

## ДВУХБОЗОННЫЙ ОБМЕН В ПОЛЯРИЗАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ С ЗАРЯЖЕННЫМ ТОКОМ

© 2022 г. В. А. Зыкунов<sup>1), 2), 3)</sup>\*

Поступила в редакцию 25.09.2021 г.; после доработки 27.10.2021 г.; принята к публикации 03.11.2021 г.

С применением нового метода рассчитан вклад в сечение четырехфермионного процесса диаграмм двухбозонного обмена (боксов) с одной и двумя комплексными массами бозонов в канале заряженного тока с учетом поляризации начальных частиц. Показана независимость полных электрослабых поправок от нефизических параметров. Сделан численный анализ полученных результатов, продемонстрировано согласие с полученными асимптотическими выражениями для областей энергий ниже и выше  $W$ -резонанса.

DOI: 10.31857/S0044002722020106

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было показано, как эффективно рассчитать вклад двухбозонного обмена (ДО) в поляризованном четырехфермионном процессе в канале нейтрального тока с комплексными массами без сложностей, связанных с представлением через комплекснозначные дилוגарифмы и применением продвинутых адаптивных техник интегрирования. Полученный там аналитический результат прост, удобен для программирования, анализа и применения для конкретной интерпретации в физическом эксперименте, что было проиллюстрировано на примере реакции Дрелла–Яна на эксперименте CMS LHC. Далее в работе [2] описываемый метод был применен для расчета однопетлевых электрослабых радиационных поправок в четырехфермионном процессе в канале нейтрального тока с конечным нейтринным состоянием. Также в работах [1, 2] приведена мотивационная часть, т.е. описание необходимости поиска новых, точных и математически не перегруженных методов расчета сложных диаграмм высших (следующих за борновским) порядков.

В настоящей работе разработанная техника применяется для расчета вклада ДО в поляризованном четырехфермионном процессе в канале заряженного тока. Точный расчет диаграмм двухбозонного обмена (боксов) с заряженным током

является неотъемлемой частью процедуры радиационной поправки данных (рождение одиночных  $W$ -бозонов в адронных столкновениях, глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклонах в канале заряженного тока и др.). Кроме этого, изучение двухбозонного обмена представляет интерес в мезонной физике, так как в рамках Стандартной модели некоторые кварковые процессы и распады в лидирующем порядке возможны только в виде боксовской диаграммы.

План работы следующий: в разд. 2 дано общее описание четырехфермионного процесса с заряженным током, в разд. 3 приведены выражения для сечения процесса с ДО, с использованием новой техники проделан расчет 4-точечных функций: для  $\gamma W(W\gamma)$ -боксов (разд. 4) и для  $ZW(WZ)$ -боксов (разд. 5). Асимптотическое поведение вклада боксов в режиме низких и высоких энергий показано в разд. 6. Выводы сделаны в разд. 7. Технические детали вынесены в Приложения.

### 2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА В БОРНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Дадим общее описание четырехфермионного процесса с продольной поляризацией начальных частиц. Для определенности рассмотрим в начальном состоянии кварки, а в конечном — лептоны (пользуясь элементарными заменами, можно использовать все полученные формулы для произвольной фермионной конфигурации):

$$d(p_1) + \bar{u}(p_2) \rightarrow W^-(q) \rightarrow l^-(p_3) + \bar{\nu}_l(p_4). \quad (1)$$

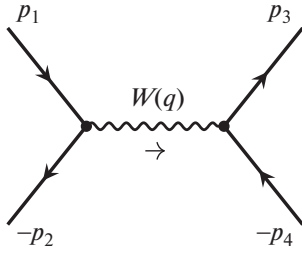
Учетом в расчете поляризацию частиц, имея в виду, что в экспериментах на будущих адронных коллайдерах, описание которых входит в круг задач,

<sup>1)</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия.

<sup>2)</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь.

<sup>3)</sup>Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель, Беларусь.

\*E-mail: zykunov@cern.ch



**Рис. 1.** Фейнмановская диаграмма процесса  $q\bar{q} \rightarrow l^-\bar{l}_1$  в борновском приближении. Волнистой линией обозначен  $W$ -бозон.

которые возможно решить предлагаемым в работе методом, обсуждается возможность поляризовать адроны.

Фейнмановская диаграмма, соответствующая процессу (1) в борновском приближении, приведена на рис. 1. Обозначения на диаграмме следующие:

- $p_1$  — 4-импульс первого кварка с ароматом  $d$  и массой  $m_d$ ;
- $p_2$  — 4-импульс второго антикварка (с ароматом  $u$  и массой  $m_u$ );
- $p_3$  — 4-импульс конечного заряженного лептона  $l^-$  с ароматом  $l$  и массой  $m_l$ ;
- $p_4$  — 4-импульс конечного антинейтрино  $\bar{\nu}_l$  (с тем же ароматом и нулевой массой);
- $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  — 4-импульс  $W^-$ -бозона с массой  $m_W$ .

Будем пользоваться общим кварковым индексом  $q = u, d$ ; общим лептонным индексом  $l = e, \mu, \tau$  и общим фермионным индексом  $f = q, l$ . Из 4-импульсов частиц формируется стандартный набор ( $r = s, t, u$ ) лоренц-инвариантных переменных Мандельштама:

$$\begin{aligned} s &= q^2 = (p_1 + p_2)^2, \\ t &= (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_2 - p_3)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В работе применяется ультрарелятивистское приближение (УРП):

$$|r| \gg m_f^2. \quad (3)$$

Для расчета дифференциального сечения  $d\sigma^0$  процесса (1) применяется стандартная диаграммная техника с применением правил Фейнмана из [3]. Приведем те из них, которые оказались необходимы. Входящему фермиону с 4-импульсом  $p$  соответствует биспинорная амплитуда  $u(p)$ , выходящему — амплитуда  $\bar{u}(p)$ . Промежуточные

бозоны обозначим малыми латинскими буквами:  $a, b, c, \dots = \gamma, Z, W$ . Пропагатору  $a$ -бозона (в калибровке Фейнмана) отвечает выражение  $-ig^{\alpha\beta}D_a(q)$ , где

$$D_a(q) = \frac{1}{q^2 - m_a^2}, \quad (4)$$

а  $q$  — 4-импульс передачи в пропагаторе. Используется правило так называемых комплексных масс

$$m_a^2 \rightarrow m_a^2 - i\epsilon_a, \quad (5)$$

где знак мнимой части задает направление обхода полюса. В настоящей работе используется схема с фиксированной шириной распада промежуточного бозона, для которой величина  $\epsilon_a$  выглядит следующим образом:

$$\epsilon_a = m_a\Gamma_a, \quad (6)$$

где  $\Gamma_a$  — это ширина  $a$ -бозона. Фотонная масса  $m_\gamma \equiv \lambda$  равна нулю везде, кроме специально отмеченных случаев, где она используется как инфинитезимальный параметр, который регуляризует инфракрасную расходимость (ИКР). Мнимая часть знаменателя пропагатора в случае фотона  $\epsilon_\gamma \rightarrow +0$  служит для обхода полюса.

