

# КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЧЕТНОСТИ ТЯЖЕЛЫХ НЕАКСИАЛЬНЫХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДЕР С КВАДРУПОЛЬНОЙ И ОКТУПОЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИЯМИ

© 2022 г. М. С. Надирбеков<sup>1)\*</sup>, С. Н. Кудиратов<sup>1)</sup>, О. А. Бозаров<sup>1)</sup>

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.; после доработки 07.06.2022 г.; принята к публикации 20.06.2022 г.

Развита неадиабатическая коллективная модель неаксиальных четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями. Асимметричные квадрупольные и октупольные моды учитываются эффективно. На основе развитой модели получены аналитические выражения для энергии уровней, содержащих пять подгоночных параметров, которые определяются из сравнения теоретических и экспериментальных данных. Угловая часть полярных координат использована в качестве одного из параметров равновесного состояния четно-четного ядра. Получено хорошее описание коллективных состояний  $yrast$ - и первой  $non-yrast$ -полос переменной четности тяжелых неаксиальных четно-четных ядер:  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152,154}\text{Sm}$ ,  $^{172}\text{Yb}$ ,  $^{228,230,232}\text{Th}$ ,  $^{232,234,236,238}\text{U}$  и  $^{240}\text{Pu}$ . В приложении представлено квантование кинетической энергии октупольных колебаний в криволинейных координатах.

DOI: 10.31857/S0044002722060101

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Реальный наблюдаемый спектр возбуждения деформированных ядер содержит уровни, имеющие как вращательную природу, так и уровни, возникшие за счет коллективных колебаний [1]. Наблюдение больших квадрупольных моментов привело к предположению, что некоторые ядра могут иметь сфероидальную форму, что было подтверждено наблюдением структур вращательных полос. Для большинства деформированных ядер описание аксиально-симметричного сфероида является приемлемым для воспроизведения спектра энергетических полос. В последнее время спектроскопические свойства возбужденных коллективных состояний тяжелых ядер широко изучаются различными авторами в рамках различных моделей, использующих геометрические, алгебраические и микроскопические подходы [2]. Алгебраические подходы к коллективным состояниям положительной четности основаны на предположении, что ядро может быть описано как система пар фермионов с угловым моментом 0, 1, 2 и 3 (пары  $s$ ,  $p$ ,  $d$  и  $f$ ), которые рассматриваются как феноменологические бозоны, а состояния с отрицательной четностью описываются путем добавления  $f$ -бозона к обычным  $s$ - и  $d$ -бозонам [3]. Микроскопические подходы к мультипольным колебаниям и расчет их

параметров направлены либо на обоснование феноменологических моделей, либо на приближенное решение ядерной проблемы многих тел. Однако в рамках микроскопических моделей мы еще не имеем столь детального описания спектров возбуждения ядер, как это дают феноменологические модели коллективного возбуждения [4, 5].

Коллективные спектры аксиально-симметричных атомных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями характеризуются вращательными полосами переменной четности [2, 6–12]. В работе [12] в рамках неадиабатической коллективной модели описаны последовательности энергий уровней  $yrast$ - и первой  $non-yrast$ -полос переменной четности деформированных аксиально-симметричных четно-четных ядер с квадрупольными и октупольными степенями свободы в редкоземельных ядрах  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152,154}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Gd}$ ,  $^{156}\text{Dy}$ ,  $^{162,164}\text{Er}$  и актинидах  $^{232,234,236,238}\text{U}$ .

В работах [13–15] показано, что  $\gamma$ -колебания играют важную роль в ядрах с квадрупольной деформацией, и подтверждена важность отклонения формы ядра от аксиально-симметричной при коллективном возбуждении при низких энергиях. В работе [16] рассмотрены описания энергетических уровней переменной четности  $yrast$ -полос четно-четных ядер в области актинидов:  $^{228,230,232}\text{Th}$ ,  $^{230,232,234,236,238}\text{U}$  и  $^{240}\text{Pu}$  в приближении жесткого асимметричного ротатора.

В настоящей работе развивается модель четно-четных ядер с неаксиальной квадрупольной и окту-

<sup>1)</sup>Институт ядерной физики, АН Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан.

\*E-mail: mnadirbekov@yandex.ru

польной деформациями. Рассчитаны уровни энергии  $yrast$ - и первой  $non-yrast$ -полос, проведены сравнения с имеющимися экспериментальными данными [1]. Как будет показано ниже, проведенный анализ позволяет сделать вывод об актуальности формализма представляемой модели.

Раздел 2 посвящен краткому рассмотрению неадиабатической коллективной модели неаксиальных четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями. В разд. 3 рассмотрено решение радиального уравнения Шредингера для потенциала Дэвидсона для поверхностных колебаний. В разд. 4 и 5 приведены обсуждения и результаты теоретических расчетов энергетического спектра четно-четных ядер и их сравнения с экспериментом. В разд. 6 приводятся заключительные выводы.

## 2. МОДЕЛЬНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Общая теория квадрупольной и октупольной деформаций четно-четных ядер определяется оператором Гамильтона, содержащим семь динамических переменных  $\beta_2 (\beta_2 \geq 0)$ ,  $\gamma (0 \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{3})$ ,  $\beta_3 (\beta_3 \geq 0)$ ,  $\eta (0 \leq \eta \leq \pi)$ ,  $\theta_1 (0 \leq \theta_1 \leq 2\pi)$ ,  $\theta_2 (0 \leq \theta_2 \leq \pi)$ ,  $\theta_3 (0 \leq \theta_3 \leq 2\pi)$  [17]:

$$\hat{H} = \hat{T}_{\beta_2} + \hat{T}_{\beta_3} + \hat{T}_{\gamma} + \hat{T}_{\eta} + \hat{T}_{\text{rot}} + V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta), \quad (1)$$

где

$$\hat{T}_{\beta_2} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta_2^4} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left( \beta_2^4 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \right), \quad (2)$$

$$\hat{T}_{\beta_3} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\beta_3^4} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left( \beta_3^4 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \right), \quad (3)$$

$$\hat{T}_{\gamma} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta_2^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (4)$$

$$\hat{T}_{\eta} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\beta_3^2 \sin(3\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \sin(3\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right], \quad (5)$$

выражения (2), (3), (4) и (5) являются операторами кинетической энергии  $\beta_2$ -,  $\beta_3$ -,  $\gamma$ - и  $\eta$ -колебаний соответственно;  $V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta)$  — потенциальная энергия вышеуказанных колебаний и

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \sum_{\kappa=1}^3 \frac{\hbar^2 \hat{I}_{\kappa}^2}{2\mathcal{J}_{\kappa}}, \quad (6)$$

оператор вращательной энергии, здесь  $I_{\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, 3$ ) — проекции полного углового момента, а  $\mathcal{J}_{\kappa}$  — проекции полного момента инерции, которые

явно зависят от массовых параметров квадрупольной и октупольной деформаций  $B_2$ ,  $B_3$  и параметров деформаций  $\beta_2$ ,  $\gamma$ ,  $\beta_3$ ,  $\eta$  [16].

