

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОНТЕ-КАРЛО AuAu-СОБЫТИЙ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ

© 2023 г. Т. Г. Дедович^{1),2)*}, М. В. Токарев^{1),2)**}

Поступила в редакцию 20.09.2022 г.; после доработки 20.09.2022 г.; принята к публикации 22.09.2022 г.

Представлены результаты фрактального анализа Монте-Карло AuAu-событий при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, полученные методом систем уравнений степенных покрытий (SePaC). Для генерации событий использовалась мультифазная транспортная модель АМРТ. В качестве исследуемой переменной рассматривался поперечный импульс p_t отрицательно заряженных частиц, регистрируемых в интервале псевдобыстрот $|\eta| < 0.5$ в событиях с различной центральностью от (0–5)% до (30–40)%. Для сравнительного анализа рассматривались наборы случайных событий и Монте-Карло фракталы. Показаны различия в поведении зависимости доли событий, реконструируемых как фракталы, от параметров метода для разных типов данных. Найдены оптимальные значения параметров для анализа АМРТ AuAu-событий. Отмечается зависимость доли событий $P_{\text{fr}}^{\text{fr}}$, восстанавливаемых как фракталы, от центральности и множественности в AuAu и случайных событиях, соответственно. Установлены незначительные различия в поведении распределений по размерности D_F для разных классов центральности. В АМРТ AuAu-событиях выделены два класса, различающиеся формой спектров по поперечным импульсам.

DOI: 10.31857/S0044002723010154, EDN: RBASAL

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция фракталов широко используется в физике для изучения решений уравнений Шредингера [1], структуры пространства–времени в квантовой теории поля как нового метода регуляризации [2], распределения плотности топологического заряда, полученного в глюодинамике на решетке [3], перемежаемости в спектре вторичных частиц [4], термодинамических функций системы рожденных адронов [5], сигнала критических явлений в ядерных столкновениях [6], фрактальных свойств ядер и событий [7].

Набор адронов, рожденных в неупругом взаимодействии, можно рассматривать как набор точек в фазовом пространстве $\{p_t, \eta, \varphi\}$. Здесь p_t — поперечный импульс, η — псевдобыстрота, φ — азимутальный угол. Распределение точек в этом пространстве определяется динамикой взаимодействия: жестким рассеянием, партонным ливнем в начальном и конечном состояниях, многочастичным взаимодействием, фрагментацией партонных адронов, распадом нестабильных частиц. Дж. Бьеркен в своей работе [8] обращал внимание на то,

что новым направлением для изучения КХД на коллайдерах является фрактальность партонных каскадов, которая должна приводить к аномальной размерности фазового пространства, и подчеркивал, что обнаружение фрактальности является важной экспериментальной задачей.

2. ОПИСАНИЕ НАБОРА ДАННЫХ

В работе проводится фрактальный анализ Монте-Карло AuAu-событий при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, полученных с помощью генератора АМРТ [9, 10]. В качестве исследуемой переменной использовался поперечный импульс p_t отрицательно заряженных частиц, регистрируемых в интервале псевдобыстрот $|\eta| \leq 0.5$. События разделялись по центральности. Количество событий N_{ev} и их средняя множественность \bar{N}_{h-} для разных классов центральности представлены в табл. 1.

На рис. 1 приведено распределение событий по множественности N_{h-} для разных классов центральности АМРТ AuAu-событий. Видно, что события с наибольшей центральностью имеют большую среднюю множественность.

Для сравнительного анализа рассматривались наборы случайных событий и Монте-Карло фракталы. Распределение по множественности для наборов случайных событий совпадает с аналогичным распределением АМРТ AuAu-событий

¹⁾Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия.

²⁾Государственный университет “Дубна”, 141980, Дубна, Россия.

*E-mail: tdedovich@yandex.ru

**E-mail: tokarev@jinr.ru

Таблица 1. Характеристики АМРТ AuAu-событий при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ и $|\eta| \leq 0.5$

Центральность, %	N_{ev}	\bar{N}_{h-}
0–5	29 018	283
5–10	30 000	229
10–20	30 000	176
20–30	29 998	120
30–40	30 000	79

(рис. 1). Фрактальный набор данных содержит 1823 события, полученных независимым [11], зависимым [12] и комбинированным [13] делением. При генерации фракталов использовались различные основания P_F (от 3 до 8). Множественность в событиях изменялась в широком диапазоне от 8 до 1024.

3. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ SePaC-МЕТОДА ПРИ АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

В данной работе фрактальный анализ выполняется методом систем уравнений степенных покрытий (SePaC) [14]. Подробное описание метода, примеры его применения на тестовых фракталах и различных видах фоновых событий представлены в работах [11–18].

Приведем краткое описание SePaC-метода. В его основу положено определение размерности Хаусдорфа–Безиковича [19], для вычисления которой рассматриваются различные наборы степенных покрытий исследуемой величины. Основание покрытия P_{cov} связано с количеством бинов $N = (P_{cov})^i$ в i -ом распределении набора, которое

соответствует i -ому уровню фрактала. Пособытийный анализ определяет, является ли событие фрактальным. Для этого в рассматриваемом наборе распределений строится система уравнений $\sum_{j=1}^{N_i} (l_{ji})^{d_{F,i}} = 1$, где N_i — количество элементов фрактала, а l_{ji} — длина j -элемента на i -ом уровне. Элементы фрактала определяются на основе ненулевых бинов в распределении исследуемой величины. Событие считается фрактальным, если условие $|d_{F,i} - \bar{d}_F|/\bar{d}_F < Dev$ выполнено не менее чем для трех уровней. Здесь Dev — параметр метода, \bar{d}_F — среднее значение размерностей $d_{F,i}$. Рассматриваются наборы покрытий с различными основаниями $P_{cov} = 3, \dots, P_{Max}$ (P_{Max} — параметр метода), а также гипотезы независимого и зависимого деления элементов [1]. Фрактальная размерность определяется по формуле $D_F = \bar{d}_F$.

В работе выбор параметров метода проведем на основе анализа распределений по доле $Prtn$ событий, реконструируемых как фракталы.

На рис. 2а представлена зависимость доли $Prtn$ реконструированных фракталов от параметра Dev при $P_{Max} = 105$. Видно, что зависимость возрастает и выходит на плато ($Prtn = 0.96$) при $Dev = 0.05$. Данное значение будем считать оптимальным и использовать в дальнейшем анализе.

На рис. 2б, в показаны зависимости доли $Prtn$ событий, реконструируемых как фракталы, от значения параметра P_{Max} при оптимальном Dev для фракталов, а также АМРТ AuAu и случайных событий различных классов центральности и множественности соответственно. Из рисунков видно, что исследуемые зависимости для разных данных заметно различаются. Зависимость $Prtn(P_{Max})$ для АМРТ AuAu-событий имеет несколько режимов поведения: быстрый рост в диапазоне $P_{Max} = 3–5$, первое плато ($P_{Max} = 6–11$) и последующее монотонное возрастание с выходом на второе плато.

В диапазоне значений $P_{Max} < 10$ от 5% до 10% АМРТ AuAu-событий различных классов центральности реконструируются как фракталы, а доля случайных событий равна нулю. Наблюдается зависимость от центральности и множественности при $P_{Max} > 10$. Чем меньше центральность и множественность, тем быстрее происходит выход на второе плато и меньше максимальное значение $Prtn$.

Таким образом, найдено оптимальное значение параметра метода $Dev = 0.05$ и показана зависимость доли событий, восстанавливаемых как фракталы, от центральности и множественности в наборах данных. Установлено различие в поведении $Prtn(P_{Max})$ для фракталов, АМРТ AuAu и случайных событий. Это позволяет предположить наличие фрактальных AuAu-событий в исследуемом наборе данных.

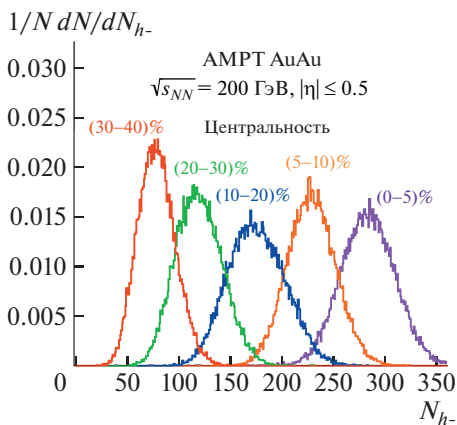


Рис. 1. Распределение событий по множественности N_{h-} для различных классов центральности АМРТ AuAu-событий при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ и $|\eta| \leq 0.5$.

