ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2022, том 85, № 2, с. 159–170

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

# ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФЕРМИОНОВ РАВНЫХ МАСС

 Ю. Д. Черниченко[1), 2)*]

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.; после доработки 18.10.2021 г.; принята к публикации 18.10.2021 г.

Получено новое релятивистское квазиклассическое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов как составной системы двух кварков равных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала. Проведено сравнение нового выражения с его нерелятивистским бесспиновым и релятивистскими спиновым и бесспиновым аналогами. Выполнен анализ влияния спинов кварков равных масс, образующих векторные мезоны, на поведение их лептонных ширин распадов. Исследование проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц равных масс.

**DOI:** 10.31857/S0044002722020052

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Квадрат модуля функции Бете–Солпитера двух заряженных частиц $\chi_{\rm BS}(x)$ в двухчастичном приближении для $s$-состояния ($\ell = 0$) при $x = (x_0, \mathbf{r}) = 0$, а следовательно, при относительном времени $x_0 = 0$, связан с лептонной шириной распада $\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-)$ для $1^-$-состояния [1] (см. также работы [2–5]) выражением:

$$\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-) = 16\pi\alpha^2 e_q^2 \frac{|\chi_{\rm BS}(x=0)|^2}{M_n^2}\Big|_{\ell=0}, \quad (1)$$

где $\alpha$ — постоянная тонкой структуры, $e_q$ — заряд кварка в единицах электрического заряда $e$, $M_n$ — полная энергия для данного уровня $n$ связанного состояния двух частиц (кварков) в с.ц.и. с массами $m_1$ и $m_2$ и относительным 3-импульсом $\mathbf{p}$, т.е. $e^+e^-$(или $q\bar{q}$)-системы.

В нерелятивистском случае в ВКБ-приближении выражение для квадрата модуля нерелятивистской волновой функции в нуле для состояния с $\ell = 0$, $|\psi^{\rm nr}_{n,\ell=0}(0)|^2$, отвечающей нерелятивистскому уравнению Шредингера для случая двух частиц равных масс с несингулярным в нуле потенциалом запирания $V_{\rm conf}(r)$ путем добавления к нему кулоновского взаимодействия

$$V_{\rm Coul}(r) = -\frac{\alpha_s}{r}, \quad (2)$$

где $\alpha_s$ — сильная константа связи, было получено в работах [6, 7]. Их результат дается выражением

$$|\psi^{\rm nr}_{n,\ell=0}(0)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2} F(v^{\rm nr}_n) v^{\rm nr}_n \frac{dE_n}{dn}, \quad (3)$$

где фактор

$$F(v) = \frac{\pi\alpha_s}{v}\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi\alpha_s}{v}\right)\right]^{-1} \quad (4)$$

является нерелятивистским кулоновским $S$-фактором, $v^{\rm nr}_n = \sqrt{E_n/m}$ — нерелятивистская скорость свободного кварка с массой $m$ и кинетической энергией $E_n/2$ для данного уровня $n$, причем для простоты $V_{\rm conf}(0) = 0$. Выражение (3) справедливо как при $E_n > 0, E_n < 0$, так и при отсутствии кулоновского взаимодействия (2) [8, 9]: $F(v) = 1$ при $\alpha_s = 0$.

Релятивистский аналог нерелятивистского выражения (3) был получен в работе [1]. Развитый в [1] подход базируется на решении релятивистским ВКБ-методом модифицированного уравнения Бете–Солпитера, не зависящего от относительного времени $x_0$. Это означает выполнение следующих предположений (одновременное взаимодействие): фоковское $q\bar{q}$-состояние дает доминирующий вклад в функцию Бете–Солпитера в области $r > m^{-1}$; $q\bar{q}$-взаимодействие адекватно описывается одновременным кулоновским взаимодействием (2); возможные (дальнего порядка) спин-зависимые эффекты игнорируются. При этих предположениях доминирующий вклад в функцию Бете–Солпитера для $s$-состояния при $x_0 = 0$ в области $r \gg m^{-1}$ дает решение одновременного урав-

[1)]Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь.
[2)]Международный центр перспективных исследований, ГГТУ, Гомель, Беларусь.
[*]E-mail: chyud@mail.ru; chern@gstu.by

нения Солпитера для $q\bar{q}$-системы, $\chi_{\rm BS}(0,\mathbf{r})|_{\ell=0} = \Psi^{\rm rel}_{n,\ell=0}(r)$. Релятивистский аналог для выражения (3) в этом случае принимает вид ($\hbar = c = 1, V_{\rm conf}(0) = 0$)

$$|\Psi^{\rm rel}_{n,\ell=0}(0)|^2 = \frac{M_n^2}{16\pi^2}F(v_n)v_n\frac{dM_n}{dn}, \qquad (5)$$

где

$$v = \sqrt{1-\frac{4m^2}{M^2}} \qquad (6)$$

— релятивистская скорость свободного кварка с массой $m$, $M = 2m + E$, а кулоновский $S$-фактор по-прежнему определяется выражением (4). Выражение (5) справедливо как при $M_n > 2m$, так и при $M_n < 2m$, а при отсутствии кулоновского взаимодействия (2) ($\alpha_s = 0$) оно переходит в выражение, полученное ранее в работах [10, 11][3].

Иной подход для нахождения лептонных ширин распадов векторных мезонов основан на применении релятивистского квазипотенциального (РКП) подхода Логунова—Тавхелидзе в квантовой теории поля [13]. В настоящей работе используется тот вариант РКП-подхода [14] к задаче о составной системе двух релятивистских спиновых частиц, который основан на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [15]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях. Тем самым двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке волновой РКП-функции одной релятивистской частицы, удовлетворяющей полностью ковариантному трехмерному РКП-уравнению в импульсном пространстве с квазипотенциалом (см., например, работы [16—20]). При этом квазипотенциал в общем случае параметрически зависит от энергии составной системы и не является эрмитовым [20], а вся особенность, как и в нерелятивистской теории, которую вносит спин в волновую РКП-функцию составной системы, является следствием зависимости квазипотенциала от спина. Кроме того, РКП-подход [14] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m_1 = m_2 = m$ позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению ($\mathbf{r}$-представление), введенному в [21]. Для этого вместо обычного фурье-преобразования используется разложение по полной и ортогональной системе функций

$$\xi(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \left(\frac{k_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}{m}\right)^{-1-ir/\lambda}, \qquad (7)$$

которые выполняют роль "плоских" волн в пространстве Лобачевского, где $\lambda = \hbar/mc$ — комптоновская длина волны релятивистской частицы массы $m$. Эти функции соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и в нерелятивистском пределе ($|\mathbf{k}| \ll \hbar/\lambda,\ r \gg \lambda$)$\xi(\mathbf{k},\mathbf{r}) \to \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. При этом волновые РКП-функции в импульсном пространстве, $\Psi_{M_Q}(\mathbf{k})$, и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении, $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$, связаны через релятивистские "плоские" волны (7) преобразованием Шапиро [22]

$$\psi_{M_Q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{k}}\,\xi(\mathbf{k},\mathbf{r})\Psi_{M_Q}(\mathbf{k}), \qquad (8)$$
$$\Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}\xi^*(\mathbf{k},\mathbf{r})\,\psi_{M_Q}(\mathbf{r}).$$