Фермионный пропагатор выглядит так:

$$iS(p) = i\frac{\hat{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad (7)$$

где  $p$  — 4-импульс передачи и используется сокращенная запись  $\hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$ . Вершине взаимодействия фермиона  $f$  с калибровочным бозоном  $a$  соответствует выражение

$$ie\gamma_\mu\Gamma_f^a, \quad \text{где} \quad \Gamma_f^a = v_f^a - a_f^a\gamma_5. \quad (8)$$

Векторные и аксиально-векторные константы связи фермиона аромата  $f$  с фотоном и  $Z$ -бозоном:

$$\begin{aligned} v_f^\gamma &= -Q_f, \quad a_f^\gamma = 0, \\ v_f^Z &= \frac{I_f^3 - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W}, \quad a_f^Z = \frac{I_f^3}{2s_W c_W}; \end{aligned}$$

константы связи фермионов с  $W$ -бозоном:

$$v_f^W = a_f^W = \frac{1}{2\sqrt{2}s_W}. \quad (9)$$

Константы связи выражаются через параметры Стандартной модели (СМ):  $Q_f$  — электрический заряд  $f$ -частицы в единицах протонного заряда  $e$  и  $s_W$  ( $c_W$ ) — синус (косинус) угла Вайнберга, которые связаны в СМ с массами  $Z$ - и  $W$ -бозона соотношениями:

$$c_W = \frac{m_W}{m_Z}, \quad s_W = \sqrt{1 - c_W^2}. \quad (10)$$

Третья компонента слабого изоспина для конкретного типа фермиона принимает значения:

$$\begin{aligned} I_\nu^3 &= +\frac{1}{2}, & I_e^3 &= -\frac{1}{2}, \\ I_u^3 &= +\frac{1}{2}, & I_d^3 &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Амплитуда процесса (1) в вышеприведенных правилах Фейнмана выглядит так:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= ie^2 D_W(q) \cdot \bar{u}(-p_2) \gamma_\mu \Gamma_q^W u(p_1) \times \\ &\times \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \Gamma_l^W u(-p_4). \end{aligned} \quad (12)$$

Сечение процесса записывается по общему правилу для случая реакции  $2 \rightarrow 2$

$$d\sigma = \frac{1}{8\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_2, \quad (13)$$

где  $\mathcal{M}$  — амплитуда процесса, а фазовый объем реакции имеет вид

$$d\Phi_2 = \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2p_{30}} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{2p_{40}}. \quad (14)$$

В УРП фазовый объем после снятия четырех интегрирований с помощью  $\delta$ -функции и интегрирования по азимутальному углу антинейтринно нетрудно преобразовать к выражению  $\frac{\pi}{2s} dt$ .

Квадрируя амплитуду (12), получим борновское сечение в виде

$$d\sigma^0 = \frac{\pi\alpha^2}{s^2} \Pi^{WW} R_q^W dt. \quad (15)$$

Выражение  $R_q^W$  есть произведение следов матриц

$$\begin{aligned} R_q^W &= \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \Gamma_q^W U_1 \Gamma_q^{W+} \gamma_\nu U_2 \right] \times \\ &\times \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \Gamma_l^W U_4 \Gamma_l^{W+} \gamma_\nu U_3 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $U_{1,2}$  — спиновые матрицы плотности,  $U_{3,4}$  — проекционные операторы:

$$\begin{aligned} U_1 &= u(p_1) \bar{u}(p_1), & U_2 &= u(-p_2) \bar{u}(-p_2), \\ U_3 &= \sum u(p_3) \bar{u}(p_3), & U_4 &= \sum u(-p_4) \bar{u}(-p_4). \end{aligned}$$

Пропагаторы бозонов образуют комбинацию

$$\Pi^{WW} = D_W(q) D_W^*(q). \quad (17)$$

Коммутационные свойства гамма-матриц позволяют произвести факторизацию степеней продольной поляризации начальных частиц ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ), так что:  $R_q^W = 4u^2 W_\lambda$ , где комбинация степеней поляризации и констант связи лептонного дублета с  $W$ -бозоном выглядит так:

$$W_\lambda = 4(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(v_f^W)^4. \quad (18)$$

В результате имеем удобное представление дифференциального борновского сечения в следующей форме:

$$d\sigma^0 = 4\pi\alpha^2 W_\lambda \Pi^{WW} \frac{u^2}{s^2} dt. \quad (19)$$

Интегрируя дифференциальное сечение, получаем наблюдаемое сечение

$$\sigma^C = \int_{-s}^0 \frac{d\sigma^C}{dt} dt, \quad (20)$$

где индекс  $C$  означает вклад в сечение  $C = 0, \gamma W, ZW, \dots, \text{NLO}$ , значение всех используемых индексов будет объяснено ниже. Дадим определение относительной поправки к борновскому интегральному сечению для определенного вклада (вкладов):

$$\delta^C = \frac{\sigma^C}{\sigma^0}. \quad (21)$$

Наконец, отметим два существенных момента:

1. амплитуду следует домножить на соответствующий элемент матрицы Кабиббо–Кобаяси–Маскавы  $|V_{ud}| \approx 0.97427$ ,
2. сечение следует умножить на цветовой фактор  $\frac{1}{3}$  (коэффициент, происходящий от усреднения по цветам кварков).

С учетом сказанного во всех формулах для сечений удобно сделать следующее переопределение:

$$W_\lambda = \frac{4}{3} |V_{ud}|^2 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)(v_f^W)^4. \quad (22)$$

Как видно из формулы (22), сечение процесса (1) имеет простую зависимость от степеней поляризации начальных частиц: сечения с поляризациями кратны неполяризованному, это выполняется как на борновском уровне, так и для следующего порядка исследуемого процесса. Выполняются следующие соотношения между сечениями с конкретной поляризацией:

$$\begin{aligned} d\sigma_{LR}^0 &= 4d\sigma_{00}^0, & d\sigma_{L0}^0 &= d\sigma_{0R}^0 = 2d\sigma_{00}^0, \\ d\sigma_{RL}^0 &= d\sigma_{LL}^0 = d\sigma_{RR}^0 = d\sigma_{R0}^0 = d\sigma_{0L}^0 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Индекс  $L$  означает левую поляризацию  $\lambda_{1,2} = -1$ ; индекс  $R$  — правую поляризацию  $\lambda_{1,2} = +1$ ; индекс  $0$  означает отсутствие поляризации (в этом случае либо просто зануляем спиральности:  $\lambda_{1,2} = 0$ , либо, что равнозначно, после дважды сделанного усреднения получаем:  $d\sigma_{00}^0 = \frac{1}{4}(d\sigma_{LR}^0 + d\sigma_{RL}^0 + d\sigma_{LL}^0 + d\sigma_{RR}^0)$ ).

3. ВКЛАД В СЕЧЕНИЕ ОТ ДИАГРАММ ДВУХБОЗОННОГО ОБМЕНА

Дифференциальное сечение вклада ДО (с обменом бозонами  $a$  и  $W$ ) удобно представить разбитым на вклады от прямых (direct,  $D$ , соответствует рис. 2а) и перекрестных (crossed,  $C$ , соответствует рис. 2б) диаграмм:

$$d\sigma_D^{aW} = \frac{1}{2^3\pi s^2} M_D^{aW} M_0^{W+} dt, \quad (24)$$

$$d\sigma_C^{aW} = \frac{1}{2^3\pi s^2} M_C^{aW} M_0^{W+} dt.$$

Аналогичные формулы имеют место и для обратной конфигурации ( $Wb$ ) с тем исключением, что в случае конфигурации  $\gamma W$  существует (то есть разрешен законами сохранения) только прямой бокс, а в случае  $W\gamma$  — только перекрестный.

