ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА, 2022, том 85, № 5, с. 353–365

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ И ПОЛЯ

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ КВАНТОВАНИЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХФЕРМИОННОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ

© 2022 г. Ю. Д. Черниченко[1),2)*]

Поступила в редакцию 25.03.2022 г.; после доработки 25.05.2022 г.; принята к публикации 28.05.2022 г.

Новые квазиклассические условия квантования уровней энергий псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов как составных систем двух релятивистских фермионов произвольных масс, взаимодействующих как посредством несингулярных запирающих потенциалов, так и сингулярных запирающих потенциалов воронкообразного типа с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием, были получены. Рассмотрение проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

DOI: 10.31857/S004400272205004X

1. ВВЕДЕНИЕ

Нерелятивистская модель описания уровней энергий мезонов, основанная на решении нерелятивистского уравнения Шредингера с линейным потенциалом

$$V_{\text{lin}}(r) = \sigma r, \quad \sigma > 0, \tag{1}$$

оказалась непригодной для существенно релятивистских систем. Это связано с тем, что вклад релятивистских поправок для высших радиальных возбуждений становится большим ($v^2/c^2 \approx 0.4$), а для легких векторных ρ-, ω-мезонов он даже сравним с вкладом нерелятивистского гамильтониана, выбираемого в качестве основного [1–3].

В качестве релятивистской модели описания спектра масс мезонов может быть использован одновременный полностью ковариантный двухчастичный трехмерный релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход Логунова–Тавхелидзе в квантовой теории поля [4]. В настоящем исследовании используется тот вариант РКП-подхода [5] к задаче о составной системе двух релятивистских спиновых частиц, который основан на гамильтоновой формулировке квантовой теории поля [6, 7]. При этом важно, что трехмерность в нее заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях. Тем самым двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке волновой РКП-функции одной релятивистской частицы, удовлетворяющей полностью ковариантному трехмерному РКП-уравнению в импульсном пространстве (см., например, работы [8–12]). Кроме того, РКП-подход для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс $m_1 = m_2 = m$, развитый в работах [5–7], позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению, введенному в [13].

В работе [14] было получено релятивистское квазиклассическое (ВКБ) условие квантования уровней энергий связанной системы, состоящей из двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2, взаимодействующих посредством сингулярного запирающего потенциала воронкообразного типа с кулоновским взаимодействием

$$V(r) = V_{\text{conf}}(r) - \frac{\alpha_s}{r}, \tag{2}$$

где $V_{\text{conf}}(r)$ — запирающий потенциал ($V_{\text{conf}}(0) = 0$), а α_s — кулоновская константа связи. Рассмотрение проведено в рамках РКП-подхода, разработанного в [5] и обобщенного в [15, 16] для случая составных систем двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс. В принятом в работе [14] приближении ($\tilde{\alpha}'_s \ll 2\Lambda \operatorname{sh}\chi'$) ВКБ-условие квантования уровней энергий составной

[1)] Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь.
[2)] Международный центр перспективных исследований, ГГТУ, Гомель, Беларусь.
[*] E-mail: chyud@mail.ru;chern@gstu.by

системы с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$ имеет вид

$$\int_0^{r_+} dr\chi(r) = \pi\lambda' \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right) - \qquad (3)$$

$$- \lambda'\delta_\ell^{\text{Coul,WKB}}(\chi'),$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

Здесь $\lambda' = \hbar/m'c$ — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ с относительным 3-импульсом $\mathbf{q}'$ и энергией $E_{q'} = c\sqrt{m'^2c^2 + \mathbf{q}'^2}$, связанной с полной энергией взаимодействующих частиц в с.ц.и. $\sqrt{s} = M = c\sqrt{m_1^2c^2 + \mathbf{q}^2} + c\sqrt{m_2^2c^2 + \mathbf{q}^2}$ соотношением $M = (m'/\mu)E_{q'}$, где $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса; функция

$$\chi(r) = \text{arch}X(r) = \ln[X(r) + \sqrt{X^2(r) - 1}]$$

имеет смысл быстроты составной системы, что движется в поле потенциала $V(r)$, где функция $X(r)$ определяется выражением

$$X(r) = \frac{\mu}{m'^2c^2}\left(M - V(r)\right),$$

а величина

$$\delta_\ell^{\text{Coul,WKB}}(\chi') \approx \qquad (4)$$

$$\approx \frac{\tilde{\alpha}'_s}{2\,\text{sh}\,\chi'} \ln\left(\frac{2r_+\,\text{sh}\,\chi'}{\lambda'\sqrt{\Lambda^2 + (\tilde{\alpha}'_s/2\,\text{sh}\,\chi')^2}}\right),$$

$$\Lambda = \ell + 1/2, \quad \tilde{\alpha}'_s = \frac{2\mu\alpha_s}{\hbar m'c}$$

представляет собой фазу релятивистской кулоновской волновой функции в ВКБ-приближении, вычисленную при $\tilde{\alpha}'_s \ll 2\Lambda\,\text{sh}\,\chi'$ в правой точке поворота r_+, которая определяется потенциалом $V_{\text{conf}}(r)$, т.е. как при $\ell = 0$ условием $X(r_+) = 1$, где χ' — быстрота, которая параметризирует относительный 3-импульс $\mathbf{q}'$ и энергию $E_{q'}$ и M соотношениями

$$\mathbf{q}' = m'c\,\text{sh}\,\chi'\mathbf{n}_{q'}, \quad |\mathbf{n}_{q'}| = 1,$$

$$E_{q'} = m'c^2\,\text{ch}\,\chi', \quad M = \frac{m'^2c^2}{\mu}\,\text{ch}\,\chi'.$$

Заметим, что при $\alpha_s = 0$ и $m_1 = m_2 = m$ ВКБ-условие квантования уровней энергий составной системы (3) совпадает с его аналогом, который был получен в работе [17].

Отметим еще работы [18], в которых в рамках РКП-подхода [5] были найдены квазиклассические выражения для ширин лептонных распадов векторных и псевдоскалярных мезонов и квазиклассические условия квантования уровней энергий мезонов.

Настоящая работа является продолжением работ автора [14, 19] и посвящена получению релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода (см. также работы [17, 18, 20]) релятивистских формул для условий квантования уровней энергий связанной системы с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1 и m_2. Рассмотрены случаи, когда взаимодействие двух релятивистских фермионов произвольных масс является либо несингулярным, чисто запирающим, либо содержит кулоновское (хромодинамическое) взаимодействие. В разд. 2 в рамках РКП-подхода в квантовой теории поля, сформулированного в релятивистском $\mathbf{r}$-представлении для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс [15, 16], получены ВКБ-решения уравнения для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r, \chi')$ и определены условия применимости релятивистского ВКБ-приближения. В разд. 3 в релятивистском ВКБ-приближении получены условия квантования уровней энергий псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов как связанных систем двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством несингулярных запирающих потенциалов и потенциалов воронкообразного типа с кулоновским (хромодинамическим) потенциалом. В разд. 4 проведено исследование влияния спиновых параметров псевдоскалярной связанной системы, состоящей из двух релятивистских фермионов произвольных масс, взаимодействующих посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов, на ее спектр масс. Результаты исследований обсуждаются в Заключении.