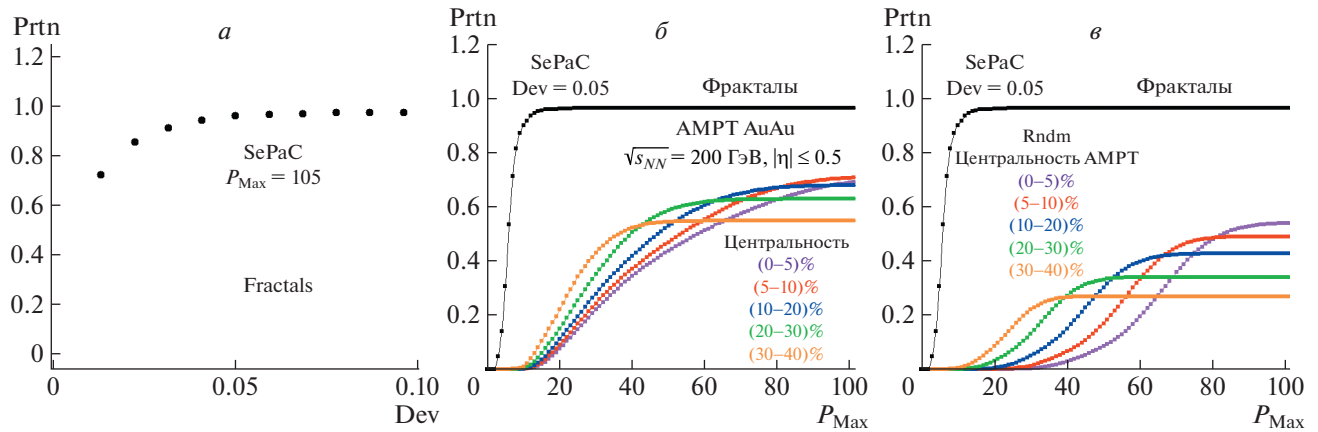


Рис. 2. Зависимость доли Prtn реконструированных фракталов от параметра Dev (а), зависимость доли Prtn для АМРТ AuAu (б) и случайных (в) событий, реконструируемых как фракталы, от значения параметра P_{Max} при выбранном Dev = 0.05.

4. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ D_F СОБЫТИЙ

Рассмотрим влияние выбора параметра P_{Max} на значение получаемой размерности D_F .

На рис. 3а–3в и 3г–3е показаны распределения АМРТ AuAu-событий для центральностей (0–5)%, (10–20)%, (30–40)% и случайных событий с аналогичными распределениями по множественности на $\{P_{\text{Max}}, D_F\}$ плоскости. Видно, что при $P_{\text{Max}} = 3–9$ АМРТ AuAu-события имеют большую размерность, а случайные события не интерпретируются как фракталы. Отметим, что с уменьшением центральности уменьшается максимальное значение P_{Max} , при котором АМРТ AuAu и случайные события реконструируются как фракталы.

На рис. 4а–4в показаны распределения по D_F для АМРТ AuAu-событий с центральностями (0–5)%, (10–20)% и (30–40)%, а также случайных событий с аналогичными распределениями по множественности. Видно, что распределение для АМРТ AuAu-событий имеет несколько пиков, высота которых незначительно изменяется с центральностью. Распределения по D_F для случайных событий существенно различаются для разных классов по множественности. Это связано с различиями в средних значениях D_F и количеством событий, восстанавливаемых как фракталы, для рассматриваемых классов. Большинство АМРТ AuAu-событий имеют размерность меньше, а случайных событий — больше 0.8, соответственно. Перекрывание этих распределений незначительно.

Таким образом, установлено существенное различие зависимости размерности D_F от параметра P_{Max} для АМРТ AuAu и случайных событий. Наблюдается незначительное отличие формы распределения по D_F для разных классов центрально-

сти AuAu-событий. Найдено, что поведение D_F -распределения для случайных событий существенно зависит от класса множественности.

5. ТИПЫ ФРАКТАЛЬНЫХ АМРТ AuAu-СОБЫТИЙ

На рис. 5а–5в приведены зависимость $\text{Prtn}(P_{\text{Max}})$, двумерное распределение $\{P_{\text{Max}}, D_F\}$, распределение по D_F для всех классов центральности АМРТ AuAu-событий. Зависимость $\text{Prtn}(P_{\text{Max}})$ (рис. 5а) имеет два плато. Двумерное распределение $\{P_{\text{Max}}, D_F\}$ (рис. 5б) можно разделить на две области: события с большей и меньшей размерностью, которые реконструируются при $P_{\text{Max}} \leq 10$ и $P_{\text{Max}} > 10$ соответственно. Распределение по размерности D_F имеет два пика: первый в диапазоне от 0.45 до 0.82 и второй в диапазоне от 0.82 до 0.9.