Произведения боксовской прямой и перекрестной амплитуд с борновской амплитудой в УРП выглядят так:

$$M_D^{aW} M_0^{W+} = \frac{1}{4} C_s \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_a(k) \times \quad (25)$$

$$\times D_W(q-k) \frac{1}{(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)} \times$$

$$I_{0,\alpha,\alpha\beta}^{ab} = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1, k_\alpha, k_\alpha k_\beta}{(k^2 - m_a^2)((k-q)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}, \quad (27)$$

где векторный и тензорный интегралы раскладываются на простые (векторные и тензорные соответственно) структуры (в духе работы [4]):

$$I_\alpha^{ab} = a_1 p_{1\alpha} + a_2 p_{3\alpha} + a_3 q_\alpha, \quad (28)$$

$$I_{\alpha\beta}^{ab} = b_0 g_{\alpha\beta} + b_1 p_{1\alpha} p_{1\beta} + b_2 p_{3\alpha} p_{3\beta} + \quad (29)$$

$$+ b_3 q_\alpha q_\beta + b_4 (p_{1\alpha} p_{3\beta} + p_{3\alpha} p_{1\beta}) +$$

$$+ b_5 (p_{1\alpha} q_\beta + q_\alpha p_{1\beta}) + b_6 (p_{3\alpha} q_\beta + q_\alpha p_{3\beta}).$$

Выражения для четырехточечных интегралов перекрестного бокса получаются из (27), (28), (29) заменой  $p_1 \rightarrow p_2$ .

Подставляя выражения (28), (29) в (25), получим для прямой диаграммы:

$$M_D^{aW} M_0^{W+} = 8C_s W_\lambda \times \quad (30)$$

$$\times (v_d^a + a_d^a)(v_l^a + a_l^a) [(a_1 + a_2 - I_0 - b_4)t + 2b_0].$$

Во всех коэффициентах  $I_0, a_{1,\dots}, b_{0,\dots}$  подразумеваются верхние индексы  $aW$ , как в левой части уравнений (28), (29). Аналогично, для выражения (26), соответствующего перекрестной диаграмме,

$$\times \text{Sp} \left[ \gamma_\beta \Gamma^W (\hat{p}_1 - \hat{k}) \gamma_\mu \times \right.$$

$$\times \Gamma^a (1 + \lambda_1 \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma_\nu \Gamma^W (1 - \lambda_2 \gamma_5) \hat{p}_2 \left. \right] \times$$

$$\times \text{Sp} \left[ \gamma^\mu \Gamma^a (\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma^\beta \Gamma^W \hat{p}_4 \gamma^\nu \Gamma^W \hat{p}_3 \right],$$

$$M_C^{Wb} M_0^{W+} = \quad (26)$$

$$= \frac{1}{4} C_s \int \frac{d^4k}{i\pi^2} D_W(k-q) D_b(k) \times$$

$$\times \frac{1}{(k^2 - 2p_2k)(k^2 - 2p_3k)} \text{Sp} \left[ \gamma_\mu \Gamma^b (\hat{k} - \hat{p}_2) \gamma_\beta \times \right.$$

$$\times \Gamma^W (1 + \lambda_1 \gamma_5) \hat{p}_1 \gamma_\nu \Gamma^W (1 - \lambda_2 \gamma_5) \hat{p}_2 \left. \right] \times$$

$$\times \text{Sp} \left[ \gamma^\mu \Gamma^b (\hat{p}_3 - \hat{k}) \gamma^\beta \Gamma^W \hat{p}_4 \gamma^\nu \Gamma^W \hat{p}_3 \right],$$

где  $C_s = 4\pi\alpha^3 D_W^*(q)$ .

Четырехточечные скалярный, векторный и тензорный интегралы, присутствующие в прямом боксе (25), обозначим так:

получим:

$$M_C^{Wb} M_0^{W+} = 8C_s W_\lambda (v_u^b + a_u^b)(v_l^b + a_l^b) \times \quad (31)$$

$$\times \left[ (I_0 - a_1 - a_2 + 2b_4)u - 8b_0 + \right.$$

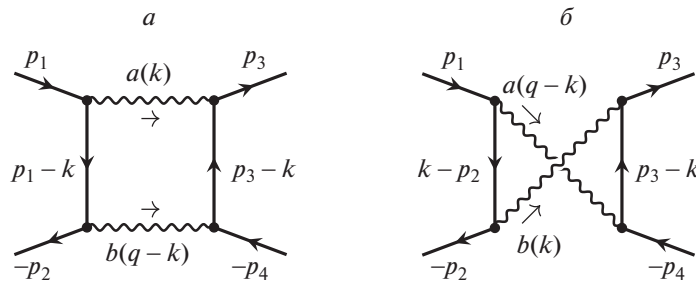
$$\left. + 2(a_3 - b_3 - b_5 - b_6)s \right].$$

Для вычисления следов гамма-матриц полезным оказывается свойство коммутативности матриц типа  $A + B\gamma_5$  (здесь  $A$  и  $B$  — константы).

Далее следуем методу работы [1], коротко опишем его основные этапы в применении к настоящему расчету. Последовательно объединяя множители в знаменателе 4-точечного интеграла (так называемая параметризация Фейнмана [5]) с помощью формул

$$\frac{1}{A^n B} = \int_0^1 \frac{nx^{n-1} dx}{(Ax + B\bar{x})^{n+1}}, \quad (32)$$

$$n \in N, \quad \bar{x} = 1 - x,$$



**Рис. 2.** Диаграммы двухбозонных вкладов в процесс  $q\bar{q} \rightarrow l^{-}l^{+}$ :  $a$  — прямой бокс,  $b$  — перекрестный бокс. Волнистой линией обозначен фотон,  $Z$ -бозон или  $W$ -бозон.

получим выражение

$$\frac{1}{ABCD} = 3! \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz yz^2 \frac{1}{E^4}, \quad (33)$$

где

$$E = Axyz + B\bar{x}yz + C\bar{y}z + D\bar{z} = k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta. \quad (34)$$

Ключевой момент метода работы [1] — выбор порядка сомножителей  $A, B, C, D$  в знаменателе (33), так как величины  $\mathcal{P}$  и  $\Delta$  критически зависят от выбранной последовательности. Выбранный порядок объединения сомножителей и результат для различных конфигураций бозонов показан в табл. 1. При записи комплексных масс используется правило (5).