Возможность применимости формулы (1) для описания лептонных ширин распадов векторных мезонов в рамках РКП-подхода обусловлена тем, что функция Бете—Солпитера при $x = 0$ для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс $m$ будет, в отличие от нерелятивистского случая и подхода, предложенного в работах [1, 10, 11], связана с волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве, $\Psi_{M_Q}(\mathbf{k})$, и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении, $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$, не в нуле, как это делалось в работах [23, 24], а в соответствии с преобразованием Шапиро (8), содержащем релятивистские "плоские" волны (7), при $r = i\lambda$ следующим соотношением:[4]

$$\chi_{\rm BS}(x=0) = \qquad (9)$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_{\mathbf{k}}\Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) = \lim_{r\to i\lambda}\psi_{M_Q}(\mathbf{r}).$$

Здесь $d\Omega_{\mathbf{k}} = mc^2 d\mathbf{k}/E_k$ — релятивистский трехмерный элемент объема в пространстве Лобачевского, которое реализуется на верхней полé массового гиперболоида

$$E_q^2 - c^2\mathbf{q}^2 = m^2c^4,$$

$E_q = q_0 = c\sqrt{m^2c^2+\mathbf{q}^2}$ — энергия релятивистской частицы с массой $m$ и 3-импульсом $\mathbf{q}$ и

[3] Такое же соотношение для релятивистского случая ранее было предложено, но не доказано, в работе [12].

[4] Напомним, что в рамках рассматриваемого РКП-подхода как модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, так и 3-импульс $\mathbf{k}$ релятивистской частицы являются релятивистскими инвариантами [21].

связана с полной энергией $M_Q$ в с.ц.и. соотношением [21]

$$\sqrt{s} = M_Q = 2c\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{q}^2} = 2E_q.$$

Таким образом, соотношение (9) обеспечивает правильную связь между функцией Бете—Солпитера и волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве и в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении.

Модификация формулы (1) для лептонной ширины распада векторного мезона с полной энергией $M_n < 2mc^2$ и в состоянии с $\ell = 0$ на лептон-антилептонную пару в рамках РКП-подхода [14] для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц равных масс $m$ посредством потенциала $V(r) = -\alpha_s/r + \sigma r^s\,(\sigma, s > 0)$ была выполнена в работе [23]. РКП-уравнение с таким потенциалом было решено релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [25], что приводит к следующему выражению для лептонной ширины распада векторного мезона в $s$-состоянии:

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-) &= \qquad (10)\\ &= \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M_n^2}\left|\psi_{M_Q}(0)\right|^2\big|_{\ell=0} = \\ &= \alpha^2 e_q^2 \frac{m\tilde{\alpha}_s}{\pi\hbar^3 M_n^2}\frac{dM_n}{dn}\times \\ &\times \left|F\left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_s}{2\sin\kappa_n}, 1; 2; 1 - e^{-2i\kappa_n}\right)\right|^2,\end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s/\hbar c$, $\kappa_n = \arccos(M_n/2mc^2)$, а $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция.

В случае обмена безмассовым векторным бозоном (глюоном) квазипотенциал представляет собой фейнмановский матричный элемент, содержащий все спиновые эффекты, который был подробно исследован в $\mathbf{r}$-представлении в работах [24]. В этих работах в рамках РКП-подхода [14] в ВКБ-приближении были найдены выражения для лептонных ширин распадов векторных и псевдоскалярных мезонов в предположении, что квазипотенциал является действительным и представляет собой комбинацию кулоновской части однобозонного обменного потенциала $\tilde{V}_c(\boldsymbol{\Delta}) = -g_V^2 m^2/\boldsymbol{\kappa}^2$, которому в $\mathbf{r}$-представлении отвечает его образ $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi m r)/r$ ($\hbar = c = 1$), и потенциала запирания, где $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\Delta}\sqrt{m/2(\Delta_0 + m)}$ — полупередача импульса, выраженная через 3-вектор передачи импульса $\boldsymbol{\Delta}$ в пространстве Лобачевского, связанного с импульсами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$ преобразованиями Лоренца:

$$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{k}(-)\mathbf{p} = \Lambda_p^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}}{m}\left(k_0 - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{p_0 + m}\right),$$

$$\Delta_0 = (\Lambda_p^{-1}\mathbf{k})_0 = \frac{k_0 p_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{p}}{m} = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\Delta}^2}.$$

Таким образом, авторы в [24] ограничились учетом лишь кулоновской части образа однобозонного обменного потенциала, опуская функцию $\operatorname{cth}(\pi m r)$, которая существенно меняется только на расстояниях порядка $\lambda = 1/m$ от начала координат, и, следовательно, не влияет на вид спектра. Более того, замена кулоновской части образа однобозонного обменного потенциала $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi m r)/r$ на кулоновоподобный хромодинамический потенциал (2) уместна, поскольку, как было отмечено в работе [26], потенциалу (2) в РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского соответствует выражение

$$\widetilde{V}_c(\chi_\Delta) \sim -\frac{1}{\chi_\Delta \operatorname{sh}\chi_\Delta},$$

где относительная быстрота $\chi_\Delta$ параметризирует 3-вектор передачи импульса $\boldsymbol{\Delta} = m\operatorname{sh}\chi_\Delta \mathbf{n}_\Delta$ ($|\mathbf{n}_\Delta| = 1$) в пространстве Лобачевского и связана с квадратом переданного 4-импульса $t = (k - p)^2 = -Q^2$ соотношением

$$\begin{aligned}Q^2 = -t = -2m^2 + &\qquad (11)\\ + 2m\sqrt{m^2 + \boldsymbol{\Delta}^2} = 2m^2\left(\operatorname{ch}\chi_\Delta - 1\right).&\end{aligned}$$

При больших $Q^2$ согласно выражению (11) $\chi_\Delta \approx \ln(Q^2/m^2)$ и, следовательно, потенциал $\widetilde{V}_c(\chi_\Delta)$ ведет себя как $[(Q/m)^2\ln(Q/m)^2]^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ — инвариантный заряд. Такое КХД-подобное поведение квазипотенциала (2) в РКП-подходе впервые было отмечено в работе [26]. В принятых в [24] предположениях РКП-выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$ удобно выразить через гипергеометрическую функцию:

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,\ell}(e^+e^-) &= \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M_n^2}\left|\psi_{M_Q}(0)\right|^2 = \qquad (12)\\ &= \frac{2\alpha^2 e_q^2 \Gamma^4(\ell+1)\left(2\operatorname{sh}\chi_n\right)^{2\ell+1} e^{-2\chi_n(\ell+1)}}{\pi\lambda^3 mc^2\Gamma^2(2\ell+2)M_n^2}\times \\ &\times L_{\mathrm{RQP}}(\chi_n)\left|F\left(\ell + 1 - \frac{i\tilde{\alpha}_s}{2\operatorname{sh}\chi_n}, \ell+1;\right.\right. \\ &\left.\left. 2\ell+2; 1 - e^{-2\chi_n}\right)\right|^2 \frac{dM_n}{dn},\end{aligned}$$

где $\chi_n = \operatorname{arch}(M_n/2mc^2)$, а факторы

$$L_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \prod_{n=1}^{\ell}\left[1 + \left(\frac{\tilde{\alpha}_s}{2n\operatorname{sh}\chi}\right)^2\right] S_{\mathrm{RQP}}(\chi), \quad (13)$$

$$S_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \frac{X_{\mathrm{RQP}}(\chi)}{1-\exp[-X_{\mathrm{RQP}}(\chi)]}, \qquad (14)$$
$$X_{\mathrm{RQP}}(\chi) = \frac{\pi\tilde{\alpha}_s}{\operatorname{sh}\chi},$$

— релятивистские бесспиновые кулоноподобные ресуммирующие пороговые $L$- и $S$-факторы как функции быстроты $\chi = \operatorname{arch}(M/2mc^2)$, которые появляются в рассматриваемом РКП-подходе [27—30][5)], где $\operatorname{sh}\chi = v/\sqrt{1-v^2}$. Выражение (12) при $\ell = 0$ и $\chi_n = i\kappa_n = i\arccos(M_n/2mc^2)$ переходит в выражение (10).