Установлено, что АМРТ AuAu-события, реконструируемые как фракталы, разделяются на два типа. События первого типа имеют большую размерность и реконструируются при использовании гипотезы независимого деления с максимальным основанием $P_{\text{Max}} = 10$. Они составляют 7% от общего числа. События второго типа имеют меньшую размерность и выделяются при использовании гипотезы зависимого деления с $P_{\text{Max}} > 10$. Далее рассмотрим отдельное применение гипотез для фрактального анализа АМРТ AuAu-событий.

5.1. Гипотеза зависимого деления

Рассмотрим распределение по размерности D_F для фрактальных АМРТ AuAu-событий различных классов центральности, выделенных с использованием гипотезы зависимого деления (рис. 6). Распределения для всех классов центральности

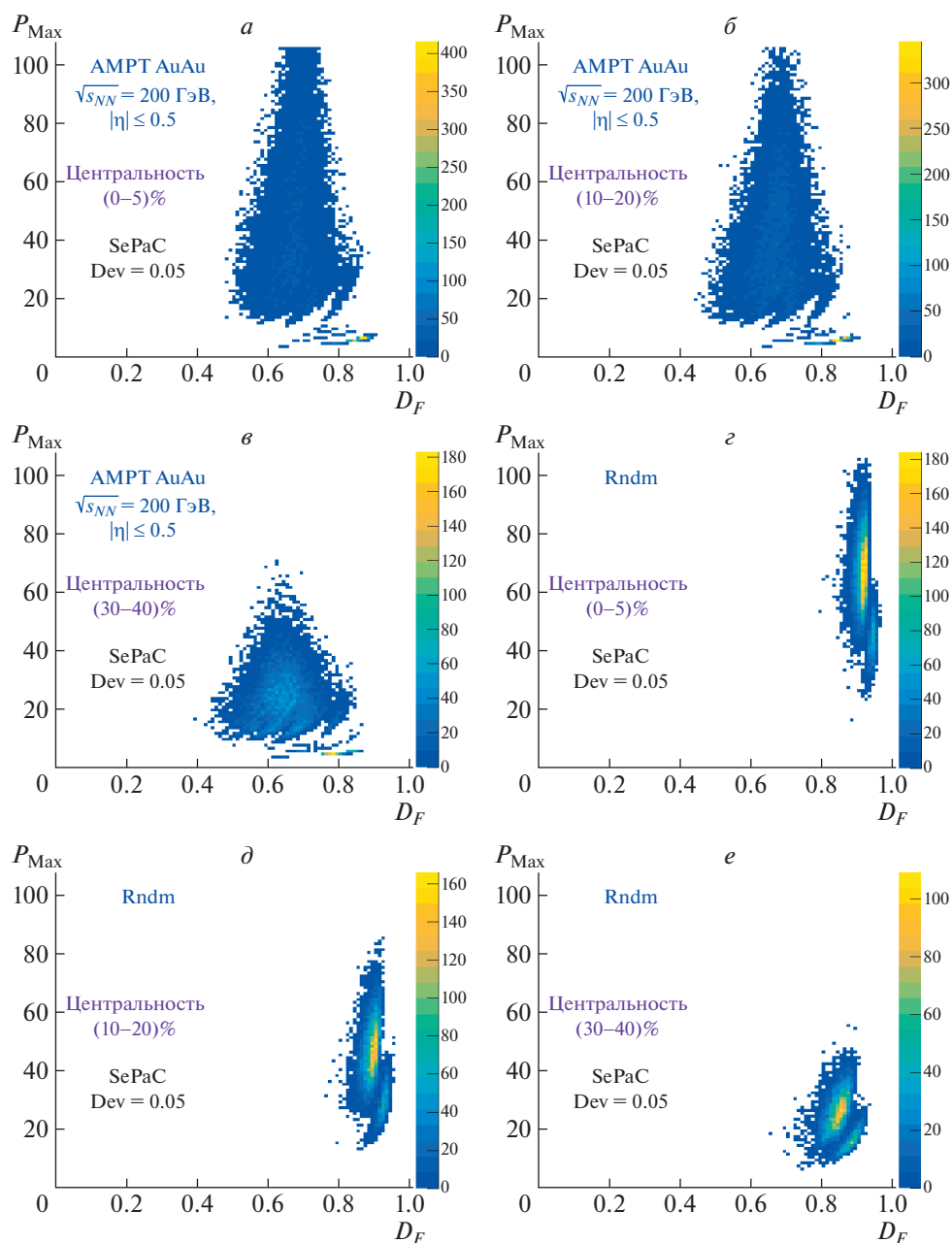


Рис. 3. Распределение АМРТ AuAu (*a*, *б*, *в*) и случайных (*г*, *д*, *е*) событий на $\{P_{\text{Max}}, D_F\}$ плоскости для различных классов центральностей и множественности соответственно.