2. ВКБ-МЕТОД РЕШЕНИЯ РКП-УРАВНЕНИЯ

В основу нашего рассмотрения положено полностью ковариантное РКП-уравнение в $\mathbf{r}$-представлении в конечно-разностной форме для радиальной волновой РКП-функции $\varphi_\ell(r, \chi')$ связанной системы с относительным орбитальным моментом $\ell \geq 0$, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1, m_2, взаимодействующих посредством сферически симметричных квазипотенциалов. Это РКП-уравнение было построено в [21] и имеет вид[3)]

$$\left(\widehat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch}\,\chi'\right)\varphi_\ell(r, \chi') = \qquad (5)$$

$$= -V(r)\hat{A}\left(\widehat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}\right)\varphi_\ell(r, \chi').$$

[3)] Аналогичное уравнение для случая двух спиновых частиц равных масс было получено в [22].

Здесь

$$\widehat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{d}{dr}\right) + \frac{\lambda'^2\ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda')}\exp\left(i\lambda'\frac{d}{dr}\right)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = 2m'c^2\left[\operatorname{ch}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{i\lambda'}{r}\operatorname{sh}\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\exp\left(i\lambda'\frac{\partial}{\partial r}\right)\right],$$

являющегося конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига $\exp(\pm i\lambda'\partial/\partial r)$, в то время как $\Delta_{\theta,\varphi}$ — его угловая часть, χ' — быстрота, которая параметризирует импульс и энергию $M_{\mathcal{Q}}$[4)]:

$$\mathbf{\Delta}_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}} = m'c\operatorname{sh}\chi'\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}}}, \quad (6)$$

$$|\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}}}| = 1, \quad M_{\mathcal{Q}} = \frac{m'}{\mu}\Delta^0_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}},$$
$$\Delta^0_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}} = m'c^2\operatorname{ch}\chi',$$

квазипотенциал $V(r)$ является локальным в смысле геометрии Лобачевского и для простоты считается не зависящим от энергии $M_{\mathcal{Q}}$, а оператор $\hat{A}$ дается выражением

$$\hat{A}\left(\widehat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}\right) = \frac{1}{4}\left[a'\left(\widehat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}}\right)^2 + b'\right],$$

где

$$a' = \begin{cases} g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр)}; \\ \dfrac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор)}; \\ -\dfrac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5\gamma_\mu \text{ (псевдовектор)}; \end{cases} \quad (7)$$

$$b' = \begin{cases} 1 - g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5 \text{ (псевдоскаляр)}; \\ \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_\mu \text{ (вектор)}; \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}g'^2 & \text{при } \hat{O} = \gamma_5\gamma_\mu \text{ (псевдовектор)}. \end{cases}$$

Фактор g' в (7) определяется выражением

$$g' = \frac{m'}{2\mu} = \frac{m_1+m_2}{2\sqrt{m_1m_2}}, \quad (8)$$

[4)] Напомним, что здесь $\lambda_{\mathcal{Q}} = (\lambda^0_{\mathcal{Q}}; \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{Q}}) = \mathcal{Q}/\sqrt{\mathcal{Q}^2}$ — 4-вектор скорости составной частицы с 4-импульсом $\mathcal{Q} = q_1 + q_2$, причем все 4-импульсы принадлежат верхним пола́м массовых гиперболоидов $\Delta^2_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}} = \Delta^{02}_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}} - c^2\mathbf{\Delta}^2_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}} = m'^2c^4$, где $\Delta^0_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}}, \mathbf{\Delta}_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}}$ — временная и пространственная компоненты 4-вектора $\Lambda^{-1}_{\lambda_{\mathcal{Q}}}q' = \Delta_{q',m'\lambda_{\mathcal{Q}}}$ из пространства Лобачевского (подробности см. в работе [21]).

причем значения спиновых параметров a', b' в (7) при $m_1 = m_2 = m$ совпадают с аналогичными выражениями для них a, b, которые были получены в [22].

Напомним, что для простоты рассмотрения, как и в работах [21—23], мы считаем, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида $\hat{O}\otimes\otimes\hat{O}$, а вершинная функция также имеет заданную спинорную структуру, пропорциональную матрице $\hat{O}$, не зависящую от импульсных переменных, а шпур $\operatorname{Sp}[\hat{O}^+\hat{O}] \neq 0$, где в качестве $\hat{O}$ выбираются матрицы Дирака $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$ $(\mu = 0,1,2,3)$. Такой выбор матрицы $\hat{O}$ позволил авторам работ [21—23] найти точные решения РКП-уравнения (5) с кулоновским потенциалом

$$V_{\text{Coul}} = -\frac{\alpha_s}{r}, \quad (9)$$

возможность применения которого была детально исследована в работах [18]. В этих работах в рамках РКП-подхода [5] квазипотенциал, представляющий собой фейнмановский матричный элемент для случая обмена векторным безмассовым бозоном (глюоном) и содержащий все спиновые эффекты, был подробно исследован в $\mathbf{r}$-представлении (см. также работу [24]). Это позволило авторам этих работ в рамках РКП-подхода [5] получить ВКБ-условия квантования уровней энергий и выражения для лептонных ширин распадов векторных и псевдоскалярных мезонов в ВКБ-приближении в предположении, что квазипотенциал является действительным и представляет собой в $\mathbf{r}$-представлении комбинацию потенциала запирания и образа скалярной части однобозонного обменного потенциала $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$ $(\hbar = c = 1)$, пренебрегая функцией $\operatorname{cth}(\pi mr)$. Тем самым авторы в [18] ограничились учетом лишь скалярной части образа однобозонного обменного потенциала, пренебрегая функцией $\operatorname{cth}(\pi mr)$, которая существенно меняется только на расстояниях порядка $\lambda = 1/m$ от начала координат, и, следовательно, на больших расстояниях $r \gg \lambda$ она не влияет на величину уровней энергий. Более того, замена скалярной части образа однобозонного обменного потенциала $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$ на кулоновский потенциал (9), в котором α_s — эффективная константа взаимодействия, уместна, поскольку, как было отмечено в работе [25], потенциалу (9) в РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского соответствует выражение

$$\widetilde{V}_{\text{Coul}}(\chi_\Delta) \sim -\frac{1}{\chi_\Delta\operatorname{sh}\chi_\Delta}.$$

Здесь относительная быстрота χ_Δ параметризирует 3-вектор передачи импульса $\mathbf{\Delta} = m\operatorname{sh}\chi_\Delta\mathbf{n}_\Delta$

($|\mathbf{n}_\Delta| = 1$) в пространстве Лобачевского и связана с квадратом переданного 4-импульса $t = (k - p)^2 = -Q^2$ соотношением

$$Q^2 = -t = -2m^2 + 2m\sqrt{m^2 + \boldsymbol{\Delta}^2} = \\ = 2m^2 \left(\operatorname{ch}\chi_\Delta - 1\right). \tag{10}$$

При больших Q^2, согласно выражению (10), $\chi_\Delta \approx \ln(Q^2/m^2)$ и, следовательно, потенциал $\widetilde{V}_{\text{Coul}}(\chi_\Delta)$ ведет себя как $[(Q/m)^2\ln(Q/m)^2]^{-1}$, что воспроизводит главное поведение потенциала в КХД, который в лидирующем порядке пропорционален $\bar{\alpha}_s(Q^2)/Q^2$, где $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ — инвариантный заряд. Такое КХД-подобное (хромодинамическое) поведение кулоновского потенциала (9) в РКП-подходе впервые было отмечено в работе [25]. Таким образом, мы полагаем, что внутри адрона взаимодействие двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс m_1, m_2 осуществляется в $\mathbf{r}$-представлении посредством сингулярного воронкообразного потенциала запирания (2), в котором $V_{\text{conf}}(0) = 0$.