Выражение для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в состоянии с энергией $M_n$ для данного уровня $n$ и с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$ на лептон-антилептонную пару для случая взаимодействия двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс $m_1, m_2$ посредством воронкообразного потенциала вида

$$V(r) = V_{\mathrm{conf}}(r) - \frac{\alpha_s}{r}, \quad \alpha_s > 0 \qquad (15)$$

было получено в работе [34]. Развитый в [34] подход базируется на решении релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [23, 25] РКП-уравнения с потенциалом (15), что приводит с учетом модификации формулы (1) соотношением (9) к следующему выражению для лептонной ширины распада векторного мезона:

$$\Gamma_{n,\ell}(e^+e^-) = \qquad (16)$$
$$= \frac{4\alpha^2 e_q^2 \mu \Gamma^2(\ell+1)}{\pi\lambda'^3 m'^2 c^2 \Gamma^2(2\ell+2) M_n^2}\left(\frac{2\mu\, u_n^{\mathrm{rel}}}{m'}\right)^{2\ell+1} \times$$
$$\times L_{\mathrm{RQP}}\left(u_n^{\mathrm{rel}}\right)\frac{dM_n}{dn}.$$

Здесь $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ — обычная приведенная масса двух релятивистских частиц произвольных масс $m_1, m_2$, $\lambda' = \hbar/m'c$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$, выступающей в качестве двухчастичной связанной системы,

$$u^{\mathrm{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}}$$

— относительная скорость эффективной релятивистской частицы массы $m'$, где скорость $u$ дается выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2c^4}{M^2 - (m_1-m_2)^2 c^4}},$$

а релятивистские бесспиновые кулоноподобные ресуммирующие пороговые $L$- и $S$-факторы как функции быстроты $\chi' = \operatorname{arch}(\mu M/m'^2c^2)$, которые появляются в рассматриваемом РКП-подходе [27—30], даны в (13) и (14), где теперь $\tilde{\alpha}_s = 2\mu\alpha_s/\hbar m'c$, а $\operatorname{sh}\chi' = \mu u^{\mathrm{rel}}/m'$.

Выражение (16) можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (15), т.е. при $\alpha_s = 0$. В частности, при $\ell = 0$ выражение (16) переходит в соотношение [35]

$$\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-) = \qquad (17)$$
$$= \frac{8\alpha^2 e_q^2 \mu^2 u^{\mathrm{rel}}}{\pi\lambda'^3 m'^3 c^2 M_n^2} S_{\mathrm{RQP}}\left(u_n^{\mathrm{rel}}\right)\frac{dM_n}{dn}.$$

Также обратим внимание и на работу [36], в которой были вычислены слабые константы распада псевдоскалярных и векторных мезонов, волновые функции которых удовлетворяют РКП-уравнению, предложенному в [37], с полным релятивистским потенциалом взаимодействия кварка, т.е. учитывающим все спин-зависимые и спин-независимые релятивистские вклады.

Настоящая работа является продолжением работы автора [34] и посвящена получению релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода (см., например, работы [23—25]) релятивистского выражения для лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии на лептон-антилептонную пару. Векторные мезоны рассматриваются как составная система двух релятивистских спиновых кварков равных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоноподобного хромодинамического потенциала[6)]. Для этой цели полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс было решено релятивистским ВКБ-методом. Установлено условие применимости ВКБ-приближения. В разд. 3 получено выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии на лептон-антилептонную пару. Проведено сравнение поведения нового выражения для лептонных ширин распадов векторных мезонов с их нерелятивистским бесспиновым и релятивистскими бесспиновым и спиновым аналогами. Результаты исследований обсуждаются в Заключении.

[5)] Напомним, что пороговые $L$- и $S$-факторы в (13) и (14) имеют правильные релятивистские и ультрарелятивистские пределы в отличие от релятивистских пороговых $S$-факторов, представленных в работах [31—33] (подробности см. в работах [27—30]).

[6)] Случай релятивистских спиновых кварков произвольных масс планируется рассмотреть в одной из следующих работ.

## 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РКП-УРАВНЕНИЯ

Основой нашего рассмотрения является полностью ковариантное РКП-уравнение для волновой РКП-функции $\psi_{M_\mathcal{Q}}(\mathbf{r})$ двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m$ в $\mathbf{r}$-представлении в конечно-разностной форме, которое для случая сферически симметричных квазипотенциалов имеет вид [38]

$$\frac{1}{2mc^2}\left(M_\mathcal{Q}-\widehat{H}_0\right)\psi_{M_\mathcal{Q}}(\mathbf{r}) = \\ = V(\mathbf{r})\hat{A}\left(\frac{\widehat{H}_0}{2mc^2}\right)\psi_{M_\mathcal{Q}}(\mathbf{r}). \tag{18}$$

Здесь $M_\mathcal{Q}^2=\mathcal{Q}^2=(q_1+q_2)^2$, оператор

$$\widehat{H}_0 = 2mc^2\Bigg[\operatorname{ch}\left(i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right)+ \\ +\frac{i\lambda}{r}\operatorname{sh}\left(i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\lambda^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(i\lambda\frac{\partial}{\partial r}\right)\Bigg] \tag{19}$$

— оператор свободного гамильтониана, являющийся конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\lambda\partial/\partial r)$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть, причем, как и ранее, $\lambda=\hbar/mc$ — комптоновская длина волны, а модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}=r\,\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}|=1$) является релятивистским инвариантом; потенциал $V(\mathbf{r})$ является локальным в смысле геометрии Лобачевского и для простоты считается, как и в работах [24], не зависящим от энергии $M_\mathcal{Q}$, а оператор $\hat{A}$ определяется выражением

$$\hat{A}\left(\frac{\widehat{H}_0}{2mc^2}\right)=\frac{1}{4}\left[a\left(\frac{\widehat{H}_0}{2mc^2}\right)^2+b\right], \tag{20}$$

где значение спиновых параметров $a$ и $b$ для векторных мезонов дается выражением

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{4}\quad \text{при}\quad \hat{O}=\gamma_\mu. \tag{21}$$

Заметим, что для простоты рассмотрения в работе [38], как и в работах [39], считалось, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $\hat{O}\otimes\otimes\hat{O}$, а вершинная функция также имеет спинорную структуру, пропорциональную одной матрице $\hat{O}$[7)], не зависящую от импульсных переменных, причем в качестве $\hat{O}$ выбирались матрицы Дирака $\gamma_5,\gamma_\mu,\gamma_5\gamma_\mu$ ($\mu=0,1,2,3$). Такое представление квазипотенциала и вершинной функции позволяет, используя условия ортонормированности и полноты для дираковских спиноров, провести свертку спиновых частей этих величин, а затем, применяя преобразование Лоренца, разделить временные и пространственные переменные в аргументах четырехмерных $\delta$-функций, и выполнить интегрирование по этим переменным (подробности см. в работе [38]). Такой подход позволил найти точные решения РКП-уравнения (18) с кулоновоподобным хромодинамическим потенциалом (2), который в случае взаимодействия $\gamma_\mu\otimes\gamma^\mu$ является определяющим [39, 40], а возможность его применения рассматривалась в [24] и обсуждена во Введении.