Общее решение уравнения Шредингера с гамильтонианом (1) сложное, поэтому используются различные упрощения. Одной из таких моделей является аналог модели Давыдова—Чабана [4, 15], где переменные  $\gamma$  и  $\eta$  заменяются эффективными значениями  $\gamma_{\text{eff}}$  и  $\eta_{\text{eff}}$ . Тогда гамильтониан (1) принимает следующий вид:

$$\hat{H} = \hat{T}_{\beta_2} + \hat{T}_{\beta_3} + \hat{T}_{\text{rot}} + V(\beta_2, \beta_3), \quad (7)$$

где

$$\hat{T}_{\beta_2} = -\frac{\hbar^2}{2B_2} \frac{1}{\beta_2^3} \frac{\partial}{\partial \beta_2} \left( \beta_2^3 \frac{\partial}{\partial \beta_2} \right), \quad (8)$$

$$\hat{T}_{\beta_3} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{\beta_3^3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left( \beta_3^3 \frac{\partial}{\partial \beta_3} \right), \quad (9)$$

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2 \hat{I}_{\kappa}^2}{2\mathcal{J}_{\kappa}}. \quad (10)$$

В этом случае оператор вращательной энергии (10) зависит от эффективных значений переменных  $\gamma$  и  $\eta$ , т.е. от  $\gamma_{\text{eff}}$  и  $\eta_{\text{eff}}$ .

Теперь напомним уравнение Шредингера с гамильтонианом (7):

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2B_2} \left[ \frac{3}{\beta_2} \frac{\partial}{\partial \beta_2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_2^2} \right] \Psi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3, \theta) - \\ & -\frac{\hbar^2}{2B_3} \left[ \frac{3}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_3^2} \right] \Psi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3, \theta) + \\ & + \left[ \hat{T}_{\text{rot}} + V(\beta_2, \beta_3) \right] \Psi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3, \theta) = \\ & = E_I^{\pm} \Psi_I^{\pm}(\beta_2, \beta_3, \theta). \end{aligned} \quad (11)$$

Переходим к полярным координатам  $\sigma (0 \leq \sigma \leq \infty)$  и  $\varepsilon (-\frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{2})$  [11]:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{\frac{B}{B_2}} \sigma \cos \varepsilon, \\ \beta_3 &= \sqrt{\frac{B}{B_3}} \sigma \sin \varepsilon, \quad B = \frac{B_2 + B_3}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\sigma^2 \partial \varepsilon^2} \right] + \hat{T}_{\text{rot}} + \right. \\ & \left. + W(\sigma, \varepsilon) - E_I^{\pm} \right\} \Phi_I^{\pm}(\sigma, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{8B\sigma^2} \sum_{\kappa=1}^3 \frac{I_{\kappa}^2}{\mathcal{J}_{\kappa}^2} \quad (14)$$

с

$$J_1 = \cos^2 \varepsilon \sin^2 \left( \gamma_{\text{eff}} - \frac{2\pi}{3} \right) + \quad (15)$$

$$+ \sin^2 \varepsilon \left( \frac{3}{2} \cos^2 \eta_{\text{eff}} + \sin^2 \eta_{\text{eff}} + \frac{\sqrt{15}}{2} \sin \eta_{\text{eff}} \cos \eta_{\text{eff}} \right),$$

$$J_2 = \cos^2 \varepsilon \sin \left( \gamma_{\text{eff}} - \frac{4\pi}{3} \right) + \quad (16)$$

$$+ \sin^2 \varepsilon \left( \frac{3}{2} \cos^2 \eta_{\text{eff}} + \sin^2 \eta_{\text{eff}} - \frac{\sqrt{15}}{2} \sin \eta_{\text{eff}} \cos \eta_{\text{eff}} \right),$$

$$J_3 = \cos^2 \varepsilon \sin^2 \gamma_{\text{eff}} + \sin^2 \varepsilon \sin^2 \eta_{\text{eff}}, \quad (17)$$

здесь

$$J_\kappa = \frac{\mathfrak{J}_\kappa}{8B\sigma^2}, \quad (18)$$

безразмерные приведенные моменты инерции (или тензор момента инерции [18]) четно-четного ядра. Видно, что этот момент инерции зависит от  $\gamma_{\text{eff}}$  и  $\varepsilon$ .

В ядрах с октупольной деформацией есть два минимума потенциальной энергии, определяемые координатами  $\beta_{20}$ ,  $\beta_{30}$  и  $\beta_{20}$ ,  $-\beta_{30}$  или  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  и  $\sigma_0$ ,  $-\varepsilon_0$ . Разлагая потенциальную энергию  $V(\sigma_0, \varepsilon_0)$  по степеням смещений одного из этих равновесных положений и пренебрегая перекрестными членами, представим  $V$  в окрестности минимума  $\sigma_0$ ,  $\pm\varepsilon_0$  в виде [11]:

$$V(\sigma, \varepsilon) = V(\sigma) + \frac{C_\varepsilon}{2\sigma^2} (\varepsilon \pm \varepsilon_0)^2, \quad (19)$$

$C_\varepsilon$  — параметр жесткости  $\varepsilon$ -колебаний. Второе слагаемое в (19) принимает постоянное значение, если подразумевать  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

Общее решение уравнения (13) очень сложное. Полагая

$$\Psi_{I\tau}^\pm(\sigma, \theta) = F_I^\pm(\sigma) \Phi_{IM\tau}^\pm(\theta), \quad (20)$$

где  $M$  — проекция полного углового момента  $\hat{I}$  на третью ось в лабораторной системе координат, получаем уравнение Шредингера для вращательной части [18, 19]

$$\left[ \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^3 \frac{I_\kappa^2}{J_\kappa^2} - \epsilon_{I\tau}^\pm \right] \Phi_{IM\tau}^\pm(\theta) = 0. \quad (21)$$

А также уравнение Шредингера для переменной  $\sigma$  [18, 19]

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{1}{\sigma \partial \sigma} \right] + \quad (22)$$

$$+ \frac{\hbar^2 \epsilon_{I\tau}^\pm}{4B\sigma^2} + V(\sigma) - E_I^\pm \right\} F_I^\pm(\sigma) = 0.$$

Выражение в скобках уравнения (21) совпадает с оператором (11) работы [16], но без величин  $\tilde{B}_2 = 8B_2\beta_{2\text{eff}}$  и  $\tilde{B}_3 = 8B_3\beta_{3\text{eff}}$ , так как в этой работе динамические переменные  $\beta_2$  и  $\beta_3$  были заменены их эффективными значениями. Тогда коллективное вращательное движение ядра рассматривается отдельно от других степеней свободы. В этом приближении  $\gamma_{\text{eff}}$  и  $\eta_{\text{eff}}$  являются эффективными параметрами деформации [4, 14–16]. Таким образом, мы подразумеваем приведенный момент инерции в зависимости от двух параметров  $J_\kappa = J_\kappa(\gamma_{\text{eff}}, \eta_{\text{eff}})$ . В случае динамических переменных учетом полярных координат (12) мы получим множитель  $\hbar^2/(8B\sigma^2)$  в уравнении (21).