В релятивистском ВКБ-приближении решение уравнения (5) ищется в обычном виде [14, 17, 18, 20, 24]

$$\varphi_\ell(r, \chi') = \exp\left[\frac{i}{\hbar} g(r)\right], \tag{11}$$

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\hbar}{i} g_1(r) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 g_2(r) + \ldots.$$

Для первых двух членов представления (11) находим

$$g_0(r) = m'c \int dr \chi_\pm(r) + \frac{\hbar}{i}\phi, \tag{12}$$

$$g_1(r) = -\frac{1}{4} \times \\ \times \ln\left([\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]\right) + c_\pm,$$

где

$$\chi_\pm(r) = \ln\left[\mathcal{X}(r) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)}\right], \tag{13}$$

$$\mathcal{X}(r) = \frac{2X(r)}{1 + \sqrt{1 + a'V(r)X(r)}},$$

$$X(r) = \operatorname{ch}\chi' - \frac{b'}{4} V(r),$$

$$R(r) = \sqrt{1 + \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r^2}}, \quad \Lambda = \ell + 1/2.$$

Учет выражений в (12) для первых двух членов представления (11) позволяет получить ВКБ-решения с левой r_L и правой r_R точками поворота в области $r_L \le r \le r_R$:

$$\varphi_\ell^{L,R}(r, \chi') = \frac{C_{L,R}}{2\sqrt[4]{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} \times \\ \times \left\{\exp\left[i\alpha_+^{L,R}(r) \mp \frac{i\pi}{4}\right] + \exp\left[i\alpha_-^{L,R}(r) \pm \frac{i\pi}{4}\right]\right\}, \tag{14}$$

где

$$\alpha_\pm^{L,R}(r) = \frac{1}{\lambda'} \int_{r_{L,R}}^{r} dr' \chi_\pm(r'), \tag{15}$$

$C_{L,R}$ — нормировочные константы, а левая r_L и правая r_R точки поворота определяются как точки ветвления корня в (15):

$$\mathcal{X}(r_{L,R}) = R(r_{L,R}).$$

Условие применимости релятивистского ВКБ-метода в спиновом случае, основанное на выражениях в (12) для первых двух членов представления (11), дается неравенством

$$\lambda' \left|\frac{\operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r)}{\chi_+(r)\operatorname{sh}\chi_{\text{eff}}(r)} \frac{d\chi_+(r)}{dr}\right| \ll 1, \tag{16}$$

где

$$\chi_{\text{eff}}(r) = \operatorname{arch}\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \ln\left(\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) + \sqrt{\mathcal{X}_{\text{eff}}^2(r) - 1}\right),$$

$$\mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \operatorname{ch}\chi_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{X}(r)}{R(r)}.$$

В случае $\ell = 0$ условие (16) преобразуется в неравенство

$$\lambda' \left|\frac{\operatorname{ch}\chi_S(r)}{\chi_S(r)\operatorname{sh}\chi_S(r)} \frac{d\chi_S(r)}{dr}\right| \ll 1,$$

где величина

$$\chi_S(r) = \operatorname{arch}\mathcal{X}(r) = \\ = \ln\left[\mathcal{X}(r) + \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - 1}\right] \tag{17}$$

имеет смысл быстроты эффективной релятивистской частицы массы m', движущейся в поле потенциала $V(r)$, в терминах которой измеряется расстояние между двумя точками импульсного пространства Лобачевского.

3. ВКБ-УСЛОВИЕ КВАНТОВАНИЯ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИЙ

Условие квантования уровней энергий, как и в бесспиновом случае [14], находим из условия совпадения волновых функций в (14) в точке $r \in (r_L; r_R)$. Для этого необходимо положить

$$C_L = C_\ell \exp\left[-\frac{i}{\lambda'} \int_{r_L}^{r} dr' \ln R(r')\right],$$

$$C_R = C_\ell (-1)^n \exp\left[-\frac{i}{\lambda'}\int\limits_{r_R}^{r} dr' \ln R(r')\right],$$

где C_ℓ — произвольная постоянная, что ведет к ВКБ-условию квантования уровней энергий

$$\int\limits_{r_L}^{r_R} dr\,[\chi_+(r) - \ln R(r)] = \pi\lambda'\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (18)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

При $a' = 0, b' = 2/g'm'c^2$ ВКБ-условие квантования уровней энергий (18) совпадает с аналогичным выражением, которое было получено в работе [14] для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс, а в случае равных масс $m_1 = m_2 = m$ ($g' = 1$) выражение (18) переходит в ВКБ-условие квантования уровней энергий, полученное в случае спиновых частиц равных масс в работе [19].

3.1. Случай несингулярного конфайнментного потенциала

Для несингулярного чисто запирающего (конфайнментного) потенциала $V(r) = V_{\text{conf}}(r)$ ($V_{\text{conf}}(0) = 0$) интеграл в (18) преобразуем к более простому виду вынесением зависимости от центробежного члена в $\chi_+(r)$ за знак интеграла путем разбиения на две части области интегрирования в (18) точкой R, лежащей в классически допустимой области движения и такой, что значение R можно считать большим по сравнению с r_L, т.е. как, например, в бесспиновом случае (подробности см. в [14]). В результате проведенных вычислений приходим к следующему ВКБ-условию квантования уровней энергий в случае несингулярного конфайнментного потенциала

$$\int\limits_{0}^{r_+} dr\chi_S(r) = \pi\lambda'\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right), \quad (19)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

Выражение (19) по форме совпадает как с выражениями, полученными в бесспиновом случае в работах [14, 17], так и в случае спиновых частиц равных масс в работе [19]. Однако быстрота $\chi_S(r)$ теперь дается выражением (17) при $V(r) = V_{\text{conf}}(r)$, причем точка поворота r_L определяется, также как в бесспиновом случае и в случае спиновых частиц равных масс, центробежным членом, т.е.