В принятых предположениях вместо РКП-уравнения (18) рассмотрим РКП-уравнение для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r,\chi)$

$$\left[\widehat{H}_0^{\mathrm{rad}}-\operatorname{ch}\chi+V(r)\hat{A}\left(\widehat{H}_0^{\mathrm{rad}}\right)\right]\varphi_\ell(r,\chi)=0, \tag{22}$$

где оператор

$$\widehat{H}_0^{\mathrm{rad}}=\operatorname{ch}\left(i\lambda\frac{d}{dr}\right)+\frac{\lambda^2\ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda)}\exp\left(i\lambda\frac{d}{dr}\right)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана (19), оператор $\hat{A}$ по-прежнему определен в (20), а $\chi$ — быстрота, которая параметризирует импульс $\boldsymbol{\Delta}_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}$ и полную энергию[8)]:

$$\boldsymbol{\Delta}_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}=mc\operatorname{sh}\chi\,\mathbf{n}_{\Delta_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}},$$
$$|\mathbf{n}_{\Delta_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}}|=1,\quad M_\mathcal{Q}=2\Delta^0_{q,m\lambda_\mathcal{Q}},$$
$$\Delta^0_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}=mc^2\operatorname{ch}\chi.$$

Уравнение (22) легко получить из полностью ковариантного конечно-разностного РКП-уравнения (18) для волновой РКП-функции $\psi_{M_\mathcal{Q}}(\mathbf{r})$, используя ее разложение по функциям Лежандра первого рода $P_\nu(z)$,

$$\psi_{M_\mathcal{Q}}(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^\ell\frac{\varphi_\ell(r,\chi)}{r}\times \\ \times P_\ell\left(\frac{\boldsymbol{\Delta}_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}\cdot\mathbf{r}}{\Delta^0_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}r}\right). \tag{23}$$

В релятивистском квазиклассическом приближении (ВКБ-приближение) решение уравнения (22) ищется в виде [23–25, 34]

$$\varphi_\ell(r,\chi)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}g(r)\right], \tag{24}$$

7) Разложение вершинной функции по полной системе $I,\gamma_5,\gamma_\mu,\gamma_5\gamma_\mu,\sigma_{\mu\nu}P^\nu$ – матриц приводит к системе зацепляющихся уравнений.

8) Напомним, что здесь все 4-импульсы принадлежат верхней поле́ массового гиперболоида $\Delta^2_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}=\Delta^{02}_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}-c^2\boldsymbol{\Delta}^2_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}=m^2c^4$, где $\lambda_\mathcal{Q}=(\lambda^0_\mathcal{Q};\boldsymbol{\lambda}_\mathcal{Q})=\mathcal{Q}/\sqrt{\mathcal{Q}^2}$ — 4-вектор скорости составной частицы с 4-импульсом $\mathcal{Q}=q_1+q_2$, а $\Delta^0_{q,m\lambda_\mathcal{Q}},\boldsymbol{\Delta}_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}$ — временная и пространственная компоненты 4-вектора $\Lambda^{-1}_{\lambda_\mathcal{Q}}q=\Delta_{q,m\lambda_\mathcal{Q}}$ из пространства Лобачевского (подробности см. в работе [38]).

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\hbar}{i} g_1(r) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 g_2(r) + \ldots.$$

Учитывая первые два члена разложения (24), находим ВКБ-решения с левой $r_L$ и правой $r_R$ точками поворота в области $r \in (r_L; r_R)$:

$$\varphi_\ell^{L,R}(r,\chi) = \tag{25}$$
$$= \frac{C_{L,R}(\chi)}{2\sqrt[4]{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + aV(r)X(r)]}} \times$$
$$\times \left\{ \exp\left[i\alpha_+^{L,R}(r) \mp \frac{i\pi}{4}\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[i\alpha_-^{L,R}(r) \pm \frac{i\pi}{4}\right] \right\}.$$

Здесь

$$\alpha_\pm^{L,R}(r) = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{r_{L,R}}^{r} dr' \chi_\pm(r'), \tag{26}$$

$$\chi_\pm(r) = \ln\left[\mathcal{X}(r) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)}\right],$$

$$\mathcal{X}(r) = \frac{2X(r)}{1 + \sqrt{1 + aV(r)X(r)}},$$

$$X(r) = \operatorname{ch}\chi - \frac{b}{4}V(r),$$

$$R(r) = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2\Lambda^2}{r^2}}, \quad \Lambda = \ell + 1/2,$$

$C_{L,R}(\chi)$ — нормировочные константы, значения параметров $a$ и $b$ даны в (21), а левая $r_L$ и правая $r_R$ точки поворота определяются как точки ветвления корня в (26), т.е. из условия

$$\mathcal{X}(r_{L,R}) = R(r_{L,R}). \tag{27}$$

Условие применимости релятивистских ВКБ-решений (25) определяется неравенством

$$\lambda \left| \frac{\operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r)}{\chi_+(r)\operatorname{sh}\chi_{\text{eff}}(r)} \frac{d\chi_+(r)}{dr} \right| \ll 1, \tag{28}$$

где

$$\chi_{\text{eff}}(r) = \operatorname{arch}\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \ln\left(\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) + \sqrt{\mathcal{X}^2_{\text{eff}}(r) - 1}\right),$$

$$\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{X}(r)}{R(r)}.$$

В случае $\ell = 0$ условие (28) преобразуется в неравенство

$$\lambda \left| \frac{\operatorname{ch}\chi(r)}{\chi(r)\operatorname{sh}\chi(r)} \frac{d\chi(r)}{dr} \right| \ll 1,$$

где величина

$$\chi(r) = \operatorname{arch}\mathcal{X}(r) = \ln\left[\mathcal{X}(r) + \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - 1}\right]$$

имеет смысл быстроты релятивистской частицы массы $m$, движущейся в поле потенциала $V(r)$, в терминах которой измеряется расстояние между двумя точками импульсного пространства Лобачевского.

В заключение этого раздела подчеркнем, что при $a = 0$, $b = 2$ все приведенные в этом разделе выражения совпадают с аналогичными выражениями, взятыми при $m_1 = m_2 = m$, которые были получены в бесспиновом случае для произвольных масс [34].