АМРТ AuAu-событий изображены серым, для событий с центральностью (0–5)%, (10–20)% и (30–40)% — сиреневым, синим и красным, а для случайных событий с соответствующими множественностями — коричневым цветом. Видно, что распределения для золото–золото и случайных событий имеют по одному пику, которые не перекрываются. Отметим, что уменьшение центральности для АМРТ AuAu-событий приводит к незначительному уменьшению размерности D_F , в отличие от случайных.

5.2. Гипотеза независимого деления

На рис. 7 показано распределение по размерности D_F для фрактальных АМРТ AuAu-событий, выделенных с использованием гипотезы независимого деления. Распределения для всех классов центральности АМРТ AuAu-событий изображены серым, для событий с центральностью (0–5)%, (10–20)% и (30–40)% — сиреневым, синим и красным цветом соответственно. Установлено, что случайные события не восстанавливаются как фракталы. Из рисунка видно, что распределения имеют

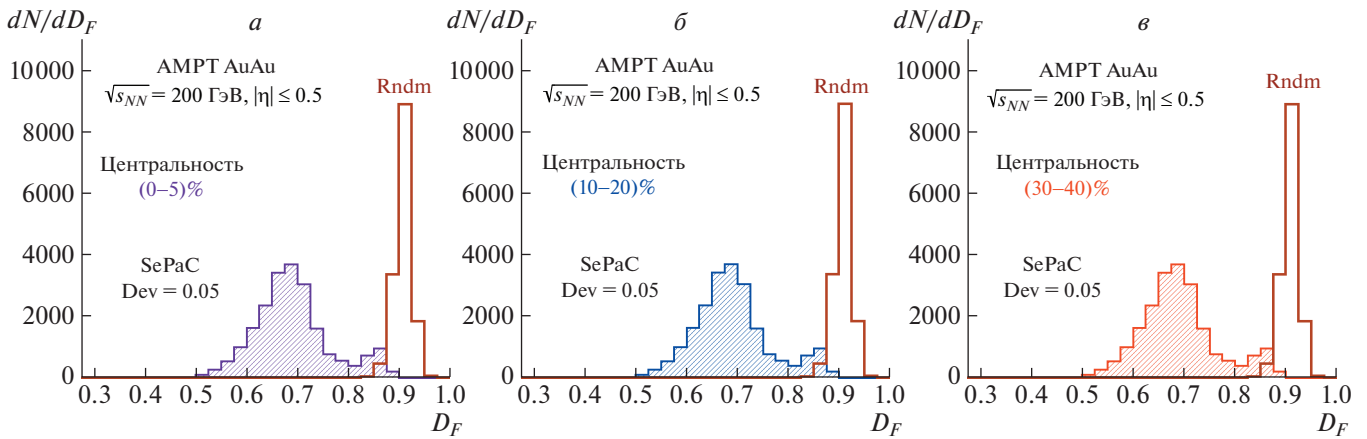


Рис. 4. Распределение по размерности D_F для АМРТ AuAu и случайных событий различных классов центральности и множественности соответственно.