$$r_L \approx r_- = \frac{\lambda'\Lambda}{\operatorname{sh}\chi'},$$

а точка поворота $r_R \approx r_+$ — потенциалом $V_{\text{conf}}(r)$, т.е., как и в случае $\ell = 0$, условием

$$\mathcal{X}(r_+) = 1. \quad (20)$$

3.2. Случай конфайнментного потенциала с кулоновским взаимодействием

В случае сингулярного конфайнментного потенциала вида (2), т.е. когда к несингулярному потенциалу запирания $V_{\text{conf}}(r)$ добавляется кулоновское (хромодинамическое) взаимодействие (9), необходимо в условии квантования уровней энергий (18) теперь вынести за знак интеграла зависимости от центробежного и кулоновского членов в выражении для $\chi_+(r)$. При этом точка поворота $r_R \approx r_+$ по-прежнему определяется условием (20). Однако точка поворота $r_L \approx r_-$ теперь определяется в основном суммой центробежного и кулоновского членов и находится из условия

$$2\left(\operatorname{ch}\chi' + \frac{b'\alpha_s}{4r_-}\right) = \quad (21)$$

$$= \left[1 + \sqrt{1 - \frac{a'\alpha_s}{r_-}\left(\operatorname{ch}\chi' + \frac{b'\alpha_s}{4r_-}\right)}\right] \times \sqrt{1 + \frac{\lambda'^2\Lambda^2}{r_-^2}}.$$

В качестве значения для точки поворота r_- можно взять приближенное решение уравнения (21)

$$r_- \approx \lambda'\frac{-B'\operatorname{ch}\chi' + \sqrt{\Lambda^2 + B'^2}}{\operatorname{sh}\chi'}, \quad (22)$$

где параметр B' дается выражением

$$B' = \frac{\alpha_s'(a'\operatorname{ch}^2\chi' + b')}{4\operatorname{sh}\chi'}, \quad \alpha_s' = \frac{\alpha_s}{\lambda'}. \quad (23)$$

Отметим, что параметр B' в (23) входит в выражение для кулоновской волновой функции, описывающей s-состояние ($\ell = 0$) связанной системы, состоящей из двух фермионов произвольных масс, взаимодействующих посредством кулоновского потенциала (9). При $\chi' = i\kappa_n$ параметр B' связан с условием квантования уровней энергий такой системы (подробности см. в работах [21, 22, 26]):

$$\frac{\alpha_s'(a'\cos^2\kappa_n + b')}{4\sin\kappa_n} = n,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \kappa_n < \pi/2.$$

Разобьем область интегрирования в (18) на две части точкой R, лежащей в классически допустимой области движения и такой, что значение R можно считать большим по сравнению с r_L. Тогда условие квантования уровней энергий (18) запишется в виде

$$\int\limits_{r_L}^{r_R} dr\,[\chi_+(r) - \ln R(r)] = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \pi\lambda'\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (24)$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0,$$

где

$$\tilde{I}_1 = \int\limits_{r_L}^{R} dr \ln \left\{ \frac{2\left(X_{\rm conf}(r) + b'\alpha_s/4r\right)}{\sqrt{1+\lambda'^2\Lambda^2/r^2}\left[1+\sqrt{1+a'\left(V_{\rm conf}(r)-\alpha_s/r\right)\left(X_{\rm conf}(r)+b'\alpha_s/4r\right)}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left[\frac{2\left(X_{\rm conf}(r) + b'\alpha_s/4r\right)}{\sqrt{1+\lambda'^2\Lambda^2/r^2}\left[1+\sqrt{1+a'\left(V_{\rm conf}(r)-\alpha_s/r\right)\left(X_{\rm conf}(r)+b'\alpha_s/4r\right)}\right]}\right]^2 - 1} \right\},$$

$$\tilde{I}_2 = \int\limits_{R}^{r_R} dr \ln \left\{ \frac{2\left(X_{\rm conf}(r) + b'\alpha_s/4r\right)}{\sqrt{1+\lambda'^2\Lambda^2/r^2}\left[1+\sqrt{1+a'\left(V_{\rm conf}(r)-\alpha_s/r\right)\left(X_{\rm conf}(r)+b'\alpha_s/4r\right)}\right]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\left[\frac{2\left(X_{\rm conf}(r) + b'\alpha_s/4r\right)}{\sqrt{1+\lambda'^2\Lambda^2/r^2}\left[1+\sqrt{1+a'\left(V_{\rm conf}(r)-\alpha_s/r\right)\left(X_{\rm conf}(r)+b'\alpha_s/4r\right)}\right]}\right]^2 - 1} \right\},$$

$$X_{\rm conf}(r) = \operatorname{ch}\chi' - \frac{b'}{4}V_{\rm conf}(r).$$

В принятых приближениях $r_- \ll R \ll r_+, \alpha'_s \ll \ll 2\Lambda \operatorname{sh}\chi'$, где точка поворота r_+ определяется условием (20), а точка поворота r_- теперь дается выражением (22), для интегралов в $\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$ получаем следующие результаты:

$$\tilde{I}_1 \approx R\chi' + \lambda' B' \ln\left(\frac{2R\operatorname{sh}\chi'}{\lambda'\sqrt{\Lambda^2+B'^2}}\right) - \tag{25}$$

$$- \frac{\pi\lambda'\Lambda}{2} - \lambda'\chi'\tilde{\rho}',$$

$$\tilde{I}_2 \approx \int\limits_0^{r_+} dr\chi_S(r) - R\chi' + \lambda' B' \ln\left(\frac{r_+}{R}\right), \tag{26}$$

где

$$\tilde{\rho}' = \frac{\alpha'_s a' \operatorname{ch}\chi'}{4}.$$

Наконец, подставляя в (24) выражения (25) и (26), приходим к ВКБ-условию квантования уровней энергий связанной системы двух фермионов произвольных масс в случае взаимодействия (2):

$$\int\limits_0^{r_+} dr\chi_S(r) = \pi\lambda'\left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4}\right) - \tag{27}$$

$$- \lambda'\delta_\ell^{\rm Coul, WKB, \mathit{S}}(\chi'),$$

$$n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 0.$$

Здесь быстрота $\chi_S(r)$ по-прежнему дается выражением (17) при $V(r) = V_{\rm conf}(r)$, а величина

$$\delta_\ell^{\rm Coul, WKB, \mathit{S}}(\chi') = \tag{28}$$

$$= B' \ln\left(\frac{2r_+\operatorname{sh}\chi'}{\lambda'\sqrt{\Lambda^2+B'^2}}\right) - \chi'\tilde{\rho}'$$

является фазой релятивистской кулоновской функции в ВКБ-приближении в рассматриваемых спиновых случаях, вычисленной в точке поворота r_+ при $\alpha'_s \ll 2\Lambda\operatorname{sh}\chi'$. В случае спиновых частиц равных масс ($g' = 1$) фаза в (28) совпадает с ее выражением, полученным в работах [19, 24]. Более того, при $a' = 0$, $b' = 2/g'm'c^2$ как ВКБ-условие квантования (27), так и выражение (28) совпадают с аналогичными выражениями в (3) и (4), которые были получены в бесспиновом случае для произвольных масс в работе [14].