Интегрирование по 4-вектору  $k$  произведем, пользуясь известными формулами (см., например, [6]):

$$3! \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1; k_\alpha; k_\alpha k_\beta}{[k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta]^4} = \frac{1; \mathcal{P}_\alpha; \mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta - g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}^2 - \Delta)/2}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}. \quad (35)$$

$$Y_0^{\gamma W} = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{2kq}{k^2((k-q)^2 - m_W^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}. \quad (38)$$

Объединяем знаменатели по формуле (33), затем снимаем интеграл по  $k$ , пользуясь (35), тогда

$$Y_0^{\gamma W} = \int_0^1 dx \int_0^1 ydy \int_0^1 z^2 dz \frac{2\mathcal{P}q}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}. \quad (39)$$

Упрощая, получим  $2\mathcal{P}q = q^2(1 + xy)z$ . Далее, по-

сформулируем три полезных для дальнейшего расчета коэффициента  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , которые связаны с комбинацией  $\mathcal{P}^2 - \Delta$  соотношением:

$$\mathcal{P}^2 - \Delta = (\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})z. \quad (36)$$

#### 4. ПРЯМОЙ $\gamma W$ -БОКС

Приступаем к расчету 4-точечной функции  $I_0^{\gamma W}$ . В силу ее инфракрасной расходимости требуется предварительное преобразование: скомбинируем (в духе работы [6]) 3- и 4-точечные функции, чтобы аналитически выделить ИКР, для чего введем 4-точечный инфракрасно конечный интеграл:

$$Y_0^{\gamma W} = (q^2 - m_W^2)I_0^{\gamma W} - H_0^\gamma + F_0^W. \quad (37)$$

3-точечные функции  $H_0^\gamma$  (инфракрасно расходящаяся) и  $F_0^W$  (инфракрасно конечная) определяются и рассчитываются в Приложении А. Интеграл  $Y_0^{\gamma W}$  после приведения к общему знаменателю подынтегрального выражения приобретает вид

сле сокращения в дроби  $z^2$  получаем

$$Y_0^{\gamma W} = q^2 \int_0^1 dx \int_0^1 y(1 + xy)dy \times \int_0^1 \frac{zdz}{(\mathcal{A}z + \mathcal{B} - i\mathcal{C})^2}, \quad (40)$$

**Таблица 1.** Выражения  $A, B, C, D, \mathcal{P}, \Delta$  для различных конфигураций бозонов

	$\gamma W$ , прям. ( $W\gamma$ , перекр.)	$ZW(WZ)$ , прям.	$ZW(WZ)$ , перекр.
$A$	$(k - q)^2 - m_W^2$	$(k - q)^2 - m_{W(Z)}^2$	$(k - q)^2 - m_{Z(W)}^2$
$B$	$k^2 - 2p_3k$	$k^2 - m_{Z(W)}^2$	$k^2 - m_{W(Z)}^2$
$C$	$k^2 - 2p_{1(2)}k$	$k^2 - 2p_1k$	$k^2 - 2p_2k$
$D$	$k^2 - m_\gamma^2$	$k^2 - 2p_3k$	$k^2 - 2p_3k$
$\mathcal{P}$	$(\bar{y}p_{1(2)} + \bar{x}yp_3 + xyq)z$	$\bar{y}zp_1 + \bar{z}p_3 + xyzq$	$\bar{y}zp_2 + \bar{z}p_3 + xyzq$
$\Delta$	$(q^2 - m_W^2)xyz$	$[(q^2 - m_{W(Z)}^2)x - m_{Z(W)}^2\bar{x}]yz$	$[(q^2 - m_{Z(W)}^2)x - m_{W(Z)}^2\bar{x}]yz$

где

$$A = (\bar{y}p_1 + \bar{x}yp_3 + xyq)^2, \quad (41)$$

$$B = (m_W^2 - q^2)xy, \quad C = \epsilon_W xy.$$

Заметим, что  $A > 0$  (так как  $q$  — времениподобный 4-вектор,  $q^2 > 0$ ) во всей области интегрирования по параметрам Фейнмана.

Теперь нетрудно снять аналитически интеграл по  $z$  (все нужные интегралы подобного типа приведены в Приложении Б):

$$Y_0^{\gamma W} = q^2 \int_0^1 dx \int_0^1 y(1 + xy)\mathcal{Y}_S dy. \quad (42)$$

В полученном виде интеграл не имеет особенностей и областей, проблемных с точки зрения возможной потери точности. Итак, зная  $Y_0^{\gamma W}$  из (42),  $H_0^\gamma$  из (П.2) и  $F_0^W$  из (П.8), получим

$$I_0^W = D_W(q)(Y_0^{\gamma W} + H_0^\gamma - F_0^W). \quad (43)$$

Векторный интеграл  $I_\alpha^{\gamma W}$ , разложенный как (28), инфракрасно конечен, для его расчета достаточно объединения знаменателей и интегрирования. Воспользуемся формулой (35):

$$I_\alpha^{\gamma W} = \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_0^1 z^2 dz \frac{\mathcal{P}_\alpha}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}, \quad (44)$$

затем интегрируем по  $z$  и сравниваем коэффициенты при одинаковых 4-векторах с выражением (28). В результате получим

$$a_1 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \bar{y} \mathcal{Y}_S, \quad (45)$$

$$a_2 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^2 \mathcal{Y}_S, \quad a_3 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy x y^2 \mathcal{Y}_S.$$

Таким же образом, но используя разложение (29), вычисляем тензорный интеграл  $I_{\alpha\beta}^{\gamma W}$ . Объединяем знаменатели и интегрируем по формуле (35):

$$I_{\alpha\beta}^{\gamma W} = \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \times \quad (46)$$

$$\times \int_0^1 z^2 dz \frac{\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}_\beta - g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}^2 - \Delta)/2}{(\mathcal{P}^2 - \Delta)^2}.$$

Интегрируем по  $z$  и сравниваем коэффициенты при одинаковых тензорах с выражением (29), в результате получаем

$$b_0 = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \mathcal{Y}_A. \quad (47)$$

Коэффициенты  $b_1$  и  $b_2$  не входят в ультрарелятивистское выражение для сечения (они приведены в [1]). Наконец, остальные тензорные коэффициенты имеют вид

$$b_3 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy x^2 y^3 \mathcal{Y}_B, \quad (48)$$

$$b_4 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^2 \bar{y} \mathcal{Y}_B,$$

$$b_5 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy x y^2 \bar{y} \mathcal{Y}_B,$$

$$b_6 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy x \bar{x} y^3 \mathcal{Y}_B.$$

Явные выражения для  $\mathcal{Y}_{A,B}$  приведены в Приложении Б.

5. ПРЯМОЙ  $ZW$ -БОКС

Для расчета вклада диаграмм с двумя массивными бозонами применяем технику, использованную выше. В случае бозонов с массами, значительно превышающими фермионные, достаточно получить ультрарелятивистский результат. Пренебрежем фермионными массами, тогда коэффициенты в знаменателе подынтегральной функции 4-точечных интегралов  $I^{ZW}$  выглядят так:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= t\bar{y} - sx\bar{x}y^2, \\ \mathcal{B} &= -t\bar{y} + m_Z^2\bar{x}y + m_W^2xy, \\ \mathcal{C} &= \epsilon_Z\bar{x}y + \epsilon_Wxy. \end{aligned} \quad (49)$$

Приведем выражения, полученные после процедуры интегрирования, которые требуются для вычисления сечения. Скалярный интеграл имеет вид

$$I_0^{ZW} = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \mathcal{Y}_{\mathcal{P}}. \quad (50)$$

Векторный интеграл  $I_{\alpha}^{ZW}$ , разложенный согласно (28), имеет следующие векторные коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy (\mathcal{Y}_{\mathcal{P}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{S}}), \\ a_2 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{S}}, \\ a_3 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Тензорный интеграл  $I_{\alpha\beta}^{ZW}$ , который задается через разложение (29), имеет такие коэффициенты:

$$\begin{aligned} b_0 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 dx dy \mathcal{Y}_{\mathcal{A}}, \\ b_3 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x}^2 y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}, \\ b_4 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy y \bar{y} (\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}), \\ b_5 &= \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^2 (\mathcal{Y}_{\mathcal{S}} - \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}), \end{aligned}$$

$$b_6 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^2 \bar{y} \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}.$$

Выражения для  $\mathcal{Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{S},\mathcal{P}}$  приведены в Приложении Б.