Решение уравнения (21) с переменной  $\varepsilon$  очень сложное, поэтому в первом приближении используем значение переменной  $\varepsilon$  в равновесном положении ядра, т.е.  $\varepsilon_0$ . Тогда безразмерная величина энергии  $\epsilon_{I\tau}$  [4, 15] в уравнении (21) является функцией параметров  $\gamma_{\text{eff}}$ ,  $\eta_{\text{eff}}$ ,  $\varepsilon_0$ .

### 3. РЕШЕНИЕ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Чтобы получить решение уравнения (22), величину  $V(\sigma)$  берем в форме потенциала Дэвидсона [20]:

$$V(\sigma) = V_0 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - \frac{\sigma_0}{\sigma} \right)^2, \quad (23)$$

где  $V_0$  — потенциальная энергия основного состояния. Вводя следующее обозначение:

$$x = \frac{2BV_0}{\hbar\sigma_0} \sigma^2, \quad (24)$$

получим уравнение

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{x \partial x} - \frac{s^2}{x^2} - \frac{1}{4} + \frac{E_I^\pm}{x} \right] F_I^\pm(x) = 0. \quad (25)$$

Учитывая граничные условия для уравнения Шредингера, получим

$$\left[ x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (2s + 1 - x) \frac{\partial}{\partial x} + \left( E_I^\pm - s - \frac{1}{2} \right) \right] F_I^\pm(x) = 0 \quad (26)$$

с

$$s = \sqrt{\frac{\epsilon_{I\tau}}{8} + \frac{1}{\mu^4}},$$

где  $\mu$  — параметр неадиабатичности [4] и

$$\mu^4 = \frac{\hbar^2}{2BV_0\sigma_0^4}.$$

Далее находим собственные функции:

$$F_I^\pm(x) = N_\sigma x^s \exp^{-\frac{x}{2}} F(-n, 2s + 1, x).$$

Здесь  $N_\sigma$  — коэффициент нормировки,  $F(-n, 2s + 1, x)$  — конфлюэнтная гипергеометрическая функция,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — квантовое число  $\sigma$ -колебаний, отметим, что  $n = 0$  соответствует энергетическим уровням *yrast*-полосы, а  $n = 1$  соответствует энергетическим уровням первой *non-yrast*-полосы, и т.д.

Собственные значения

$$E_{In\tau}^\pm = \left[ 2n + 1 + \sqrt{\frac{\epsilon_{I\tau}}{2} + \frac{1}{\mu^4}} \right] \frac{V_0}{\mu^2} - 2V_0. \quad (27)$$

Энергия основного состояния определяется выражением

$$E_{001}^+ = \left[ 1 + \frac{1}{\mu^2} \right] \frac{V_0}{\mu^2} - 2V_0.$$

Энергия возбужденных состояний определяется выражением

$$\Delta E_{In\tau}^\pm = \left[ 2n + \sqrt{\frac{\epsilon_{I\tau}}{2} + \frac{1}{\mu^4}} - \frac{1}{\mu^2} \right] \frac{V_0}{\mu^2}. \quad (28)$$

Вводим следующую величину  $\hbar\omega_\sigma = V_0/\mu^2$ , которая является энергетическим множителем [10–12]. Тогда уравнение (28) может быть написано в виде

$$\Delta E_{In\tau}^\pm = \left[ 2n + \sqrt{\frac{\epsilon_{I\tau}}{2} + \frac{1}{\mu^4}} - \frac{1}{\mu^2} \right] \hbar\omega_\sigma. \quad (29)$$

В представленном приближении используются следующие подгоночные параметры:  $\hbar\omega_\sigma$  (в кэВ),  $\gamma_{\text{эфф}}$  (в градусах),  $\eta_{\text{эфф}}$  (в градусах),  $\epsilon_0$  (в градусах) и  $\mu$  (безразмерный). В целом области изменения параметров неаксиальности составляют  $0^\circ < \eta_{\text{эфф}} < 180^\circ$ ,  $0^\circ < \gamma_{\text{эфф}} < 120^\circ$  и  $-90^\circ < \epsilon_0 < 90^\circ$ .

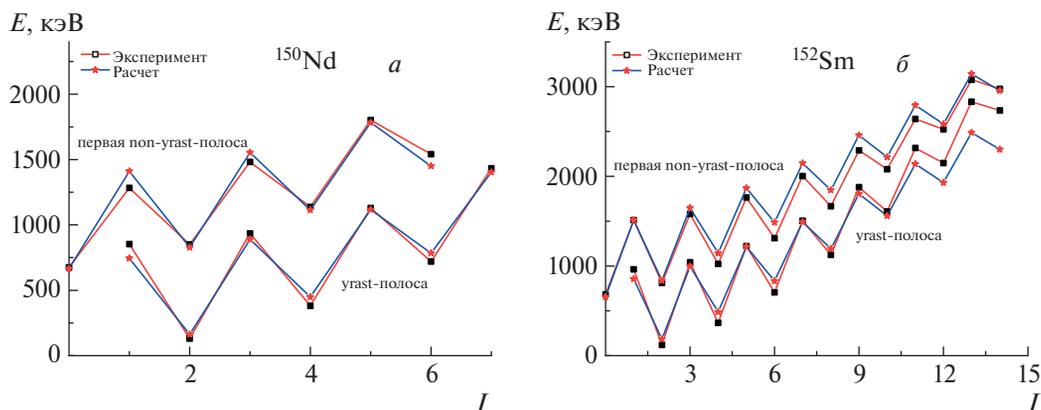
#### 4. ОБСУЖДЕНИЯ

В работе [12] рассмотрены энергетические уровни *yrast*- и первой *non-yrast*-полос переменной четности деформированных аксиально-симметричных четно-четных ядер с квадрупольными и октупольными степенями свободы (переменные  $\beta_2$  и  $\beta_3$  являются динамическими, а переменные  $\gamma = 0$  и  $\eta = 0$ ). В работе [16] рассмотрено описание энергетических уровней *yrast*-полос четно-четных ядер в приближении жесткого асимметричного ротатора (где переменные  $\beta_2 = \beta_{2\text{эфф}}$ ,  $\beta_3 = \beta_{3\text{эфф}}$ ,  $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$  и  $\eta = \eta_{\text{эфф}}$ ). В настоящей