3.3. Случай линейного потенциала с кулоновским взаимодействием

В качестве примера применения формулы (27) рассмотрим случай, когда в качестве конфайнментного потенциала $V(r) = V_{\rm conf}(r)$ выбирается линейный потенциал (1). Тогда с учетом (13) и (17) интеграл в правой части выражения (27) принимает вид

$$I = \frac{1}{\sigma'}\int\limits_0^{x_+} dx \times \tag{29}$$

$$\times \ln\left[\frac{2\left(\operatorname{ch}\chi' - \tilde{b}'x\right)}{1+\sqrt{1+a'x\left(\operatorname{ch}\chi' - \tilde{b}'x\right)}} + \right.$$

$$+\sqrt{\left(\frac{2\left(\operatorname{ch}\chi'-\tilde{b}'x\right)}{1+\sqrt{1+a'x\left(\operatorname{ch}\chi'-\tilde{b}'x\right)}}\right)^2-1}\Bigg],$$

где $\sigma'=\lambda'\sigma, \tilde{b}'=b'/4, x=\sigma r$, точка поворота $x_+=\sigma r_+$ определяется из условия (20) и для линейного потенциала (1) дается выражением

$$x_+=\frac{4(\operatorname{ch}\chi'-1)}{a'+b'}.$$

Выполним в (29) интегрирование по частям, а затем сделаем в полученном выражении замену переменной

$$t=\frac{2\left(\operatorname{ch}\chi'-\tilde{b}'x\right)}{1+\sqrt{1+a'x\left(\operatorname{ch}\chi'-\tilde{b}'x\right)}}.$$

В результате искомый интеграл преобразуется к виду

$$I=\frac{4}{a'\sigma'}\left[\operatorname{ch}\chi'\int\limits_1^{\operatorname{ch}\chi'}\frac{dt}{(t^2+b'/a')\sqrt{t^2-1}}-\right. \tag{30}$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\operatorname{sh}^2\chi'}\frac{d\tau}{[\tau+(a'+b')/a']\sqrt{\tau}}\right].$$

Вычисление интегралов в (30) для значений спиновых параметров a', b' в (7) позволяет получить квазиклассические условия квантования уровней энергий псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных составных систем двух спиновых частиц произвольных масс, взаимодействие между которыми осуществляется посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов. Результат можно представить в следующем виде:

1) $a'=g'^2$, $b'=1-a'$, $-1<b'/a'\le 0$ (псевдоскаляр):

$$\frac{4}{a'\sigma'}\left[\frac{\operatorname{ch}\chi'}{\sqrt{-b'/a'}\sqrt{1+b'/a'}}\times\right. \tag{31}$$
$$\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th}\chi'\sqrt{-b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)\right]=$$
$$=\pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)-\delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB},S}(\chi'),$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\ge 0;$$

2) $a'=g'^2/2$, $b'=3/4-a'$ (вектор):

$$\frac{4}{a'\sigma'}\left[\frac{\operatorname{ch}\chi'}{\sqrt{b'/a'}\sqrt{1+b'/a'}}\times\right. \tag{32}$$
$$\times\operatorname{arth}\left(\frac{\operatorname{th}\chi'\sqrt{b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)\right]=$$
$$=\pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)-\delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB},S}(\chi'),$$
$$b'/a'\ge 0\quad\text{при}\quad 1\le g'^2\le 3/2,$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\ge 0;$$

$$\frac{4}{a'\sigma'}\left[\frac{\operatorname{ch}\chi'}{\sqrt{-b'/a'}\sqrt{1+b'/a'}}\times\right. \tag{33}$$
$$\times\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{th}\chi'\sqrt{-b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)\right]=$$
$$=\pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)-\delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB},S}(\chi'),$$
$$-1<b'/a'<0\quad\text{при}\quad g'^2>3/2,$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\ge 0;$$

3) $a'=-g'^2/2$, $b'=1/4-a'$, $b'/a'<-1$ при $\forall g'\ge 1$ (псевдовектор):

$$\frac{4}{a'\sigma'}\left[-\frac{\operatorname{ch}\chi'}{\sqrt{-b'/a'}\sqrt{-1-b'/a'}}\times\right. \tag{34}$$
$$\times\operatorname{arth}\left(\frac{\operatorname{th}\chi'\sqrt{-b'/a'}}{\sqrt{-1-b'/a'}}\right)+$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{-1-b'/a'}}\operatorname{arth}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\sqrt{-1-b'/a'}}\right)\right]=$$
$$=\pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right)-\delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB},S}(\chi'),$$
$$n=0,1,\ldots,\quad \ell\ge 0.$$

Если воспользоваться соотношениями между обратными тригонометрическими и гиперболическими функциями, то выражения для уровней энергий (31)–(34) можно записать в виде общей формулы

$$\frac{4}{a'\sigma'}\left[\frac{\operatorname{ch}\chi'}{\sqrt{b'/a'}\sqrt{1+b'/a'}}\times\right. \tag{35}$$

$$\times \operatorname{arth}\left(\frac{\operatorname{th}\chi'\sqrt{b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}}\right) - \\ - \frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi'}{\sqrt{1+b'/a'}}\right)\Bigg] = \\ = \pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right) - \delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB},S}(\chi'), \\ n = 0,1,\ldots, \quad \ell \geq 0,$$

где

$$\begin{cases} 1)\ \ -1 < b'/a' \leq 0 \ \text{ для псевдоскаляра } (a' = g'^2,\, b' = 1 - a'); \\ 2)\ b'/a' \geq 0 \ \text{ при } 1 \leq g'^2 \leq 3/2 \quad \text{и} \quad -1 < b'/a' < 0 \ \text{ при } g'^2 > 3/2 \\ \text{для вектора } (a' = g'^2/2,\, b' = 3/4 - a'); \\ 3)\ b'/a' < -1 \ \text{ при } \forall\, g' \geq 1 \ \text{ для псевдовектора} \\ (a' = -g'^2/2,\, b' = 1/4 - a'), \end{cases} \tag{36}$$

а фактор g' в (36) определяется выражением (8).

Квазиклассическое условие квантования уровней энергий составных систем двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс, взаимодействие между которыми также осуществляется посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов, дается выражением [14]

$$\frac{1}{\tilde{\sigma}'}\left(\chi'\operatorname{ch}\chi' - \operatorname{sh}\chi'\right) = \\ = \pi\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right) - \delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB}}(\chi'), \\ \tilde{\sigma}' = \frac{\lambda'\sigma}{2g'm'c^2}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad \ell \geq 0, \tag{37}$$

где фаза релятивистской бесспиновой кулоновской волновой функции в ВКБ-приближении $\delta_\ell^{\mathrm{Coul,WKB}}(\chi')$ дана в (4).