Можно легко убедиться, что комбинации коэффициентов, присутствующие в сечении, существенно упрощаются в сумме, например, комбинация

$$I_0 - a_1 - a_2 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy y^2 \mathcal{Y}_{\mathcal{S}} \quad (52)$$

теряет зависимость от  $\mathcal{Y}_{\mathcal{P}}$ . Другая комбинация

$$a_3 - b_3 - b_5 - b_6 = \int_0^1 \int_0^1 dx dy \bar{x} y^3 \mathcal{Y}_{\mathcal{B}} \quad (53)$$

теряет зависимость от  $\mathcal{Y}_{\mathcal{S}}$ .

Коэффициенты, необходимые для расчета  $WZ$ -боксов, получаются из формул для  $ZW$ -случая заменой индексов  $Z \leftrightarrow W$  в константах связи и пропагаторах. Непосредственной заменой  $p_1 \rightarrow p_2$  из выражений для прямых боксов получаются выражения для перекрестных (такая замена означает перестановку  $t \rightarrow u$ ).

## 6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВКЛАДА БОКСОВ В РЕЖИМЕ НИЗКИХ И ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Будем пользоваться следующими сокращениями:

1. LE-режим (от “low energies”, низкие энергии):  $m_f \ll \sqrt{s} \ll m_W$ ,
2. RE-режим (“R” от “resonance”,  $W$ -резонанс):  $\sqrt{s} \sim m_W$ ,
3. HE-режим (от “high energies”, высокие энергии):  $\sqrt{s} \gg m_{W,Z}$ .

Формулы содержат три типа логарифмов (напомним, что  $r = r_{1,2} = s, t, u$ ):

1. коллинеарные логарифмы (collinear logarithms)  
 $L_{rf} = \ln \frac{|r|}{m_f^2}$ ,
2. судаковские логарифмы (Sudakov logarithms)  
 $L_{ra} = \ln \frac{|r|}{m_a^2}$ ,
3. логарифм отношения двух инвариантов  
 $l_{r_1 r_2} = \ln \frac{|r_1|}{|r_2|}$ .

Чтобы получить LE-формулы для  $\gamma W$ -боксов, нужно воспользоваться общим выражением через коэффициенты и занулить все, кроме  $b_0$  и интеграла  $H_0^\gamma$  из  $I_0$  (это доказано, например, в [7], см. также ссылки там). Для  $b_0$  (прямого бокса) используем асимптотическое выражение:

$$b_0^{\gamma W, LE} = -\frac{1}{8m_W^2}(3 + 2L_{Wt}). \quad (54)$$

Для бокса  $ZW$ -типа важен только тензорный коэффициент  $b_0$ :

$$b_0^{ZW, LE} = \frac{1}{2(m_Z^2 - m_W^2)} \ln \frac{m_W}{m_Z}. \quad (55)$$

Чтобы получить HE-формулы, воспользуемся асимптотическими выражениями для прямых боксов из [7] (они работают для всех случаев:  $ab = \gamma W, W\gamma, ZW, WZ$ ), тогда:

$$d\sigma_D^{\gamma W, HE} = \frac{\alpha}{\pi} d\sigma^0 Q_l Q_d \left( l_{st}^2 \frac{t^2 + u^2}{2u^2} + l_{st} \frac{s}{u} - t [H_0^\gamma(p_1, p_3) + H_0^W(p_1, p_3)] \right). \quad (56)$$

Для перекрестных боксов получим:

$$d\sigma_C^{W\gamma, HE} = \frac{\alpha}{\pi} d\sigma^0 Q_l Q_u \left( -l_{su}^2 + u [H_0^\gamma(p_2, p_3) + H_0^W(p_2, p_3)] \right). \quad (57)$$

В форме записи (56), (57) явно выделена 3-точечная функция  $H_0^\gamma$ , ответственная за ИКР.

Приведем расчет 3-точечной функции в HE-режиме, стартуя с выражения (П.8). Где это возможно, применяется УРП.

$$H_0^W(p_1, p_3) \approx -\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{\mathcal{E}} \approx -\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{2p_1 p_3 x y \bar{y} + m_W^2 x y}. \quad (58)$$

Введем новую переменную  $\alpha = -m_W^2/t$ , в HE-режиме  $\alpha \rightarrow +0$ . Снимая интегралы по параметрам Фейнмана, получим:

$$H_0^W(p_1, p_3) \approx \frac{1}{t} \left[ \ln^2 \alpha - \ln(1 - \alpha) \ln \alpha + \text{Li}_2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]. \quad (59)$$

Наконец, применяя преобразование дилогарифма Спенса:

$$\text{Li}_2(x) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{1}{3} \pi^2, \quad x > 0 \quad (60)$$

и раскладывая в ряд по  $\alpha$ , получим асимптотическое выражение, которое воспроизводит формулу (30) из [8], полученную там другим способом:

$$H_0^W(p_1, p_3) \approx \frac{1}{t} \left[ \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln^2 \alpha + \alpha \ln \alpha + \dots \right]. \quad (61)$$

Сечение прямых  $ZW$ - и  $WZ$ -боксов в HE-режиме выглядит так:

$$d\sigma_D^{ZW+WZ, HE} = \frac{\alpha}{\pi} d\sigma^0 \left[ (v_d^Z + a_d^Z)(v_l^Z + a_l^Z) + (v_u^Z + a_u^Z)(v_\nu^Z + a_\nu^Z) \right] \times \left( l_{st}^2 \frac{t^2 + u^2}{2u^2} + l_{st} \frac{s}{u} - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{1}{2} L_{Zt}^2 - \frac{1}{2} L_{Wt}^2 \right). \quad (62)$$

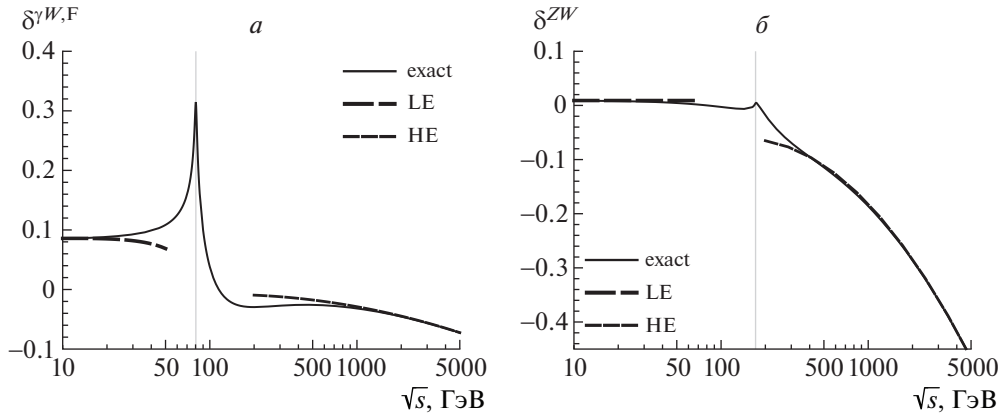
Сечение перекрестных  $ZW$ - и  $WZ$ -боксов в HE-режиме такое:

$$d\sigma_C^{ZW+WZ, HE} = \frac{\alpha}{\pi} d\sigma^0 \left[ (v_d^Z + a_d^Z)(v_\nu^Z + a_\nu^Z) + (v_u^Z + a_u^Z)(v_l^Z + a_l^Z) \right] \times \left( -l_{su}^2 + \frac{2\pi^2}{3} + \frac{1}{2} L_{Zu}^2 + \frac{1}{2} L_{Wu}^2 \right). \quad (63)$$

Для иллюстрации работы метода и рассчитанного асимптотического поведения выбрана реакция  $d\bar{u} \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  с неполяризованными кварками. Для численного интегрирования по двум оставшимся фейнмановским параметрам используем Монте-Карло интегратор VEGAS [9].