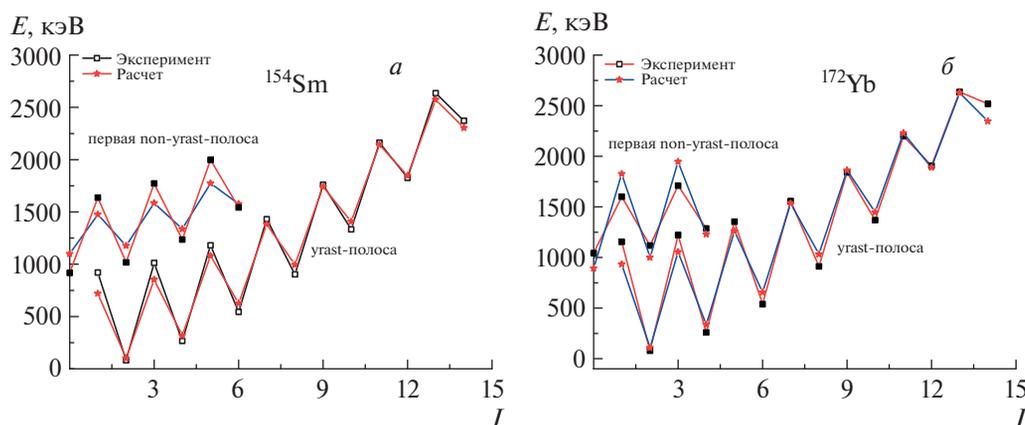
работе развивается неадиабатическая коллективная модель неаксиальных четно-четных ядер с квадрупольной и октупольной деформациями (где переменные  $\beta_2$  и  $\beta_3$  являются динамическими, а переменные  $\gamma$  и  $\eta$  заменены эффективными их значениями, т.е.  $\gamma = \gamma_{\text{эфф}}$  и  $\eta = \eta_{\text{эфф}}$ ). Существует много теоретических подходов для вычисления параметра асимметрии  $\gamma_{\text{эфф}}$  из экспериментально наблюдаемых, таких как  $R_{4/2} = E_{4+}/E_{2+}$ , и из экспериментального измерения вероятностей  $E2$ -переходов, т.е.  $B(E2)$ . Давыдов и Филиппов [14], а также Варшни и Бозе [21, 22] использовали соотношение  $R_{4/2}$  для определения  $\gamma_{\text{эфф}}$ . Расчет  $\gamma_{\text{эфф}}$  из скоростей  $E2$ -перехода приводит к неоднозначным значениям, в то время как от энергетических уровней [21] ожидаются надежные значения  $\gamma_{\text{эфф}}$ .

Пока не получена оценка значений параметра октупольной асимметрии  $\eta$ . Такая попытка была предпринята в работе [18], где экспериментальные данные для состояний с отрицательной четностью в  $^{228}\text{Th}$  и  $^{232,234}\text{U}$  сравнивались с предсказаниями трех возможных моделей асимметричного ротатора: чистый квадруполь, чистый октуполь и смешанный квадруполь/октуполь. В чисто квадрупольной и октупольной моделях параметры асимметрии  $\gamma$  и  $\eta$ , а также параметр жесткости  $\mu$  являются свободными параметрами. Однако при подгонке уровней отрицательной четности  $^{232}\text{U}$  и  $^{234}\text{U}$  не существует уровней  $\beta$ -вибрационной полосы для подгонки, поэтому значение  $\mu$  из подгонки к положительным уровням четности используется в качестве приближения первого порядка. В смешанной квадрупольно-октупольной модели используются значения  $\gamma$ ,  $\mu$  и общий масштабный коэффициент из подгонки с положительной четностью, и изменяются только параметры  $\eta$  и  $D = B_3\beta_3^2/(B_2\beta_2^2)$  для подгонки к уровням отрицательной четности. Таким образом, авторами сделан вывод об одинаковом количестве свободных параметров для описания уровней отрицательной четности во всех трех моделях.

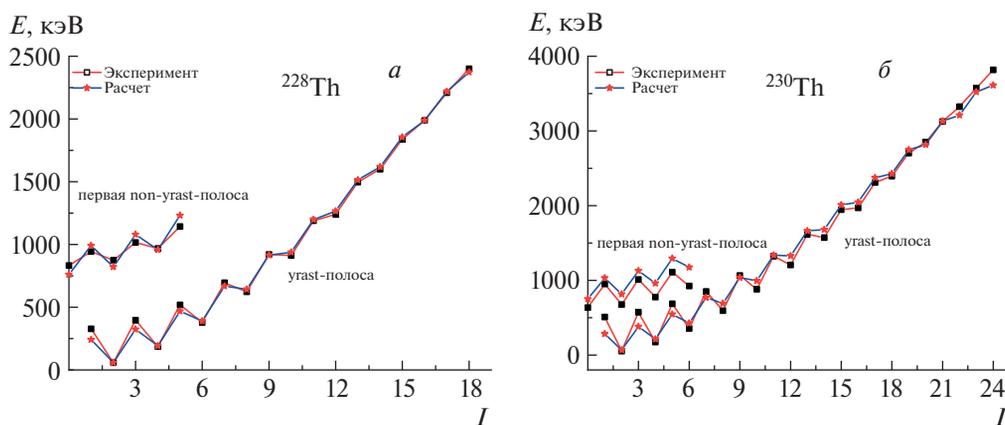
Простая оценка влияния  $\gamma$ -деформации может быть сделана, если предположить небольшие изменения системы около  $\gamma = 0$ , как в случае модели  $X(5)$  [23]. В работе [8] обсуждаются возможные пути влияния  $\gamma$ -деформации при коллективном движении в пространстве  $\beta_2$ – $\beta_3$ , рассматривается возможность учета трехосности, отмечается октупольная степень свободы. В настоящей работе мы эффективно учитываем трехосность квадрупольной и октупольной степеней свободы, а величины  $\gamma_{\text{эфф}}$  и  $\eta_{\text{эфф}}$  используем в качестве подгоночных параметров для случая динамических переменных  $\beta_2$  и  $\beta_3$ .