## 3. ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В РКП-ПОДХОДЕ

В РКП-подходе в соответствии с соотношением (9) и обоснованием к нему, а также замечанием к уравнению (18), релятивистская модификация формулы (1) Матвеева, Струминского, Тавхелидзе [3] (или Ван Роена–Вайскопфа [4]) для лептонных ширин распадов векторных мезонов, как связанной системы двух спиновых кварков равных масс $m$ в состоянии с энергией $M_n$ и относительным орбитальным моментом $\ell = 0$, состоит в замене $|\chi_{\text{BS}}(x=0)|^2|_{\ell=0} = |\psi_{M_Q}(r = i\lambda)|^2|_{\ell=0}$. Тогда, принимая во внимание выражения (23) и (25), лептонную ширину распада векторного мезона в $s$-состоянии определим выражением

$$\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-) = \frac{16\pi\alpha^2 e_q^2}{M_n^2} \times \tag{29}$$
$$\times \lim_{r\to i\lambda} \left| e^{-\pi\tilde{\rho}/2}\Gamma(1 + i\tilde{\rho}) \frac{\varphi_0^L(r,\chi_n)}{r} \right|^2,$$

где

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\alpha}_s a \operatorname{ch}\chi}{4}, \; \tilde{\alpha}_s = \frac{\alpha_s}{\lambda},$$

а дополнительный фактор $\exp(-\pi\tilde{\rho}/2)\Gamma(1 + i\tilde{\rho})$ обеспечивает не только правильный релятивистский предел порогового ресуммирующего $S$-фактора составной системы двух релятивистских спиновых кварков равных масс при $\chi \to +\infty$ ($v \to \to 1$), равный 1, но и переход к бесспиновому случаю при $a = 0$ и $b = 2$ (подробности см. в работах [41, 42]). Таким образом, в рассматриваемом спиновом случае функция

$$\psi_0(r,\chi) = e^{-\pi\tilde{\rho}/2}\Gamma(1 + i\tilde{\rho})\varphi_0^L(r,\chi)$$

представляет собой физическую волновую функцию $s$-состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков равных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала вида (15), а радиальную $s$-волновую РКП-функцию $\varphi_0^{\text{Coul}}(r,\chi)$ составной системы двух релятивистских фермионов равных масс $m$, отвечающую кулоноводобному хромодинамическому потенциалу (2), можно выразить через гипергеометрическую функцию в виде [38, 41, 42]

$$\varphi_0^{\text{Coul}}(\rho,\chi) = \tag{30}$$
$$= 2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi) e^{iB\chi-\chi+i(\rho-\tilde{\rho})\chi}(\rho-\tilde{\rho}) \times$$
$$\times F\big(1-iB, 1-i(\rho-\tilde{\rho}); 2; 1-e^{-2\chi}\big), \quad \rho = r/\lambda.$$

Здесь $C_0(\chi)$ — произвольная функция от $\chi$, параметр $B$ определяется как

$$B = \frac{\tilde{\alpha}_s(a\,\mathrm{ch}^2\chi + b)}{4\,\mathrm{sh}\,\chi}, \tag{31}$$

причем параметр $B$ при $\chi = i\kappa$ связан с условием квантования энергетических уровней в рассматриваемом спиновом случае выражением [38, 41]

$$\frac{\tilde{\alpha}_s(a\cos^2\kappa + b)}{4\sin\kappa} = n,$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \kappa < \pi/2.$$

Подчеркнем, что формула (29) справедлива (как это имело место и в работах [1, 24, 34]) в приближении одновременного взаимодействия, ограничиваясь в дальнейшем учетом лишь образа кулоновской части однобозонного обменного квазипотенциала, $V_c(r) = -\,\mathrm{cth}(\pi m r)/r$, опуская функцию $\mathrm{cth}(\pi m r)$, т.е. заменой образа однобозонного обменного потенциала $V_c(r) = -\,\mathrm{cth}(\pi m r)/r$ на кулоноводобный хромодинамический потенциал (2), который в РКП-подходе в импульсном пространстве отвечает пропагатору, обладающему КХД-подобным поведением [26]. Таким образом, внутри адрона взаимодействие двух релятивистских спиновых кварков равных масс $m$ осуществляется в $\mathbf{r}$-представлении посредством сингулярного воронкообразного потенциала запирания (15), в котором $V_{\text{conf}}(0) = 0$. В поле такого потенциала уровни энергии $M_n = 2m\,\mathrm{ch}\,\chi_n$ для данного уровня $n$ могут быть определены из ВКБ-условия квантования [43]

$$\int\limits_{r_L}^{r_R} dr\,[\chi_+(r) - \ln R(r)] = \tag{32}$$
$$= \pi\lambda\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0,$$

которое при $a = 0, b = 2$ совпадает с аналогичным выражением, полученным в бесспиновом случае для произвольных масс [34], взятым при $m_1 = m_2 = m$.

В области $r \in (r_L; r_R)$ ВКБ-решение (25) с левой точкой поворота $r_L$ и с данным фиксированным значением энергии $M_n$, отвечающее потенциалу (15), запишем в виде

$$\varphi_\ell^L(r,\chi) = \tag{33}$$
$$= \frac{C_\ell(\chi)}{\sqrt[4]{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + aV(r)X(r)]}} \times$$
$$\times \sin\left\{\frac{1}{\lambda}\int\limits_{r_L}^{r} dr'\Big[\chi_+(r') - \ln R(r')\Big] + \frac{\pi}{4}\right\},$$

где нормировочный множитель $C_\ell(\chi)$ находится из условия нормировки

$$4\pi\int\limits_0^\infty dr\,\left|\varphi_\ell^L(r,\chi_n)\right|^2 = 1, \quad \ell \geq 0. \tag{34}$$

Заметим, что в области применимости ВКБ-приближения (28) аргумент синуса в выражении (33) является быстро осциллирующей функцией. Поэтому после подстановки выражения (33) в условие нормировки (34) квадрат синуса, как обычно, можно заменить его средним значением, равным 1/2 [34]. Тогда вместо (34) имеем условие

$$2\pi|C_\ell(\chi)|^2 \times \tag{35}$$
$$\times \int\limits_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + aV(r)X(r)]}} = 1.$$

Дифференцируя по полной энергии $M_n = 2mc^2\,\mathrm{ch}\,\chi_n$ условие квантования (32) при $\ell \geq 0$, где потенциал $V_{\text{conf}}(r)$ не зависит от энергии $M_n$, и принимая во внимание определения (26) и условие (27) для точек поворота $r_{L,R}$, получим

$$\int\limits_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + aV(r)X(r)]}} = \tag{36}$$
$$= 2\pi\lambda mc^2 \frac{dn}{dM_n}.$$

Из выражений (35) и (36) находим

$$|C_\ell(\chi)|^2 = \frac{1}{4\pi^2\lambda mc^2}\frac{dM_n}{dn}. \tag{37}$$

Тогда, поступая как, например, и в работах [6, 34], волновую РКП-функцию (33) полного потенциала (15) при $\ell = 0$ в области достаточно больших $\rho = r/\lambda, r \in (r_L; r_R)$, но таких, где все же в потенциале (15) доминирует кулоноводобное хромодинамическое взаимодействие (2), аппроксимируем его радиальной $s$-волновой РКП-функцией, точный вид которой дается выражением (30). Сравнивая асимптотическое выражение для кулоновской функции в (30),

$$\varphi_0^{\text{Coul}}(\rho,\chi_n)\big|_{\rho\gg 1} \sim$$
$$\sim \frac{2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi_n) e^{-\pi B/2}}{\mathrm{sh}\,\chi_n|\Gamma(1-iB)|}\sin\left[\rho\chi_n + \delta_0^{\text{Coul}}(\chi_n)\right],$$

с асимптотикой ВКБ-решения в (33), взятого при $\ell = 0$,

$$\varphi_0^L(\rho,\chi_n)\big|_{\rho\gg 1} \sim \frac{C_0(\chi_n)}{\sqrt{\operatorname{sh}\chi_n}} \sin\left[\rho\chi_n + \delta_0^{\mathrm{Coul,WKB}}(\chi_n)\right],$$

находим связь между нормировочными множителями

$$\left|2\pi C_0^{\mathrm{Coul}}(\chi_n)\right|^2 = \tag{38}$$
$$= \operatorname{sh}\chi_n e^{\pi B} |\Gamma(1-iB)|^2 \, |C_0(\chi_n)|^2,$$

где

$$\delta_0^{\mathrm{Coul}}(\chi) = B\ln(2\rho\operatorname{sh}\chi) - \tilde{\rho}\chi + \arg\Gamma(1-iB)$$

— точная фаза волновой РКП-функции для кулоноподобного хромодинамического потенциала (2), а

$$\delta_0^{\mathrm{Coul,WKB}}(\chi) = B\ln(2\rho\operatorname{sh}\chi) - \tilde{\rho}\chi - B\ln B$$

— ее выражение в ВКБ-приближении [43].