Электрослабые параметры, массы и ширины частиц взяты из [10]. Для масс кварков используем значения:  $m_u = 0.06983$  ГэВ,  $m_d = 0.06984$  ГэВ [7]. Кварковые массы встречаются во вкладе собственных энергий и во всех инфракрасно расходящихся вкладах, рассмотренных здесь. Что касается последнего, то в сумме соответствующие коллинеарные логарифмы сводятся, как и следует, к первой степени и их вид в точности тот, который в применении к физической ситуации (например, для протон-протонного рождения одиночных  $W$ -бозонов) позволяет адсорбировать коллинеарную сингулярность в функции партонных распределений в полном соответствии, например, с  $\overline{\text{MS}}$ -схемой КХД [11]. Таким образом, физический результат не зависит от масс кварков и поэтому в этой работе мы ограничимся вышеприведенными стандартными “эффективными значениями”  $m_u$  и  $m_d$ , которые выбраны такими, чтобы обеспечить сдвиг постоянной тонкой структуры, обусловленный поляризацией вакуума адронами (с учетом





**Рис. 3.** Зависимости от энергии: *a* — относительных поправок к инфракрасно конечной части интегрального сечения  $\gamma W$ - и  $W\gamma$ -боксов, *б* — относительных поправок к интегральному сечению  $ZW$ - и  $WZ$ -боксов.

пяти кварковых ароматов):  $\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(m_Z^2) = 0.02757$  [12], где

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(s) = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_{q=u,d,s,c,b} Q_q^2 \left( \ln \frac{s}{m_q^2} - \frac{5}{3} \right). \quad (64)$$

Использование фиксированных кварковых масс как численных параметров является одним из возможных вариантов описания вкладов в ЭСП, обусловленных поляризацией вакуума адронами. Альтернативно можно, например, применить аппарат дисперсионных соотношений и непосредственную экспериментальную информацию о сечении реакции  $e^+e^- \rightarrow$  адроны.

На рис. 3 приведены относительные поправки к дифференциальному сечению в зависимости от энергии для двух случаев: *a*)  $C = \gamma W + W\gamma$ , *б*)  $C = ZW + WZ$ . Для каждого случая изображены три кривые: точный (exact) расчет по новой технологии этой работы, асимптотический расчет для LE-режима и асимптотический расчет для HE-режима. Оказывается, в канале заряженного тока для бокса  $\gamma W$ -типа довольно значительный вклад дают коэффициенты  $a_1, a_2$ , они также учтены при изображении асимптотической линии, представленной на рис. 3а. Видно превосходное согласие точных и асимптотических результатов и нетривиальное поведение точного результата в RE-режиме (в областях  $\sqrt{s} \sim m_W$  и  $\sqrt{s} \sim m_Z + m_W$ , точки обозначены вертикальными линиями).

### 7. АНАЛИЗ И ВЫВОДЫ

В табл. 2 продемонстрировано отсутствие ИКР в физическом результате, то есть независимость результата от нефизического параметра — массы фотона  $\lambda$  при различных энергиях реакции в сумме виртуальных вкладов (обозначены индексом  $V$ , сюда входят боксы и вклады из Приложения В,

кроме инфракрасно конечного вклада собственных энергий  $W$ -бозона) и вклада мягкого тормозного излучения (сюда входят вклады излучения из фермионных линий из Приложения В, инфракрасно конечный вклад излучения из  $W$ -бозона опущен, для значения максимальной энергии мягкого фотона выбрано  $\omega = 0.01\sqrt{s}$ ). Устранение ИКР в сумме виртуального и мягкого тормозного вкладов [13] на современном уровне развития расчетных методов и компьютерных мощностей является не только непременным условием правильности результата, но и удобным средством для контроля на пути теоретических вычислений и отладки компьютерной программы.

На рис. 4 приведены зависимости от энергии: *a* — борновского сечения (LO) и сечения с учетом ЭСП (NLO), *б* — относительной ЭСП (учтены все инфракрасно расходящиеся вклады). Видно пиковое поведение относительной поправки в областях

**Таблица 2.** Структура относительных поправок к сечению при разных энергиях (LE, в точке  $W$ -резонанса, HE) при  $\omega/\sqrt{s} = 0.01$

$\sqrt{s}$ , ГэВ	$\lambda/\sqrt{s}$	$V$	$R$	$V + R$
50.0	$10^{-15}$	-1.79332	1.59534	-0.19799
	$10^{-10}$	-1.06956	0.87158	-0.19798
	$10^{-5}$	-0.34580	0.14782	-0.19798
80.379	$10^{-15}$	-1.90173	1.66792	-0.23381
	$10^{-10}$	-1.13847	0.90466	-0.23381
	$10^{-5}$	-0.37521	0.14140	-0.23382
500.0	$10^{-15}$	-2.26202	1.93215	-0.32987
	$10^{-10}$	-1.34668	1.01681	-0.32988
	$10^{-5}$	-0.43135	0.10147	-0.32988

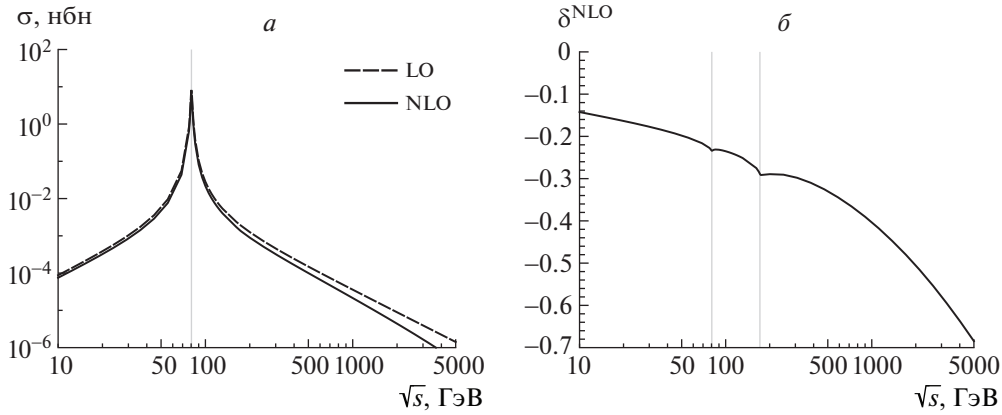


Рис. 4. Зависимости от энергии: *a* — борновского сечения (LO) и сечения с учетом ЭСП (NLO), *б* — относительной ЭСП.

$\sqrt{s} \sim m_W$  и  $\sqrt{s} \sim m_Z + m_W$  (эти точки обозначены вертикальными линиями) и дважды логарифмическое поведение в HE-режиме, обусловленное судаксовскими логарифмами от боксов с массивными промежуточными бозонами.