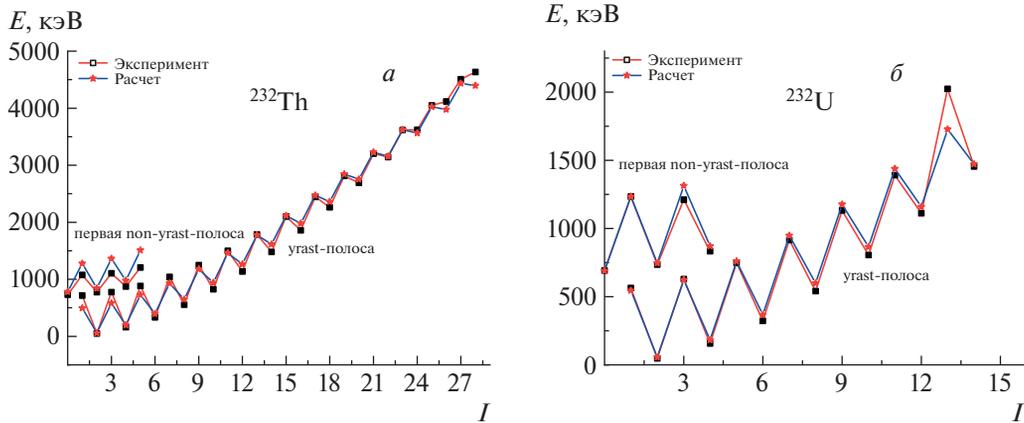
**Рис. 1.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{150}\text{Nd}$  (а) с  $\hbar\omega = 332.81$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 67.95^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 61.73^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0012^\circ$ ,  $\mu = 0.7272$ ,  $\text{RMS} = 60.98$  кэВ,  $^{152}\text{Sm}$  (б) с  $\hbar\omega = 327.33$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 67.5^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 26.28^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0069^\circ$ ,  $\mu = 0.7982$ ,  $\text{RMS} = 148.92$  кэВ.



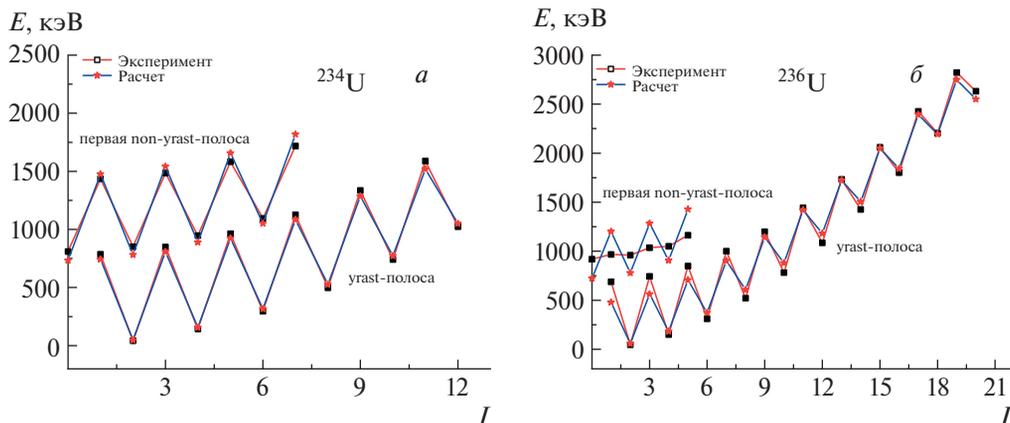
**Рис. 2.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{154}\text{Sm}$  (а) с  $\hbar\omega = 458.91$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 67.07^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 16.26^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.041^\circ$ ,  $\mu = 0.4665$ ,  $\text{RMS} = 118.12$  кэВ,  $^{172}\text{Yb}$  (б) с  $\hbar\omega = 445.93$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 61.82^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 179.9^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 4.9007^\circ$ ,  $\mu = 0.4982$ ,  $\text{RMS} = 126.78$  кэВ.



**Рис. 3.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{228}\text{Th}$  (а) с  $\hbar\omega = 379.75$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 55.4^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 139.6^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 6.1971^\circ$ ,  $\mu = 0.4001$ ,  $\text{RMS} = 45.6$  кэВ,  $^{230}\text{Th}$  (б) с  $\hbar\omega = 374.24$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 119.76^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 37.88^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 6.483^\circ$ ,  $\mu = 0.4223$ ,  $\text{RMS} = 125.39$  кэВ.



**Рис. 4.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{232}\text{Th}$  (а) с  $\hbar\omega = 391.2$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 61.77^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 143.25^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 4.4033^\circ$ ,  $\mu = 0.3935$ ,  $\text{RMS} = 123.82$  кэВ,  $^{232}\text{U}$  (б) с  $\hbar\omega = 344.67$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 66.16^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 103.46^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.0013^\circ$ ,  $\mu = 0.4017$ ,  $\text{RMS} = 78.6$  кэВ.



**Рис. 5.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{234}\text{U}$  (а) с  $\hbar\omega = 366.88$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 64.84^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 70.7^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.088^\circ$ ,  $\mu = 0.3587$ ,  $\text{RMS} = 51.82$  кэВ,  $^{236}\text{U}$  (б) с  $\hbar\omega = 361.08$  кэВ,  $\gamma_{\text{эфф}} = 66.67^\circ$ ,  $\eta_{\text{эфф}} = 118.69^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 0.003^\circ$ ,  $\mu = 0.393$ ,  $\text{RMS} = 130.3$  кэВ.

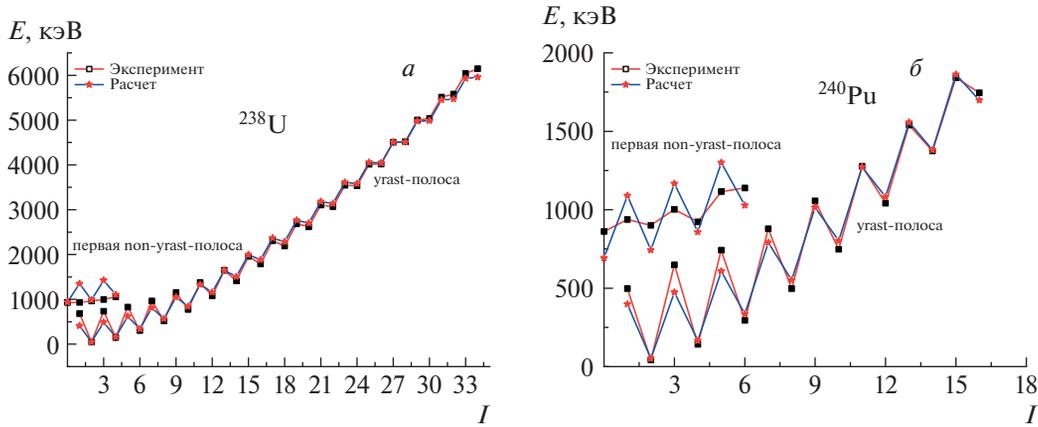
## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Получены значения параметров:  $\hbar\omega_\sigma$ ,  $\gamma_{\text{эфф}}$ ,  $\eta_{\text{эфф}}$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu$ , а также даны среднеквадратичные (RMS) отклонения уровней энергии (в кэВ) между теорией и экспериментом (см. рис. 1–6) для всех рассмотренных четно-четных ядер:  $^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152,154}\text{Sm}$ ,  $^{172}\text{Yb}$ ,  $^{228,230,232}\text{Th}$ ,  $^{232,234,236,238}\text{U}$  и  $^{240}\text{Pu}$ . На рисунках представлено сравнение теоретических и экспериментальных уровней энергии  $ugast$ - и первой  $non-ugast$ -полос. Теоретические результаты получены с помощью выражения (28) при  $n = 0$  и  $n = 1$ . Представленное поведение теоретических энергетических уровней  $ugast$ - и первой  $non-ugast$ -полос для всех ядер хорошо согласуется с экспериментальными данными, включая состояния с большими спинами, за исключением ядер  $^{236,238}\text{U}$  и