Для случая равных масс ($m_1 = m_2 = m$) и чисто линейного потенциала ($\alpha_s = 0$) выражения для уровней энергий (31)–(34) переходят в выражения, полученные в работе [19]:

$$4(\operatorname{sh}\chi - \operatorname{arctg}\operatorname{sh}\chi) = \\ = \frac{\pi\sigma\lambda}{2mc^2}\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right) \ \text{(псевдоскаляр)}; \\ \frac{16\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}\chi\ln\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{ch}\chi+\operatorname{sh}\chi}{\sqrt{2\operatorname{ch}^2\chi+1}}\right) - \\ - \frac{8\sqrt{6}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sh}\chi\right) = \\ = \frac{\pi\sigma\lambda}{2mc^2}\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right) \ \text{(вектор)}; \\ \frac{16\sqrt{3}}{3}\operatorname{ch}\chi\ln\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{sh}\chi+\operatorname{ch}\chi}{\sqrt{|2\operatorname{ch}^2\chi-3|}}\right) - \\ - 4\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}\chi+1}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\chi-1}\right| = \\ = \frac{\pi\sigma\lambda}{2mc^2}\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right) \ \text{(псевдовектор)}, \\ n = 0,1,\ldots, \quad \ell \geq 0. \tag{38}$$

Выражения (38) отличаются от условия квантования уровней энергий в бесспиновом случае для произвольных масс (37) для чисто линейного потенциала (1) ($\alpha_s = 0$) и при $m_1 = m_2 = m$:

$$\chi\operatorname{ch}\chi - \operatorname{sh}\chi = \frac{\pi\sigma\lambda}{2mc^2}\left(n+\frac{\ell}{2}+\frac{3}{4}\right), \\ n = 0,1,\ldots, \quad \ell \geq 0. \tag{39}$$

Проведенный сравнительный анализ формул (38) с формулой (39) для бесспинового случая показывает, что учет спина приводит к увеличению значений уровней энергии, отвечающих фиксированным значениям n и ℓ.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СПИНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ НА ЕЕ СПЕКТР МАСС

В этом разделе проведем исследование влияния спиновых параметров $a' = g'^2$ и $b' = 1 - a'$ в (7) s-состояния ($\ell = 0$) псевдоскалярной связанной системы, состоящей из двух релятивистских фермионов (кварков) произвольных масс m_1 и m_2, взаимодействующих посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов, на значения ее уровней n энергий. Для такого исследования были построены графики функций $n = n(\chi)$, соответствующие релятивистским спиновому псевдоскалярному ($a' = g'^2$ и $b' = 1 - a'$) и бесспиновому случаям и представленные выражениями (35) и (37), взятыми при $\hbar = c = 1$, и отвечающие различным значениям параметров взаимодействия кварков мезонов: линейная (σ) и кулоновская (α_s) константы взаимодействия, массы m_u, m_d, m_s для u-, d-, s-кварков, образующих $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезоны с массами: $M_{\pi^\pm} = 139.60$ МэВ, $M_{K^\pm} = 493.71$ МэВ и $M_{K_0} = 497.60$ МэВ ($\ell = 0$, $n = 1$) [27]. Значения фактора g', который определяется формулой (8) через отношения масс m_u, m_d, m_s кварков, образующих $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезоны, были выбраны равными: $g'_{\pi^\pm} = 1.0012$, $g'_{K^\pm} = 1.2679$, $g'_{K_0} = 1.2313$. Тогда, принимая во внимание формулу (8) и определение массы $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ эффективной релятивистской частицы, значения масс m_u, m_d, m_s для u-, d-, s-кварков и соответствующие им значения масс $m'_{\pi^\pm}$, $m'_{K^\pm}$ эффективной релятивистской частицы при $m'_{K^0} = 134.52$ МэВ, где $K^0 = K_0$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} m_u = m'_{\pi^\pm}(g'_{\pi^\pm} - \sqrt{g'^2_{\pi^\pm} - 1}), \\ m_d = m'_{\pi^\pm}(g'_{\pi^\pm} + \sqrt{g'^2_{\pi^\pm} - 1}), \\ m_u = m'_{K^\pm}(g'_{K^\pm} - \sqrt{g'^2_{K^\pm} - 1}), \\ m_s = m'_{K^\pm}(g'_{K^\pm} + \sqrt{g'^2_{K^\pm} - 1}), \\ m_d = m'_{K_0}(g'_{K_0} - \sqrt{g'^2_{K_0} - 1}), \\ m_s = m'_{K_0}(g'_{K_0} + \sqrt{g'^2_{K_0} - 1}). \end{cases}$$

Значения быстрот χ, соответствующие выбранным значениям масс и фактора g' для $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов, находятся согласно формулам (6) и (8) из выражений

$$\begin{aligned} M_{\pi^\pm} &= 2m'_{\pi^\pm} g'_{\pi^\pm} \operatorname{ch} \chi_{\pi^\pm}, \qquad (40) \\ M_{K^\pm} &= 2m'_{K^\pm} g'_{K^\pm} \operatorname{ch} \chi_{K^\pm}, \\ M_{K_0} &= 2m'_{K_0} g'_{K_0} \operatorname{ch} \chi_{K_0}. \end{aligned}$$

Используя условие квантования уровней энергий (35) для случая псевдоскаляра ($a' = g'^2$, $b' = 1 - a'$), по выбранным значениям фактора g' и найденным значениям быстрот χ посредством соотношений (40) были вычислены значения линейной и кулоновской констант взаимодействия для основного уровня ($n = 1$) $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов в s-состоянии ($\ell = 0$). Значения найденных величин, включая линейную и кулоновскую константы взаимодействия, приведены в табл. 1.

Подчеркнем, что результаты вычислений учитывают релятивистский характер связанной системы, поскольку условие квантования уровней энергий (35) было получено в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля. При этом остается неоднозначность определения параметров взаимодействия. Для устранения этой неоднозначности необходимо использовать другие физические характеристики для рассматириваемых связанных систем, либо зафиксировать некоторые параметры взаимодействия, например, мы фиксировали значения фактора g' (см. табл. 1).

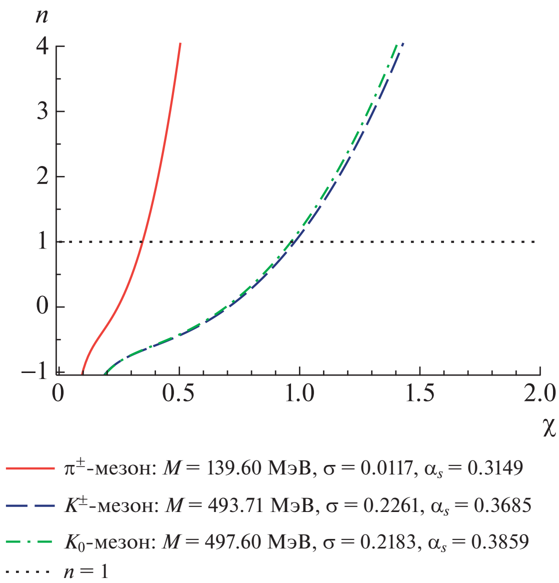

Рис. 1. Поведение функций $n = n(\chi)$ для $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов, представленных выражением (35), взятым при $\hbar = c = 1$, $a' = g'^2$, $b' = 1 - g'^2$ (псевдоскаляр) и отвечающим различным значениям параметров взаимодействия кварков, составляющих мезоны.

На рис. 1 представлены кривые $n = n(\chi)$, которым отвечают значения параметров для $\pi^{\pm}$-мезона (сплошная кривая), $K^{\pm}$-мезона (штриховая кривая) и K_0-мезона (штрихпунктирная кривая) из табл. 1, а точечная линия соответствует случаю $n = 1$. Из рис. 1 видно, что поведение функций $n = n(\chi)$ для $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов существенно зависит от значений параметров взаимодействия кварков, составляющих мезоны: констант взаимодействия (σ, α_s) и фактора g', который определяется формулой (8) через отношения масс m_u, m_d, m_s кварков, образующих $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезоны.