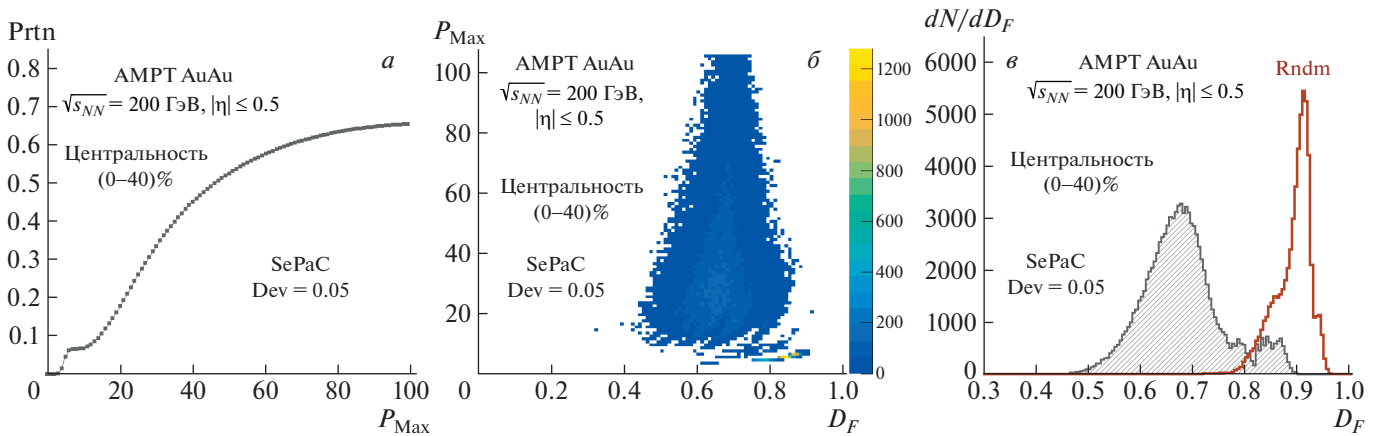


Рис. 5. Зависимость $Prtn(P_{Max})$ (а), двумерное распределение $\{P_{Max}, D_F\}$ (б) и распределение по D_F (в) для всех классов центральности АМРТ AuAu-событий.

несколько пиков и расположены в диапазоне D_F от 0.75 до 0.9. Отметим, что меньшей центральности соответствует меньшая размерность.

Далее рассмотрим (рис. 8а, б) распределение по поперечному импульсу p_t для фрактальных (красные точки) и нефрактальных (синие точки) АМРТ AuAu-событий с центральностью (10–20)%. На обоих рисунках серыми символами обозначены распределения для всех событий центральности (10–20)% АМРТ AuAu-событий. Из рисунка видно, что p_t -распределение для фрактальных событий имеет несколько режимов поведения, а для нефрактальных — указывает на экспоненциальный закон. Представляет интерес исследование вопроса: возможно ли выделить класс АМРТ AuAu-событий, имеющий экспоненциальный p_t -спектр? Для получения ответа рассмотрим зависимость χ^2 экспоненциального

фита от параметра метода Dev для нефрактальных АМРТ AuAu-событий с центральностью (10–20)% (рис. 8в). Из рисунка видно, что эта зависимость имеет плато с последующим ростом. Считаем, что оптимальное значение Dev соответствует максимальному значению на плато и равно 0.02. Такой выбор параметра позволяет выделить два класса событий: фрактальные события, имеющие многорежимный спектр по p_t , и нефрактальные события, имеющие экспоненциальный p_t -спектр.

Результаты аппроксимации p_t -спектров для разных классов центральности представлены в табл. 2. В ней указаны оптимальные значения параметра метода Dev, соответствующее значение минимального χ^2 , значение наклона p_t -спектра в логарифмическом масштабе.

Из таблицы видно, что оптимальные значения Dev незначительно увеличиваются с уменьшением