$^{240}\text{Pu}$  в первой  $non-ugast$ -полосе. Значения RMS для каждого рассматриваемого ядра изменяются в пределах  $\sim 100$  кэВ, которые являются хорошим критерием применимости предложенной модели.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель для описания энергетических уровней полос переменной четности тяжелых неаксиальных четно-четных ядер. Найдено решение радиального уравнения Шредингера для коллективного гамильтониана Бора с потенциалом Дэвидсона. Получены аналитические выражения для спектра энергии уровней и волновых функций. Проведен расчет энергий уровней  $ugast$ - и первой  $non-ugast$ -полос четно-четных ядер



**Рис. 6.** Теоретические и экспериментальные значения энергий уровней возбужденных состояний ядер  $^{238}\text{U}$  (а) с  $\hbar\omega = 469.8$  кэВ,  $\gamma_{\text{эф}} = 60.91^\circ$ ,  $\eta_{\text{эф}} = 144.81^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 4.6417^\circ$ ,  $\mu = 0.3272$ ,  $\text{RMS} = 135.8$  кэВ,  $^{240}\text{Pu}$  (б) с  $\hbar\omega = 346.19$  кэВ,  $\gamma_{\text{эф}} = 113.4^\circ$ ,  $\eta_{\text{эф}} = 140.61^\circ$ ,  $\varepsilon_0 = 4.096^\circ$ ,  $\mu = 0.3812$ ,  $\text{RMS} = 101$  кэВ.

$^{150}\text{Nd}$ ,  $^{152,154}\text{Sm}$ ,  $^{172}\text{Yb}$ ,  $^{228,230,232}\text{Th}$ ,  $^{232,234,236,238}\text{U}$  и  $^{240}\text{Pu}$ .

Приложение

КВАНТОВАНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО ЯДРА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Квадрупольные и октупольные колебания поверхности ядра

Расстояние от центра ядра до его поверхности в направлении полярных углов  $\theta$  и  $\varphi$ , отсчитываемых в лабораторной системе координат при малых отклонениях от радиуса сферы  $R_0$ , можно разложить  $R(\theta, \varphi)$  по сферическим функциям:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) \right], \quad (\text{П.1})$$

где  $\alpha_{\lambda\mu}$  являются динамическими переменными коллективных движений в ядре и удовлетворяют условию  $\alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda, -\mu}$ , которое вытекает из условия вещественности сферических функций

$$Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \varphi) = (-1)^{-\mu} Y_{\lambda, -\mu}(\theta, \varphi). \quad (\text{П.2})$$

В случае квадрупольных и октупольных деформаций выражение (П.1) можно записать в виде

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu} Y_{2\mu}^*(\theta, \varphi) + \sum_{m=-3}^3 \alpha'_{3m} Y_{3m}^*(\theta, \varphi) \right]. \quad (\text{П.3})$$

Свяжем с ядром систему ортогональных координатных осей  $\xi\eta\zeta$ , ориентация которых относительно лабораторной системы определяется тремя углами Эйлера  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$  и  $3$ ),

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[ 1 + \sum_{\nu=-2}^2 a_\nu Y_{2\nu}^*(\theta', \varphi') + \sum_{m=-3}^3 a'_m Y_{3m}^*(\theta', \varphi') \right], \quad (\text{П.4})$$

$$a_\nu = \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} D_{\lambda\mu}^{*\lambda}(\theta),$$

$$\alpha_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} D_{\lambda\mu}^\lambda(\theta) a_\nu,$$

где  $D_{\lambda\mu}^\lambda(\theta)$  — функция Вигнера.

Тогда выбираем систему координатных осей  $\xi\eta\zeta$  следующим образом:

$$a_1 = a_{-1} = 0, \quad a_2 = a_{-2}$$

и

$$a_0 = \beta_2 \cos \gamma, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{\beta_2 \sin \gamma}{\sqrt{2}},$$

где  $\beta_2 \geq 0$  — параметр квадрупольной деформации,  $\gamma$  — параметр асимметрии квадрупольной деформации, который изменяется в интервале  $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3}$ .

Точно таким же образом выбираем

$$a'_{3,\pm 1} = a'_{3,\pm 3} = 0, \quad a'_{3,2} = a'_{3,-2}$$

и

$$a'_{30} = \beta_3 \cos \eta, \quad a'_{32} = a'_{3,-2} = \frac{\beta_3 \sin \eta}{\sqrt{2}},$$

где  $\beta_3$  — параметр октупольной деформации,  $\eta$  — параметр асимметрии октупольной деформации, который изменяется в интервале  $0 \leq \eta \leq \pi$ .

$$a_{20} = \beta_2 \cos \gamma, \quad a_{22} = a_{2,-2} = \frac{\beta_2 \sin \gamma}{\sqrt{2}}, \quad (\text{П.5})$$

$$a_{30} = \beta_3 \cos \eta, \quad a_{32} = a_{3,-2} = \frac{\beta_3 \sin \eta}{\sqrt{2}}.$$

Отметим, в работе [24] показано, что переменные  $a'_{3,\pm 1}$  и  $a'_{3,\pm 3}$  не являются коллективными переменными. Тогда полная энергия квадрупольной и октупольной деформаций имеет вид

$$E = \frac{B_2}{2}(\dot{\beta}_2^2 + \beta_2^2 \dot{\gamma}^2) + \quad (\text{П.6})$$

$$+ \frac{B_3}{2}(\dot{\beta}_3^2 + \beta_3^2 \dot{\eta}^2) + V(\beta_2, \beta_3, \gamma, \eta) + \sum_{\lambda=1}^3 \frac{\hbar^2 \hat{J}_\lambda^2}{J_\lambda},$$

где  $J_k$  — момент инерции ( $k = 1, 2, 3$ ).