Для более детального исследования влияния спиновых параметров s-состояния псевдоскалярной составной системы на значения ее уровней n энергий были построены графики функций $n = n(\chi)$ (рис. 2–4), соответствующие релятивистским спиновому псевдоскалярному (штриховые кривые) и бесспиновому (сплошные кривые) случаям и представленные выражениями (35) и (37), взятыми при $\hbar = c = 1$, и отвечающие тем же

Таблица 1. Значения параметров $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов

Мезоны	M, МэВ	m_u, МэВ	m_d, МэВ	m_s, МэВ	m', МэВ	g'	χ	σ	α_s
$\pi^{\pm}$	139.60	62.57	69.00		65.71	1.0012	0.3475	0.0117	0.3149
$K^{\pm}$	493.71	62.57		262.27	128.10	1.2679	0.9800	0.2261	0.3685
K_0	497.60		69.00	262.27	134.52	1.2313	0.9643	0.2183	0.3859

значениям параметров взаимодействия кварков для $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов, что и на рис. 1. Точечные линии соответствуют случаю $n = 1$.

Из рис. 2 видно, что основному ($n = 1$) уровню энергии s-состояния $\pi^{\pm}$-мезона с массой $M_{\pi^{\pm}} = 139.60$ МэВ в спиновом случае (штриховая кривая) отвечает значение быстроты $\chi = 0.3475$, соответствующее выбранным значениям параметров взаимодействия кварков, составляющих $\pi^{\pm}$-мезон, из табл. 1: $\alpha = \alpha'_s = \tilde{\alpha}'_s = 0.3149$, $\sigma = \sigma' = \tilde{\sigma}' = 0.0117$, $m_u = 62.57$ МэВ, $m_d = 69.00$ МэВ, $g'_{\pi^{\pm}} = 1.0012$, $m'_{\pi^{\pm}} = 65.71$ МэВ.

Рисунок 3 показывает, что основному ($n = 1$) уровню энергии s-состояния $K^{\pm}$-мезона с массой $M_{K^{\pm}} = 493.71$ МэВ в спиновом случае (штриховая кривая) отвечает значение быстроты $\chi = 0.9800$, соответствующее выбранным значениям параметров взаимодействия кварков, составляющих $K^{\pm}$-мезон, из табл. 1: $\alpha = \alpha'_s = \tilde{\alpha}'_s = 0.3685$, $\sigma = \sigma' = \tilde{\sigma}' = 0.2261$, $m_u = 62.57$ МэВ, $m_s = 262.27$ МэВ, $g'_{K^{\pm}} = 1.2679$, $m'_{K^{\pm}} = 128.10$ МэВ.

Из рис. 4 следует, что основному ($n = 1$) уровню энергии s-состояния K_0-мезона с массой $M_{K_0} = 497.60$ МэВ в спиновом случае (штриховая кривая) отвечает значение быстроты $\chi = 0.9643$, соответствующее выбранным значениям параметров взаимодействия кварков, составляющих K_0-мезон, из табл. 1: $\alpha = \alpha'_s = \tilde{\alpha}'_s = 0.3859$, $\sigma = \sigma' = \tilde{\sigma}' = 0.2183$, $m_d = 69.00$ МэВ, $m_s = 262.27$ МэВ, $g'_{K_0} = 1.2313$, $m'_{K_0} = 134.52$ МэВ.

Также рис. 2–4 показывают, что значения быстрот χ, отвечающие основному ($n = 1$) уровню энергии s-состояния $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов, существенно больше в бесспиновых случаях (сплошные кривые), чем в спиновых случаях (штриховые кривые).

Из рис. 1, 3 и 4 также видно, что кривые $n = n(\chi)$ для $K^{\pm}$- и K_0-мезонов как в спиновом, так и в бесспиновом случаях различаются незначительно.

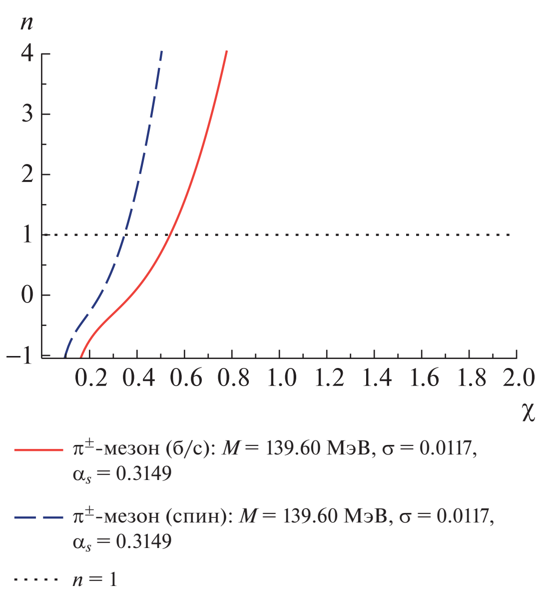

Рис. 2. Поведение функций $n = n(\chi)$ для $\pi^{\pm}$-мезона, соответствующих релятивистским спиновому псевдоскалярному ($a' = g'^2$, $b' = 1 - g'^2$) и бесспиновому случаям и представленных выражениями (35) и (37), взятыми при $\hbar = c = 1$, и отвечающих тем же значениям параметров взаимодействия кварков для $\pi^{\pm}$-мезона, что и на рис. 1.

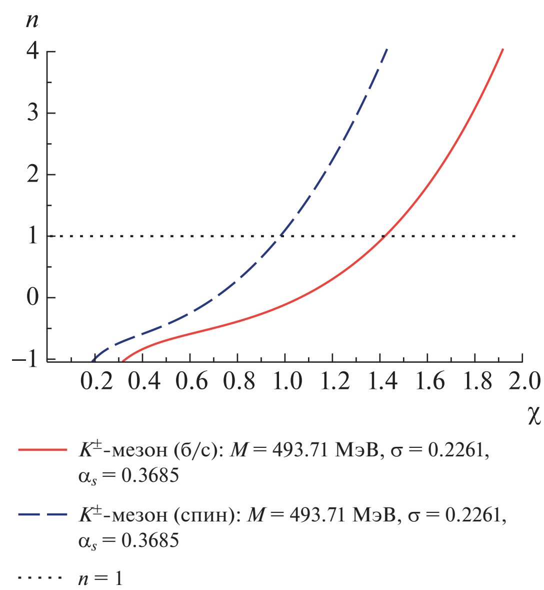

Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для $K^{\pm}$-мезона, которому отвечают те же значения параметров взаимодействия кварков, составляющих его, что и на рис. 1.