Наконец, принимая во внимание определение (29) и соотношения (30), (37) и (38), получим выражение для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в $s$-состоянии и с энергией $M_n$ для случая воронкообразного потенциала вида (15):

$$\Gamma_{n,\ell=0}(e^+e^-) = \tag{39}$$
$$= \frac{4\alpha^2 e_q^2 \operatorname{sh}\chi_n}{\pi\lambda^3 mc^2 M_n^2} S_{\mathrm{RQP,S}}(\chi_n) \frac{dM_n}{dn}.$$

Здесь

$$S_{\mathrm{RQP,S}}(\chi) = \frac{X_{\mathrm{RQP,S}}(\chi)}{1-\exp\left[-X_{\mathrm{RQP,S}}(\chi)\right]} \times \tag{40}$$
$$\times e^{-\pi\tilde{\rho}} \left|\Gamma(2+i\tilde{\rho}) F(1+iB, -i\tilde{\rho}; 2; 1-e^{-2\chi})\right|^2$$

— релятивистский кулоноподобный ресуммирующий пороговый $S$-фактор для случая составной системы, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m$, который появляется в рассматриваемом РКП-подходе и в нерелятивистском ($v \ll 1$), релятивистском ($v \to 1$) и в ультрарелятивистском ($m \to 0$) пределах воспроизводит как известный нерелятивистский результат в бесспиновом случае, когда $a = 0, b = 2$, так и ожидаемые релятивистский и ультрарелятивистский пределы для значения параметров $a$ и $b$ в (21) (подробности см. в работах [41, 42, 44, 45]), где величина $X_{\mathrm{RQP,S}}(\chi)$ связана с параметром $B$ в (31) выражением

$$X_{\mathrm{RQP,S}}(\chi) = 2\pi B = \frac{\pi\tilde{\alpha}_s(a\operatorname{ch}^2\chi + b)}{2\operatorname{sh}\chi},$$

которое может быть выражено в терминах скорости (6) в виде

$$X_{\mathrm{RQP,S}}(v) = \frac{\pi\tilde{\alpha}_s(a+b-bv^2)}{2v\sqrt{1-v^2}}. \tag{41}$$

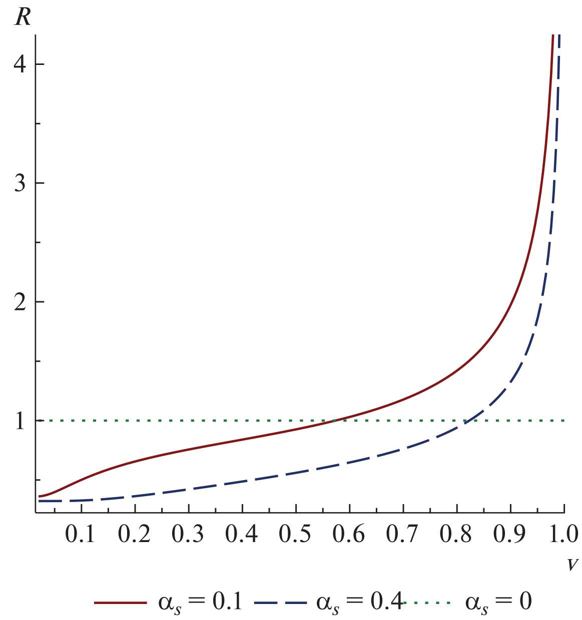


**Рис. 1.** Поведение функции $R$ как функции скорости $v$, равной отношению релятивистского выражения (39) для лептонных ширин распадов векторных мезонов, взятого при $\hbar = c = 1$ и отвечающего значению спиновых параметров $a = 1/2$ и $b = 1/4$ в (21) для случая воронкообразного потенциала вида (15) и значениям констант связи (кривые: сплошная — $\alpha_s = 0.1$ и штриховая — $\alpha_s = 0.4$; точечная линия — $\alpha_s = 0$) к его нерелятивистскому бесспиновому аналогу, который дается выражениями (1), (3), (4).

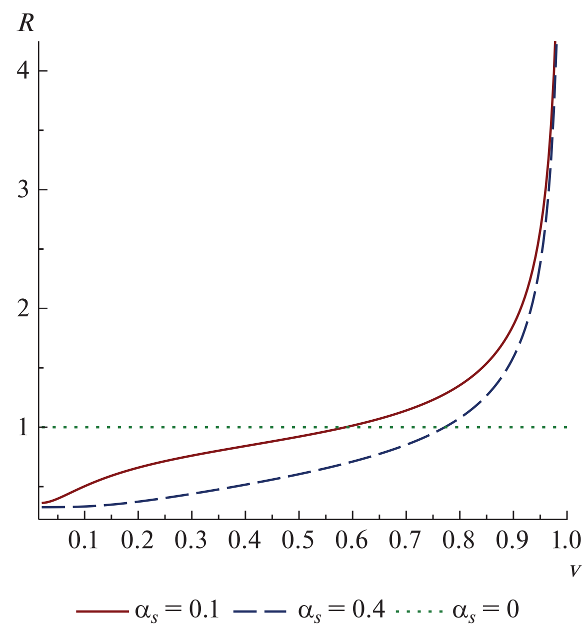


**Рис. 2.** То же, что и на рис. 1, но к его релятивистскому спиновому аналогу, который дается выражением (12), взятым при $\ell = 0$, $\hbar = c = 1$.

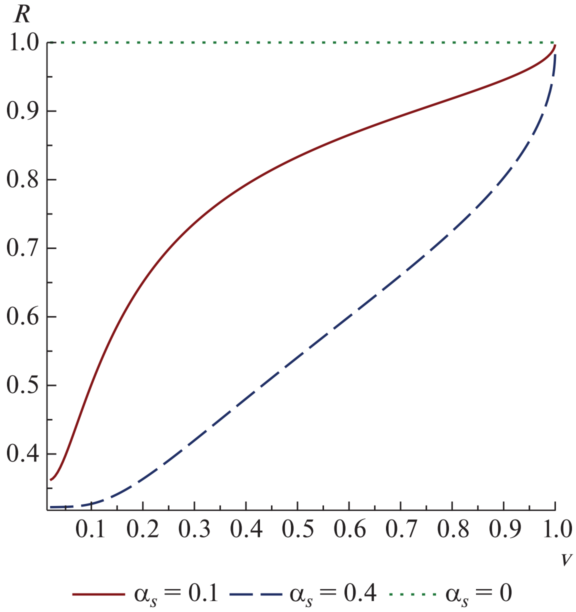


**Рис. 3.** То же, что и на рис. 1, но к его релятивистскому бесспиновому аналогу, который дается выражением (17), взятым при $m_1 = m_2 = m, \hbar = c = 1$.