*Квантование кинетической энергии деформированного ядра в криволинейных координатах*

Чтобы проквантовать классическую кинетическую энергию, связанную с вращением и квадрупольными и октупольными колебаниями поверхности ядра, надо выбрать в качестве независимых переменных углы Эйлера  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  и внутренние переменные  $a_{20}, a_{22}, a_{30}$  и  $a_{32}$ . Следует отметить, что квантование кинетической энергии деформированного ядра в криволинейных координатах для внутренних переменных  $a_{20}$  и  $a_{22}$  подробно выполнено в работе [25]. Здесь мы выполняем ту же процедуру для переменных  $a_{30}$  и  $a_{32}$ , т.е. для

$$T_{\beta_3} = \frac{B_3}{2}(\dot{\beta}_3^2 + \beta_3^2 \dot{\eta}^2). \quad (\text{П.7})$$

Проекция полного момента инерции [26] в случае октупольных колебаний поверхности ядра имеют следующий вид:

$$J_1^{(3)} = 4B_3 \left( 3a_{30}^2 + 4a_{32}^2 + \sqrt{30}a_{30}a_{32} \right), \quad (\text{П.8})$$

$$J_2^{(3)} = 4B_3 \left( 3a_{30}^2 + 4a_{32}^2 - \sqrt{30}a_{30}a_{32} \right), \quad (\text{П.9})$$

$$J_3^{(3)} = 8B_3 a_{32}^2. \quad (\text{П.10})$$

Напишем оператор кинетической энергии

$$T = -\frac{1}{2} \hbar^2 \sum_{\mu} \frac{1}{m_{\mu}} \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2}. \quad (\text{П.11})$$

Теперь оператор кинетической энергии, соответствующий классическому выражению (П.11), можно написать в виде

$$T = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial}{\partial q_j} \right), \quad (\text{П.12})$$

где  $G$  — определитель метрического тензора  $g_{ij}$ ,  $g^{ij}$  — обратная матрица  $g_{ij}$ . Выражение (П.12) используем для квантования классической кинетической энергии (П.7). Элемент объема равен

$$d\tau = |G| dq_1 \dots dq_N. \quad (\text{П.13})$$

Используя формулу

$$\omega'_k = \frac{d\beta_k}{dt} = \sum_i V_{ki} \frac{\partial \theta_i}{dt}, \quad (\text{П.14})$$

перепишем формулу (П.7) в виде [25]

$$T = \frac{1}{2} \sum_k J_k(a_{30}, a_{32}) \times \quad (\text{П.15})$$

$$\times \left( \sum_i V_{ki}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{d\theta_i}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} B_3 (\dot{a}_{30}^2 + \dot{a}_{32}^2),$$

где

$$V_{k,l}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \quad (\text{П.16})$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_2 \cos \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$g_{11} = B_3, \quad g_{22} = 2B_3,$$

$$g_{1k} = g_{k1}, \quad \text{для } k \neq 1,$$

$$g_{2k} = g_{k2}, \quad \text{для } k \neq 2.$$

$$g_{\mu\nu} = \sum_k J_k V_{k,\mu}(\theta_i) V_{k,\nu}(\theta_i), \quad \mu, \nu \geq 3. \quad (\text{П.17})$$

Определим явное выражение для матрицы (П.17)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B_3 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B_3 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (J_1 \cos^2 \theta_3 + J_2 \sin^2 \theta_3) \sin^2 \theta_2 + J_3 \cos^2 \theta_2 & (J_2 - J_1) \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 & J_3 \cos \theta_2 & \\ 0 & 0 & (J_2 - J_1) \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 & J_1 \sin^2 \theta_3 + J_2 \cos^2 \theta_3 & 0 & \\ 0 & 0 & J_3 \cos \theta_2 & 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.18})$$

Находим определитель матрицы (П.18)

$$G = \det g_{ij} = 2B_3^2 \sin^2 \theta_2 J_1 J_2 J_3 = \quad (\text{П.19}) \\ = 256B_3^5 \sin^2 \theta_2 a_{32}^2 \left[ (3a_{30}^2 + 4a_{32}^2)^2 - 30a_{30}^2 a_{32}^2 \right].$$

Матрицу  $g^{ij}$ , обратную матрице  $g_{ij}$ , находим из соотношения

$$g^{ij} = \frac{G_{ij}}{G}, \quad (\text{П.20})$$

где  $G_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $g_{ij}$  в определителе  $G$ . Получаем отличные от нуля матричные элементы матрицы  $g^{ij}$ :

$$g_{11}^{-1} = \frac{1}{B_3}, \\ g_{22}^{-1} = \frac{1}{2B_3}, \\ g_{33}^{-1} = \frac{2B^2 J_3}{G} (J_1 \sin^2 \theta_3 + J_2 \cos^2 \theta_3), \\ g_{34}^{-1} = g_{43}^{-1} = \frac{-2B^2 J_3}{G} \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3 (J_1 - J_2), \\ g_{35}^{-1} = g_{53}^{-1} = \frac{-2B^2 J_3}{G} \cos \theta_2 (J_1 \sin^2 \theta_3 + J_2 \cos^2 \theta_3), \\ g_{44}^{-1} = \frac{2B^2 J_3}{G} \sin^2 \theta_2 (J_1 \cos^2 \theta_3 + J_2 \sin^2 \theta_3), \\ g_{45}^{-1} = g_{54}^{-1} = \frac{2B^2 J_3}{G} \cos \theta_2 (-J_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_3 + \\ + J_2 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_3), \\ g_{55}^{-1} = \frac{2B}{G} \sin^2 \theta_2 [J_1 J_2 \cos^4 \theta_3 + \\ + J_2 \cos^2 \theta_3 (J_3 \operatorname{ctg} \theta_2 + 2J_1 \sin^2 \theta_3) + \\ + J_1 \sin^2 \theta_3 (J_3 \operatorname{ctg}^2 \theta_2 + J_2 \sin^2 \theta_3)]^2.$$

Теперь выбираем обобщенные координаты  $q_\mu$  (П.12):

$$q_1 = a_{30}, \quad q_2 = a_{32}, \quad q_3 = \theta_1, \quad q_4 = \theta_2, \quad q_5 = \theta_3.$$

<sup>2)</sup> Это выражение отличается от аналогичного выражения в [25].

