27. I. Borbély, Lett. Nuovo Cimento **12**, 527 (1975).

DETERMINATION OF ASYMPTOTIC NORMALIZATION COEFFICIENTS BY ANALYTIC CONTINUATION OF DIFFERENTIAL CROSS SECTIONS

L. D. Blokhintsev¹⁾ and D. A. Savin¹⁾

¹⁾*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Russia*

A method is discussed for determining the asymptotic normalization coefficients (ANC) using the analytic continuation of experimental differential cross sections for nuclear transfer reactions to the pole point of the reaction amplitude with respect to the variable $\cos \theta$, where θ is the scattering angle. Within the framework of this method, using experimental data on the differential cross section for the reaction $^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ MeV})(d, p)^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ MeV})$ the ANC for the channel $^{13}\text{C}(1/2^+; 3.09 \text{ MeV}) \rightarrow ^{12}\text{C}(0^+; 0 \text{ MeV}) + n$ was determined. When determining the ANC, corrections caused by the Coulomb interaction in the initial, final and intermediate states of the reaction were taken into account. It is shown that these corrections significantly affect the extracted ANC value.