Подчеркнем, что выражение (39) для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в $s$-состоянии, учитывающее спин кварков, включает в себя, в отличие от бесспинового выражения (17), релятивистский спиновый кулоноподобный ресуммирующий пороговый $S$-фактор (40), который имеет правильные релятивистский и ультрарелятивистский пределы [41, 42, 44, 45]. При этом выражение (39) при $a = 0, b = 2$ переходит в выражение (17) для бесспинового случая, взятое при $m_1 = m_2 = m$, которое можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (15), т.е. при $\alpha_s = 0$. Соответствующие нерелятивистские или релятивистские пороговые $L$- и $S$-факторы появляются и в других выражениях для лептонных ширин распадов векторных мезонов (см. выражения (3), (12) и (16)). Однако не все пороговые $L$- и $S$-факторы, появляющиеся в лептонных ширинах распадов векторных мезонов, имеют правильные релятивистские пределы [27–30], что существенно влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в этой области. Сравнительный анализ в конце данного раздела подтвердит данный вывод.

Для исследования влияния спина кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в $s$-состоянии были построены графики функции $R$, как функции скорости $v$, определенной как отношение релятивистской спиновой лептонной ширины распада векторного мезона в $s$-состоянии, которая представлена выражениями (39), (40) и (41), взятыми при $\hbar = c = 1$, к ее нерелятивистскому бесспиновому и релятивистским спиновому и бесспиновому аналогам, представленных выражениями (1), (3), (4) и (12), (14), взятым при $\ell = 0, \hbar = c = 1$, и (14), (17), взятым при $m_1 = m_2 = m$, $\hbar = c = 1$ соответственно. Кривые на рис. 1, 2 и 3 построены для двух значений константы связи $\alpha_s = 0.1$ (сплошные кривые) и $\alpha_s = 0.4$ (штриховые кривые) и отвечают значению спиновых параметров векторных мезонов $a = 1/2$ и $b = 1/4$ в (21), а точечная линия отвечает случаю $\alpha_s = 0$. Из рис. 1, 2 и 3 видно, что в нерелятивистской области значений скорости $v$ ($v \ll 1$) значение функции $R < 0.5$. Следовательно, в этой области значений скорости $v$ учет спина кварков, формирующих спиновые параметры $a = 1/2$ и $b = 1/4$ векторных мезонов, существенно влияет на поведение функции $R$, а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Этот эффект связан с влиянием значения спиновых параметров $a = 1/2$ и $b = 1/4$ на поведение порогового $S$-фактора (40) в области малых зачений скорости $v$ по сравнению с его нерелятивистским (4) и релятивистским (14) бесспиновыми аналогами. Это влияние спиновых параметров на поведение порогового $S$-фактора в области малых зачений скорости $v$ было детально исследовано в работах [41, 42, 44, 45]. Это так называемый эффект Зоммерфельда [46, 47]. Однако с ростом скорости $v$ влияние значения спиновых параметров $a = 1/2$ и $b = 1/4$ на поведение функции $R$ уменьшается и в релятивистском пределе ($v \to 1$), как видно на рис. 3, функция $R \to 1$, т.е. это влияние становится исчезающе малым. Неограниченный же рост функции $R$ в релятивистской области значений скорости $v$ ($v \to 1$) на рис. 1 и 2 связан с соотношением (9), устанавливающим корректную связь между функцией Бете–Солпитера при $x = 0$ и волновой РКП-функцией в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении, которая вычисляется в соответствии с преобразованием Шапиро (8) при $r = i\lambda$, а не при $r = 0$. Поэтому лептонные ширины распадов векторных мезонов, связанные с квадратом модуля волновой РКП-функции при $r = 0$, нарушающего соотношение (9), будут включать в себя, как отмечалось в предыдущем абзаце, нерелятивистские или релятивистские пороговые $L$- и $S$-факторы, которые не имеют правильных релятивистских пределов, равных 1, что и приводит к неограниченному росту функции $R$ в релятивистской области значений скорости $v$. Также рис. 1, 2 и 3 показывают, что поведение функции $R$ зависит от значений константы связи $\alpha_s$ в широкой области значений скорости $v$, и слабо — в нерелятивистской и в релятивистской областях значений скорости $v$. При этом кривые функции $R$ на рис. 3 для двух значений константы связи $\alpha_s = 0.1$ и $\alpha_s = 0.4$ в релятивистском пределе ($v \to$

$\to 1$) стремятся к 1, поскольку релятивистские пороговые $S$-факторы (14) и (40) имеют правильный релятивистский предел, равный 1 [27–30, 41, 42, 44, 45]. В заключение данного абзаца подчеркнем необходимость учета влияния различия масс частиц (кварков), образующих составную систему, на поведение релятивистского порогового $S$-фактора (см. работы [44, 45]), а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках РКП-подхода в релятивистском квазиклассическом приближении получено новое релятивистское выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии на лептон-антилептонную пару. Рассмотрение проводится для случая, когда релятивистские спиновые кварки равных масс $m$, составляющие векторные мезоны, взаимодействуют посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоновоподобного хромодинамического потенциала. Для этой цели было использовано полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении [21] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс. РКП-уравнение решено релятивистским ВКБ-методом. Установлено условие применимости ВКБ-приближения. Проведено сравнение нового выражения с его нерелятивистским бесспиновым и релятивистскими спиновым и бесспиновым аналогами. Исследовано влияние спина кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в $s$-состоянии.

Показано, что новое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов при $a = 0, b = 2$ переходит в его релятивистский бесспиновый аналог. Для исследования влияния спина кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в $s$-состоянии были построены графики функции $R$ как функции скорости $v$, определенной как отношение нового выражения для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в $s$-состоянии, к ее нерелятивистскому и релятивистским спиновому и бесспиновому аналогам (рис. 1, 2 и 3). Поведение функции $R$ на рис. 1, 2 и 3 показывает, что учет спина кварков влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Это влияние особенно существенно в нерелятивистской области значений скорости $v$ ($v \ll 1$), где значение функции $R < 0.5$, и обусловлено различным поведением в области малых зачений скорости $v$ нерелятивистских бесспиновых и релятивистских бесспиновых и спиновых пороговых $S$-факторов, параметризирующих лептонные ширины распадов векторных мезонов.

Поведение функции $R$, а значит и лептонных ширин распадов векторных мезонов, также существенно зависит от поведения пороговых $S$-факторов в релятивистской области значений скорости $v$ ($v \to 1$). Установлено, что с ростом скорости $v$ влияние спина кварков, формирующих спиновые параметры $a = 1/2$ и $b = 1/4$ векторных мезонов, на поведение функции $R$ (рис. 3) уменьшается и в релятивистском пределе ($v \to 1$) это влияние становится исчезающе малым ($R \to 1$), поскольку релятивистские бесспиновые и спиновые пороговые $S$-факторы (14) и (40) в $R$ имеют правильный релятивистский предел, равный 1.