Перепишем определитель (П.19)

$$G^{1/2} = 16B_3^{5/2} \times \\ \times \sin \theta_2 [9a_{30}^4 a_{32}^2 - 6a_{30}^2 a_{32}^4 + 16a_{32}^6]^{1/2}.$$

Вычислим матричные элементы (П.12):

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q_1} G^{1/2} g_{11}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_1} = \\ = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial a_{30}} G^{1/2} \frac{\partial}{\partial a_{30}} = \\ = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \left[ \frac{6a_{30} (3a_{30}^2 - a_{32}^2)}{9a_{30}^4 - 6a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4} \frac{\partial}{\partial a_{30}} + \frac{\partial^2}{\partial a_{30}^2} \right], \\ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial q_2} G^{1/2} g_{22}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_2} = \\ = -\frac{\hbar^2}{4B_3} \frac{1}{G^{1/2}} \frac{\partial}{\partial a_{32}} G^{1/2} \frac{\partial}{\partial a_{32}} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \times \\ \times \left\{ \frac{3(3a_{30}^4 - 4a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4)}{2a_{32} (9a_{30}^4 - 6a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4)} \frac{\partial}{\partial a_{32}} + \frac{\partial^2}{2\partial a_{32}^2} \right\}.$$

Тогда выражение (П.7) принимает следующий вид:

$$T_{\text{vib}}^{(3)} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \left[ \frac{6a_{30} (3a_{30}^2 - a_{32}^2)}{9a_{30}^4 - 6a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4} \frac{\partial}{\partial a_{30}} + \frac{\partial^2}{\partial a_{30}^2} + \frac{3(3a_{30}^4 - 4a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4)}{2a_{32} (9a_{30}^4 - 6a_{30}^2 a_{32}^2 + 16a_{32}^4)} \frac{\partial}{\partial a_{32}} + \frac{\partial^2}{2\partial a_{32}^2} \right].$$

Переходя к переменным  $\beta_3$  и  $\eta$ , получим:

$$\hat{T}_{\text{vib}}^{(3)} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta_3^2} + \frac{4}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} + \frac{1}{\beta_3^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \right. \quad (\text{П.21}) \\ \left. + \frac{24 \cos^2 2\eta - 6 \cos 2\eta}{5 + 5 \cos 2\eta + 8 \cos^2 2\eta} \frac{\cos \eta}{\sin \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right].$$

Отметим, что в настоящей статье используется следующий вид  $\hat{T}_{\text{vib}}^{(3)}$  с учетом (3) и (5):

$$\hat{T}_{\text{vib}}^{(3)} = -\frac{\hbar^2}{2B_3} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta_3^2} + \frac{4}{\beta_3} \frac{\partial}{\partial \beta_3} + \frac{1}{\beta_3^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{3 \cos 3\eta}{\sin 3\eta} \frac{\partial}{\beta_3^2 \partial \eta} \right]. \quad (\text{П.22})$$

Видно, что множители в последних членах этих выражений не совпадают. Проведенные расчеты показали, что множитель в последнем члене (П.21) можно аппроксимировать с таким множителем в (П.22), но в пределах ( $0 < \eta < 30^\circ$ ) или ( $150 < \eta < 180^\circ$ ). Несовпадения последних множителей в выражениях (П.21) и (П.22) не влияют на полученные результаты, потому что в настоящей статье используется эффективное значение переменного  $\eta$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/>
2. P. A. Butler and W. Nazarewicz, Nucl. Phys. A **533**, 249 (1991).
3. A. Arima and F. Iachello, Ann. Phys. (N.Y.) **99**, 253 (1976).
4. А. С. Давыдов, *Возбужденные состояния атомных ядер* (Атомиздат, Москва, 1967).
5. R. F. Casten, *Nuclear Structure from a Simple Perspective* (Oxford University Press, New York, 1990).
6. В. М. Струтинский, Атомная Энергия **4**, 150 (1956).
7. N. Minkov, P. Yotov, S. Drenska, and W. Scheid, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **32**, 497 (2006).
8. N. Minkov, P. Yotov, S. Drenska, W. Scheid, D. Bonatsos, D. Lenis, and D. Petrellis, Phys. Rev. C **73**, 044315 (2006).
9. В. Ю. Денисов, ЯФ **49**, 644 (1989) [Sov. J. Nucl. Phys. **49**, 399 (1989)].
10. V. Yu. Denisov and A. Ya. Dzyublik, Phys. At. Nucl. **56**, 477 (1993).
11. V. Yu. Denisov and A. Ya. Dzyublik, Nucl. Phys. A **589**, 17 (1995).
12. M. S. Nadirbekov, G. A. Yuldasheva, N. Minkov, and W. Scheid, Int. J. Mod. Phys. E **21**, 1250044 (2012).
13. L. Willets and M. Jean, Phys. Rev. **102**, 788 (1956).
14. A. S. Davydov and G. F. Filippov, Nucl. Phys. **8**, 237 (1958).
15. A. S. Davydov and A. A. Chaban, Nucl. Phys. **20**, 499 (1960).
16. M. S. Nadirbekov, N. Minkov, M. Strecker, and W. Scheid, Int. J. Mod. Phys. E **25**, 1650022 (2016).
17. M. S. Nadirbekov and G. A. Yuldasheva, Int. J. Mod. Phys. E **23**, 1450034 (2014).
18. J. P. Davidson, *Technical report. The University of Kansas Nuclear Physics Laboratory Lawrence, Kansas* (1970).
19. J. P. Davidson and M. G. Davidson, Phys. Rev. **138**, B 316 (1965).
20. P. M. Davidson, Proc. R. Soc. London Ser. A **135**, 459 (1932).
21. Monica Karday, H. M. Mittal, and Rohit Mehra, Pramana — J. Phys. **91**, 70 (2018).
22. Y. P. Varshni and S. Bose, Nucl. Phys. A **144**, 645 (1970).
23. F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **87**, 052502 (2001).
24. В. Г. Соловьев, П. Фогель, А. А. Корнейчук, Изв. АН СССР. Сер. физ. **28**, 1599 (1964).
25. И. Айзенберг, В. Грайнер, *Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления* (Атомиздат, Москва, 1975).
26. P. O. Lipas and J. P. Davidson, Nucl. Phys. **26**, 80 (1961).

## COLLECTIVE STATES OF AN ALTERNATING PARITY OF HEAVY EVEN–EVEN NUCLEI WITH QUADRUPOLE AND OCTUPOLE DEFORMATIONS

M. S. Nadirbekov<sup>1)</sup>, S. N. Kudiratov<sup>1)</sup>, O. A. Bozarov<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Institute of Nuclear Physics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent

A non-adiabatic collective model of non-axial even–even nuclei with quadrupole and octupole deformations is developed. Asymmetric quadrupole and octupole modes are taken into account effectively. On the basis of the proposed model, an analytical expression for the level energy is obtained containing five adjustable parameters, which are determined from a comparison of theoretical and experimental data. The angular part of the polar coordinates is used as a parameter as an equilibrium state of an even–even nucleus. A good description of the collective states of the yrast and first non-yrast variable-parity bands of heavy non-axial even–even nuclei is obtained: <sup>150</sup>Nd, <sup>152,154</sup>Sm, <sup>172</sup>Yb, <sup>228,230,232</sup>Th, <sup>232,234,236,238</sup>U and <sup>240</sup>Pu.