В настоящей работе новая техника расчета вклада диаграмм двухбозонного обмена [1] применена к расчету сечения процесса с поляризованными фермионами в канале заряженного тока. Проведена успешная сверка полученных результатов с асимптотическими выражениями для энергий ниже и выше  $W$ -резонанса. Для вклада ДО получены простые аналитические выражения без особенностей, позволяющие получить точную оценку, которая надежно контролируется. В явном виде представлены действительная и мнимая части. В расчете не возникают ультрафиолетовые расходимости (в 2-точечных функциях), результат также свободен от пикового поведения, обусловленного определителями Грама в знаменателях, перечисленные особенности характерны для расчетов, проведенных с помощью редукции Вельтмана–Пассарино [4]. Указанные преимущества полезны в кругу физических задач, ограниченных  $s$ -каналом: фермион-антифермионная аннигиляция, процесс Дрелла–Яна, рождение одиночных  $W$ -бозонов в протонных столкновениях, расчета распадов мезонов и т.д. Техника может быть распространена на взаимодействие, отличное от стандартно-модельного  $V - A$ -типа: контактное (скалярное) взаимодействие, присутствие аномальных вершин,  $Z'$ -бозона,  $W'$ -бозона, “тяжелого” фотона и другое.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2025” (подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”, № гос. рег. 20211777). Автор признателен коллегам по

группе RDMS CMS и Ю.М. Быстрицкому за обсуждение.

Приложение А

РАСЧЕТ 3-ТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Скалярная 3-точечная функция  $H_0$ , встречающаяся в (37), определяется так:

$$H_0^a = H_0^a(p_1, p_3) = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - m_a^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}. \quad (\text{П.1})$$

Расчет интегралов такого типа нетрудно осуществить методом 'т Хоофта–Велтмана [14] (подробное вычисление можно найти, например, в [7]). Для случая  $a = \gamma$  в УРП получаем компактное выражение, симметричное относительно замены  $m_d \leftrightarrow m_l$ :

$$H_0^\gamma(p_1, p_3) = \frac{1}{t} \left( \ln \frac{-t}{\lambda^2} \ln \frac{-t}{m_d m_l} - \frac{1}{2} \ln \frac{-t}{m_d^2} \ln \frac{-t}{m_l^2} - \ln^2 \frac{m_d}{m_l} - \frac{1}{6} \pi^2 \right). \quad (\text{П.2})$$

Аналогичная формула для  $H_0^\gamma(p_2, p_3)$  получается заменами  $t \rightarrow u, m_d \rightarrow m_u$ .

Скалярная 3-точечная функция  $F_0$  из (37) определяется так:

$$F_0^b = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \times \frac{1}{((k - q)^2 - m_b^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}. \quad (\text{П.3})$$

Заменой переменной интегрирования  $k \rightarrow k + q$  еe нетрудно привести к виду (П.1) (так доказывается, что  $F_0^b = H_0^b$ ), затем рассчитать по технологии [14]. Результатом (для  $b = W$ ) будет нетривиальная

комбинация 12 дилогарифмов. Покажем здесь, как методом, примененным для 4-точечных интегралов, получить простые формулы и в случае 3-точечной функции.

Итак, после замены  $k \rightarrow k + q$  интеграл выглядит так:

$$F_0^W = H_0^W = \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{(k^2 - m_W^2)(k^2 - 2p_1k)(k^2 - 2p_3k)}. \quad (\text{П.4})$$

Выбирая  $A = k^2 - m_W^2$ ,  $B = k^2 - 2p_1k$ ,  $C = k^2 - 2p_3k$ , получим

$$F_0^W = H_0^W = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1}{E^3}, \quad (\text{П.5})$$

$$E = (Ax + B\bar{x})y + C\bar{y}.$$

После преобразований получим

$$E = k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta, \quad \mathcal{P} = \bar{x}yp_1 + \bar{y}p_3,$$

$$\Delta = -m_W^2xy.$$

Квадрат 4-вектора  $\mathcal{P}$  положителен в любой точке области интегрирования:

$$\mathcal{P}^2 = (m_d^2\bar{x}y + m_l^2\bar{y})(1 - xy) - t\bar{x}y\bar{y}. \quad (\text{П.6})$$

Снимая интеграл по известной формуле

$$2 \int \frac{d^4k}{i\pi^2} \frac{1; k_\alpha}{[k^2 - 2\mathcal{P}k + \Delta]^3} = -\frac{1; \mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}^2 - \Delta}, \quad (\text{П.7})$$

получим

$$F_0^W = H_0^W = - \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{\mathcal{E} - i\epsilon_W xy}, \quad (\text{П.8})$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}^2 + m_W^2xy.$$

Приложение Б

### ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

В расчете встретились следующие интегралы:

$$\mathcal{Y}_A = \int_0^1 \frac{z dz}{Az + B - iC} =$$

$$= \frac{1}{A^2} \left[ A + C\mathcal{G}_A - B\mathcal{G}_L + i(B\mathcal{G}_A + C\mathcal{G}_L) \right],$$

$$\mathcal{Y}_B = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(Az + B - iC)^2} =$$

$$= \frac{1}{A} \left[ 2\mathcal{Y}_A - \frac{A+B}{D} - i\frac{C}{D} \right],$$

$$\mathcal{Y}_S = \int_0^1 \frac{z dz}{(Az + B - iC)^2} =$$

$$= \frac{1}{A^2} \left[ -\frac{A(A+B)}{D} + \mathcal{G}_L - i\left(\frac{AC}{D} + \mathcal{G}_A\right) \right],$$

$$\mathcal{Y}_P = \int_0^1 \frac{dz}{(Az + B - iC)^2} =$$

$$= \frac{B(A+B) - C^2 + i(A+2B)C}{(B^2 + C^2)D},$$

где используются такие сокращения:

$$D = (A+B)^2 + C^2, \quad \mathcal{G}_L = \frac{1}{2} \ln \frac{D}{B^2 + C^2}, \quad (\text{П.9})$$

$$\mathcal{G}_A = \text{arctg} \frac{B}{C} - \text{arctg} \frac{A+B}{C}.$$

Приложение В

### ВИРТУАЛЬНЫЙ И МЯГКИЙ ОДНОПЕТЛЕВЫЕ ВКЛАДЫ

Приведем здесь выражения для виртуального и мягкого однопетлевых вкладов в ЭСП. Учет последнего нужен для устранения ИКР [13]. Имеет место простая факторизация:

$$d\sigma^{\text{NLO}} = (\delta^{\text{BSE}} + \delta^{Su} + \delta^{Sl} + \delta^{Vq} + \delta^{Vl} + \delta^{\text{Box}} + \delta^{\text{Soft}}) d\sigma^0. \quad (\text{П.10})$$

Заметим, что вклад мягкого фотонного излучения входит в это выражение наравне с виртуальными вкладами, поскольку кинематика мягкого излучения совпадает с безрадиационной при условии малости максимальной энергии мягкого фотона  $\omega$ . Боксовский вклад  $\delta^{\text{Box}} = \delta^{\gamma W+W\gamma} + \delta^{ZW+WZ}$  обсуждается в разд. 4 и разд. 5 соответственно. Приведем остальные вклады.