Показано, что лептонные ширины распадов векторных мезонов, связанные с квадратом модуля волновой РКП-функции при $r = 0$, приводят к нарушению соотношения (9), которое устанавливает корректную связь между функцией Бете–Солпитера при $x = 0$ и волновой РКП-функцией в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении, вычисляемую в соответствии с преобразованием Шапиро (8) при $r = i\lambda$, а не при $r = 0$. Тем самым лептонные ширины распадов векторных мезонов, связанные с квадратом модуля волновой РКП-функции при $r = 0$, нарушающего соотношение (9), будут включать в себя нерелятивистские или релятивистские пороговые $L$- и $S$-факторы, которые не имеют правильного релятивистского предела, равного 1. Это приводит к неограниченному росту функции $R$ на рис. 1 и 2 в релятивистской области значений скорости $v$.

Установлено влияние значений константы связи $\alpha_s$ на поведение функции $R$, которое незначительно в нерелятивистской и релятивистской областях значений скорости $v$, а в релятивистском пределе ($v \to 1$) кривые для функции $R$ на рис. 3 стремятся к 1, поскольку релятивистские бесспиновые и спиновые пороговые $S$-факторы (14) и (40) имеют правильный релятивистский предел, равный 1.

Полученная в настоящей работе формула (39) может быть применена к описанию лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии. Но поскольку поведение релятивистского порогового $S$-фактора зависит от различия масс частиц (кварков), образующих составную систему (см. работы [44, 45]), то это различие масс необходимо принимать во внимание при вычислении лептонных ширин реально наблюдаемых в эксперименте адронов. Поэтому в одной из следующих работ планируется получить формулу для лептонных ширин распадов векторных мезонов в $s$-состоянии как составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс.

Выражение для релятивистских квазиклассических лептонных ширин распадов векторных мезонов было получено в рамках полностью ковариантного метода и имеет правильную связь с функцией Бете–Солпитера, а следовательно, можно ожидать, что оно более полно учитывает как релятивистский характер взаимодействующих частиц, так и их спины.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и техническую поддержку, Ю.А. Курочкину, В.В. Андрееву и А.В. Киселеву за обсуждение полученных результатов, их комментарии и стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **30**, 1904 (1984).
2. E. Etim and L. Schülke, Nuovo Cimento A **77**, 347 (1983).
3. В. А. Матвеев, Б. В. Струминский, А. Н. Тавхелидзе, Препринт Р-2524, ОИЯИ (Дубна, 1965).
4. R. Van Royen and W. F. Weisskopf, Nuovo Cimento A **50**, 617 (1967).
5. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Phys. Lett. B **57**, 455 (1975).
6. J. S. Bell and P. Pasupathy, Z. Phys. C **2**, 183 (1979).
7. N. Fröman and P. O. Fröman, J. Phys. France **42**, 1491 (1981).
8. C. Quigg and J. L. Rosner, Phys. Rev. D **17**, 2364 (1978).
9. J. S. Bell and P. Pasupathy, Phys. Lett. B **83**, 389 (1979).
10. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **25**, 2312 (1982).
11. B. Durand and L. Durand, Phys. Lett. B **113**, 338 (1982).
12. E. A. Tainov, Z. Phys. C **10**, 87 (1981).
13. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
14. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
15. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
16. R. N. Faustov, Ann. Phys. (N. Y.) **78**, 176 (1973).
17. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 562 (1979)].
18. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
19. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, ТМФ **53**, 20 (1982) [Theor. Math. Phys. **53**, 955 (1982)].
20. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2**, 69 (1972)].
21. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
22. И. С. Шапиро, Докл. АН СССР **106**, 647 (1956) [Sov. Phys. Dokl. **1**, 91 (1956)]; ЖЭТФ **43**, 1727 (1962) [Sov. Phys. JETP **16**, 1219 (1963)].
23. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **31**, 1332 (1980) [Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 686 (1980)].
24. А. В. Сидоров, Н. Б. Скачков, ТМФ **46**, 213 (1981) [Theor. Math. Phys. **46**, 141 (1981)]; Препринт Р2-80-45, ОИЯИ (Дубна, 1980); V. I. Savrin, A. V. Sidorov, and N. B. Skachkov, Hadronic J. **4**, 1642 (1981).
25. А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, в сб.: *Труды IV международного симпозиума по нелокальным теориям поля, Алушта, 20–28 апреля 1976*, Д2-9788, ОИЯИ (Дубна, 1976), с. 36.
26. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
27. Ю. Д. Черниченко, Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук **4**, 81 (2009).
28. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **73**, 1658 (2010) [Phys. At. Nucl. **73**, 1612 (2010)].
29. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ТМФ **166**, 225 (2011) [Theor. Math. Phys. **166**, 194 (2011)].
30. Ю. Д. Черниченко, *Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния* (Изд. центр УО ГГТУ им. П. О. Сухого, Гомель, 2011).
31. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **56**, 7276 (1997).
32. J.-H. Yoon and Ch.-Y. Wong, Phys. Rev. C **61**, 044905 (2000); J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **31**, 149 (2005).
33. A. B. Arbuzov, Nuovo Cimento A **107**, 1263 (1994).
34. В. В. Кондратюк, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **81**, 40 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 51 (2018)].
35. Yu. D. Chernichenko and O. P. Solovtsova, in *Proceedings of the XI International School-Seminar on the Actual Problems of Microworld Physics, August 1–12, 2011, Gomel, Belarus*, Preprint E1, 2-2013-23 JINR (Dubna, 2013), p. 61.
36. D. Ebert, R. N. Faustov, and V. O. Galkin, Phys. Lett. B **635**, 93 (2006).
37. А. П. Мартыненко, Р. Н. Фаустов, ТМФ **64**, 179 (1985); **66**, 399 (1986) [Theor. Math. Phys. **64**, 765 (1985); **66**, 264 (1986)].
38. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 707 (2017)].
39. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983)].

40. Н. Б. Скачков, ТМФ **22**, 213 (1975) [Theor. Math. Phys. **22**, 149 (1975)]; Preprint No. P2-12152, ОИЯИ (Дубна, 1978).
41. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **82**, 172 (2019) [Phys. At. Nucl. **82**, 158 (2019)].
42. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptar, in *Proceedings of the XXVII Anniversary Seminar "Nonlinear Phenomena in Complex Systems", NPCS'2020, May 19–22, 2020, Minsk, Belarus*, Nonlinear Dynamics and Applications, Minsk, 2020, Vol. 26, p. 39.
43. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **83**, 270 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 488 (2020)].
44. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptari, Nonlin. Phen. Compl. Syst. **23**, 449 (2020).
45. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **84**, 262 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 339 (2021)].
46. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (Vieweg, Braunschweig, 1939), Vol. 2.
47. G. Gamov, Z. Phys. **51**, 204 (1928).

# LEPTONIC DECAY WIDTHS FOR THE COMPOSITE SYSTEM OF TWO RELATIVISTIC FERMIONS OF EQUAL MASSES

**Yu. D. Chernichenko**[1),2)]

[1)] *Sukhoi State Technical University of Gomel, Belarus*
[2)] *International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus*

The new relativistic leptonic decay widths for the relativistic systems of two fermions with equal masses interacting by means of the funnel-type potentials are obtained. The behavior of the relativistic leptonic decay widths of vector mesons was investigated. Comparison of the behavior for new expression with its nonrelativistic spinless and relativistic spin and spinless analogues is given. Consideration is conducted within the framework of completely covariant quasipotential approach in the Hamiltonian formulation of quantum field theory, via a transition to the relativistic configurational representation in the case of two relativistic spin particles of equal masses.