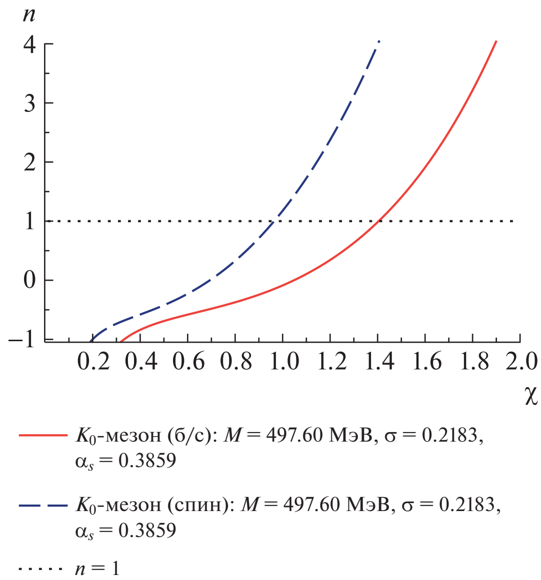

Рис. 4. То же, что и на рис. 2, но для K_0-мезона, которому отвечают те же значения параметров взаимодействия кварков, составляющих его, что и на рис. 1.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были получены новые релятивистские квазиклассические выражения для условий квантования уровней энергий псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов как составных систем двух релятивистских фермионов произвольных масс, взаимодействующих как посредством несингулярных запирающих потенциалов, так и сингулярных запирающих потенциалов воронкообразного типа с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием. Рассмотрение проводится на основе развитого математического аппарата РКП-подхода в ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц (фермионов) произвольных масс. Для решения поставленной задачи полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском $\mathbf{r}$-представлении для радиальной волновой функции составной системы, отвечающей псевдоскалярному, векторному и псевдовекторному случаям и состоящей из двух релятивистских фермионов произвольных масс, было решено в ВКБ-приближении. Определены условия применимости релятивистского ВКБ-приближения. Используемый подход непосредственно связан с возможностью представить полную энергию двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс m_1, m_2 в с.ц.и. в виде выражения, пропорционального энергии одной эффективной релятивистской частицы массы m'.

Показано, что в рамках рассматриваемого полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля новые модифицированные релятивистские ВКБ-условия квантования уровней энергий устанавливают явную зависимость относительного орбитального момента ℓ от энергии резонансов, что определяет релятивистские траектории Редже семейства мезонов как связанной системы двух кварков. Полученные формулы позволяют учитывать как влияние констант кулоновского (хромодинамического) и конфайментного (в частности, линейного) взаимодействий, так и различия масс кварков (фактор g'), при вычислении значений уровней энергий и реджевских траекторий связанных систем двух релятивистских фермионов произвольных масс.

Установлено, что для всех трех рассматриваемых спиновых структур мезонов (псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных) модифицированное релятивистское ВКБ-условие квантования уровней энергий, которое отвечает сингулярному потенциалу запирания с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием, включает в себя поправочный член в виде фазы релятивистской кулоновской функции в ВКБ-приближении, взятой в точке поворота r_+, соответствующей несингулярному запирающему (конфайнментному) потенциалу. Показано, что учет спина (фактор g') приводит к увеличению значений уровней энергии, отвечающих фиксированным значениям n и ℓ.

Проведено исследование влияния спиновых параметров псевдоскалярной составной системы, состоящей из двух релятивистских фермионов произвольных масс, взаимодействующих посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов, на ее спектр масс. Показано, что уровни энергий для $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезонов существенно зависят от значений параметров взаимодействия кварков, составляющих мезоны: констант взаимодействия (σ, α_s) и фактора g', зависящего от значений масс m_u, m_d, m_s кварков, образующих $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезоны. Найдены значения быстрот χ, которые соответствуют выбранным значениям параметров взаимодействия кварков, образующих $\pi^{\pm}$-, $K^{\pm}$- и K_0-мезоны.

Новые релятивистские ВКБ-условия квантования уровней энергий псевдоскалярных, векторных и псевдовекторных мезонов, состоящих из двух релятивистских фермионов произвольных масс, взаимодействующих как посредством несингулярных запирающих потенциалов, так и сингулярных запирающих потенциалов воронкообразного типа с хромодинамическим взаимодействием, получены в рамках полностью ковариантного метода. Можно ожидать, что они более полно учитывают как релятивистский характер частиц составной системы, так и эффекты, обусловленные как спинами частиц составной системы, так и различием их масс.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и техническую поддержку, А.Е. Дорохову, Ю.А. Курочкину, В.В. Андрееву и А.В. Киселеву за обсуждение полученных результатов, их комментарии и стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Barbieri, R. Kögerler, Z. Kunszt, and R. Gatto, Nucl. Phys. B **105**, 125 (1976).
2. R. McClary and N. Byers, Phys. Rev. D **28**, 1692 (1983).
3. E. Etim and L. Schülke, Nuovo Cimento A **77**, 347 (1983).
4. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
5. V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).
6. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
7. V. G. Kadyshevsky and M. D. Mateev, Nuovo Cimento A **55**, 275 (1967).
8. Р. Н. Фаустов, ТМФ **3**, 240 (1970) [Theor. Math. Phys. **3**, 478 (1970)].
9. R. N. Faustov, Ann. Phys. (N.Y.) **78**, 176 (1973).
10. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 562 (1979)].
11. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
12. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, ТМФ **53**, 20 (1982) [Theor. Math. Phys. **53**, 955 (1982)].
13. V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
14. В. В. Кондратюк, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **81**, 40 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 51 (2018)].
15. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
16. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2**(3), 69 (1972)].
17. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **31**, 1332 (1980) [Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 686 (1980)].
18. А. В. Сидоров, Н. Б. Скачков, ТМФ **46**, 213 (1981) [Theor. Math. Phys. **46**, 141 (1981)]; Препринт Р2-80-45, ОИЯИ (Дубна, 1980); V. I. Savrin, A. V. Sidorov, and N. B. Skachkov, Hadronic J. **4**, 1642 (1981).
19. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **83**, 270 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 488 (2020)].
20. А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, в сб.: *Труды IV международного симпозиума по нелокальным теориям поля, Алушта, 20–28 апреля 1976*, Д2-9788, ОИЯИ (Дубна, 1976).
21. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **84**, 262 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 339 (2021)].
22. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 707 (2017)].
23. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983)].
24. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **85**, 159 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 205 (2022)].
25. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
26. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **82**, 172 (2019) [Phys. At. Nucl. **82**, 158 (2019)].
27. K. A. Olive *et al*. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).

SEMICLASSICAL QUANTIZATION CONDITION OF THE ENERGY LEVELS FOR THE RELATIVISTIC SYSTEM OF TWO FERMIONS WITH ARBITRARY MASSES

Yu. D. Chernichenko[1),2)]

[1)] *Sukhoi State Technical University of Gomel, Belarus*
[1)] *International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus*

New semiclassical quantization conditions of the energy levels for the relativistic systems of two fermions of arbitrary masses interacting by means of the singular confining Coulomb-like potential are obtained. Quantization conditions of the energy levels for the pseudoscalar, vector, and pseudovector mesons were found. The present analysis was performed within the framework of completely covariant RQP approach in the Hamiltonian formulation of quantum field theory via a transition to the relativistic configuration representation for the case of two relativistic spin particles with arbitrary masses.