Вклад от бозонных собственных энергий такой:

$$\delta^{\text{BSE}} = -2\text{Re}D_W(q)\hat{\Sigma}_T^{WW}(s), \quad (\text{П.11})$$

где  $\hat{\Sigma}_T^{WW}(s)$  — перенормированная поперечная часть вклада диаграмм собственных энергий  $W$ -бозона. В нее не входят пропагаторные структуры и множитель  $i^2 = -1$ , вынесенный перед правой частью (П.11). Для расчета  $\hat{\Sigma}_T^{WW}(s)$  здесь используется схема перенормировки на массовой поверхности с применением ренормализационных условий Холлика [3, 15].

Вклад от собственных энергий  $u$ -кварков такой (см. формулу (5.46) из [3]):

$$\delta^{Su} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( Q_u^2 [L_{Zu}^2 - 2L_{u\gamma}^2] - \right) \quad (\text{П.12})$$

$$- Q_d^2 [L_{Zd}^2 - 2L_{d\gamma}^2 + \frac{3}{2}].$$

Вклад от собственных энергий нейтрино такой (см. формулу (2.12) из [16]):

$$\delta^{Sl} = \frac{\alpha}{4\pi} \left( L_{Zl}^2 - 2L_{l\gamma}^2 + \frac{3}{2} \right). \quad (\text{П.13})$$

Вклад от кварковой вершинной функции вычислен в [3]:

$$\begin{aligned} \delta^{Vq} = & \frac{\alpha}{2\pi} \text{Re} \left( Q_u Q_d \left[ \frac{3}{2} L_{du} + \right. \right. \quad (\text{П.14}) \\ & + \frac{1}{2} \Lambda_1(s, m_d) + \frac{1}{2} \Lambda_1(s, m_u) + \frac{s_W^2}{c_W^2} \Lambda_2(s, m_Z) \left. \right] + \\ & + \frac{2s_W^2 - 1}{4s_W^2 c_W^2} \Lambda_2(s, m_Z) + 3Q_u \Lambda_4^{m_u}(s, m_W, 0) - \\ & - 3Q_d \Lambda_4^{m_d}(s, m_W, 0) + \\ & + \frac{3c_W^2}{s_W^2} \Lambda_4(s, m_Z, m_W) - \frac{1}{3} \left[ L_{Zd} - 2L_{d\gamma} + \frac{9}{2} \right] + \\ & + \frac{3}{s_W^2} + \left[ \frac{1}{2s_W^2} - \frac{3c_W^2}{s_W^4} \right] L_{ZW} \Big). \end{aligned}$$

Вклад от лептонной вершинной функции выглядит так [3]:

$$\begin{aligned} \delta^{Vl} = & \frac{\alpha}{2\pi} \text{Re} \left( \frac{3(3c_W^2 - 1)}{2s_W^2} + L_{lW} + \right. \quad (\text{П.15}) \\ & + 2L_{l\gamma} + \left[ \frac{2s_W^2 - 1}{2s_W^2} + \frac{3c_W^2}{s_W^4} \right] L_{WZ} + \\ & + \frac{2s_W^2 - 1}{4s_W^2 c_W^2} \Lambda_2(s, m_Z) + 3\Lambda_4^{m_l}(s, m_W, 0) + \\ & + \frac{3c_W^2}{s_W^2} \Lambda_4(s, m_Z, m_W) \Big). \end{aligned}$$

Функции  $\Lambda_i$  приведены в работе [3].

Мягкий вклад в поправку имеет вид

$$\begin{aligned} \delta^{\text{Soft}} = & -\frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{|\mathbf{p}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} \left[ Q_d \frac{p_1}{pp_1} - \right. \quad (\text{П.16}) \\ & \left. - Q_u \frac{p_2}{pp_2} - Q_l \frac{p_3}{pp_1} \right]^2, \end{aligned}$$

где  $p$  — 4-импульс тормозного фотона. Заметим, что в этот результат не входят инфракрасно конечные вклады от излучения из  $W$ -бозона. Возводим квадратную скобку в квадрат, объединяем в интерференционных слагаемых знаменатели с помощью (32) и интегрируем по  $\mathbf{p}$  с помощью мастер-интеграла из [14], в результате получим

$$\delta^{\text{Soft}} = -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \left[ +Q_d^2 (2L_\omega - L_{sd}) + \right. \quad (\text{П.17})$$

$$\begin{aligned} & + Q_u^2 (2L_\omega - L_{su}) + Q_l^2 (2L_\omega - L_{sl}) - \\ & - Q_d Q_u S_{\omega,12} - Q_d Q_l S_{\omega,13} + Q_u Q_l S_{\omega,23} \Big], \end{aligned}$$

где присутствующий в логарифме  $L_\omega = \ln \frac{2\omega}{\lambda}$  параметр  $\lambda$  регуляризует ИКР, а величины  $S$  имеют вид

$$\begin{aligned} S_{\omega,ij} = & \frac{2p_i p_j}{p_{ij}^2} \left( 2L_\omega + \frac{1}{\beta_{ij}} \ln \frac{1 - \beta_{ij}}{1 + \beta_{ij}} \right), \\ p_{ij} = & xp_i + \bar{x}p_j, \quad \beta_{ij} = \sqrt{1 - \frac{p_{ij}^2}{p_{ij0}^2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что для всех случаев в с.ц.м.  $p_{ij0} = \frac{\sqrt{s}}{2}$ . Возможно интегрирование и по  $x$ , но оно приводит к довольно громоздкому (и к тому же зависящему от дилогарифма Спенса) результату (см., например, [16] для расчета в  $t$ -канале).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Зыкунов, ЯФ **84**, 535 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 1225 (2021)].
2. В. А. Зыкунов, ЯФ **84**, 524 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 1214 (2021)].
3. M. Böhm, H. Spiesberger, and W. Hollik, Fortschr. Phys. **34**, 687 (1986).
4. G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979).
5. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949).
6. J. Kahane, Phys. Rev. B **135**, 975 (1964).
7. В. А. Зыкунов, *Пертурбативные расчеты в физике высоких энергий* (ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, 2020).
8. V. A. Zykunov, Phys. Rev. D **75**, 073019 (2007) [hep-ph/0509315].
9. G. P. Lepage, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978).
10. Particle Data Group (P. A. Zyla *et al.*), Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).
11. W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta, Phys. Rev. D **18**, 3998 (1978).
12. F. Jegerlehner, J. Phys. G **29**, 101 (2003) [hep-ph/0104304].
13. F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52**, 54 (1937).
14. G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
15. W. Hollik, Fortschr. Phys. **38**, 165 (1990).
16. M. Böhm and H. Spiesberger, Nucl. Phys. B **304**, 749 (1988).

## TWO-BOSON EXCHANGE IN POLARIZED PROCESS WITH CHARGED CURRENT

V. A. Zykunov<sup>1),2),3)</sup>

<sup>1)</sup>*JINR, Dubna, Moscow region, Russia*

<sup>2)</sup>*Francisk Skorina Gomel State University, Belarus*

<sup>3)</sup>*Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel, Belarus*

Using a new method the contribution of two-boson-exchange diagram (boxes) with one and two complex boson masses to the cross section of a four fermionic process in the charged current channel with polarization of initial particle is calculated. Independence of full electroweak corrections of unphysical parameters is demonstrated. The numerical analysis of results and comparison with asymptotic estimations for energy regions below and above  $W$  resonance is done.