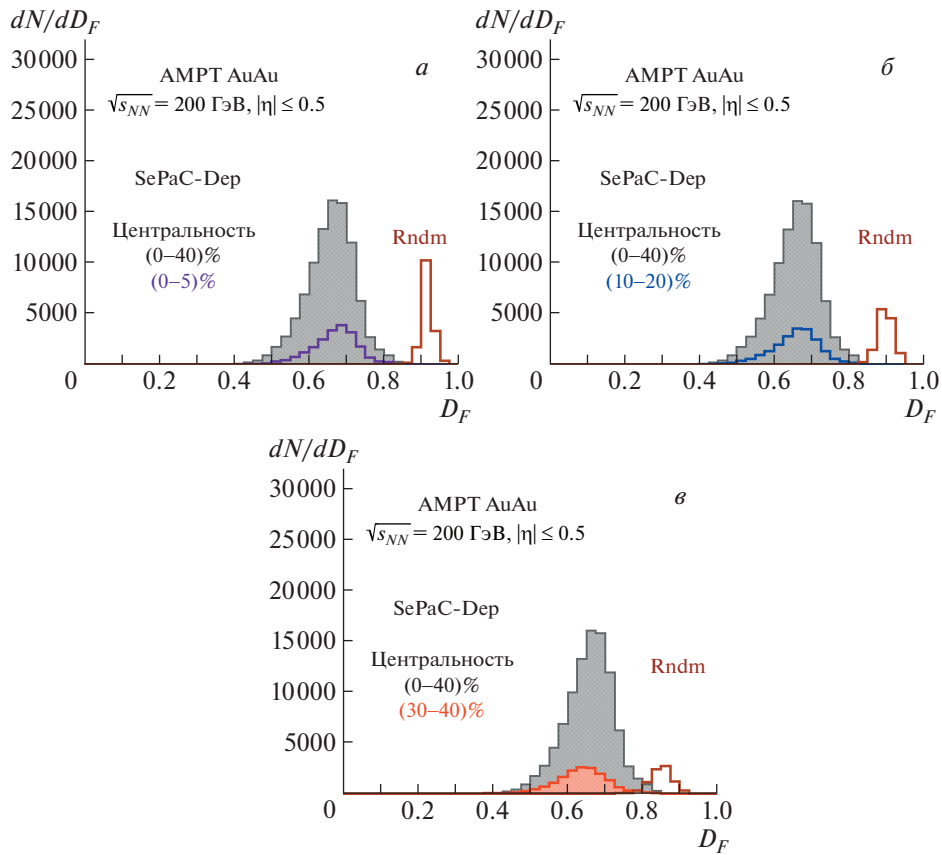


Рис. 6. Распределение по размерности D_F , полученной с использованием гипотезы зависимого деления, для фрактальных AMPT AuAu и случайных событий различных классов центральности и множественности соответственно.

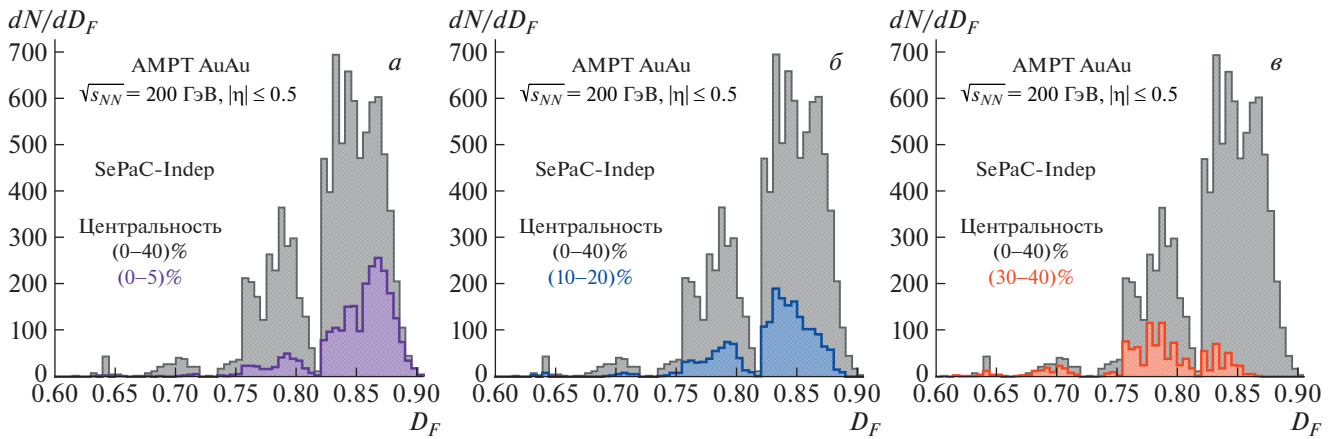


Рис. 7. Распределение по размерности D_F для фрактальных AMPT AuAu-событий различных классов центральности, выделенных с использованием гипотезы независимого деления.

центральности, значение χ^2 максимально для наибольшей центральности, а наклоны незначительно отличаются для разных центральностей.

Рассмотрим характеристики фрактальных и нефрактальных AMPT AuAu-событий всех классов центральности, выделенных SePaC-методом с использованием гипотезы независимого деления.

На рис. 9а–9в приведены распределения по p_t и в $\{p_t, p_{t,max}\}$ плоскости для фрактальных и нефрактальных событий. Распределение по размерности D_F для фрактальных событий показано на рис. 9г. Полученные результаты показывают, что SePaC-метод с использованием гипотезы независимого деления позволяет выделить фрактальные со-

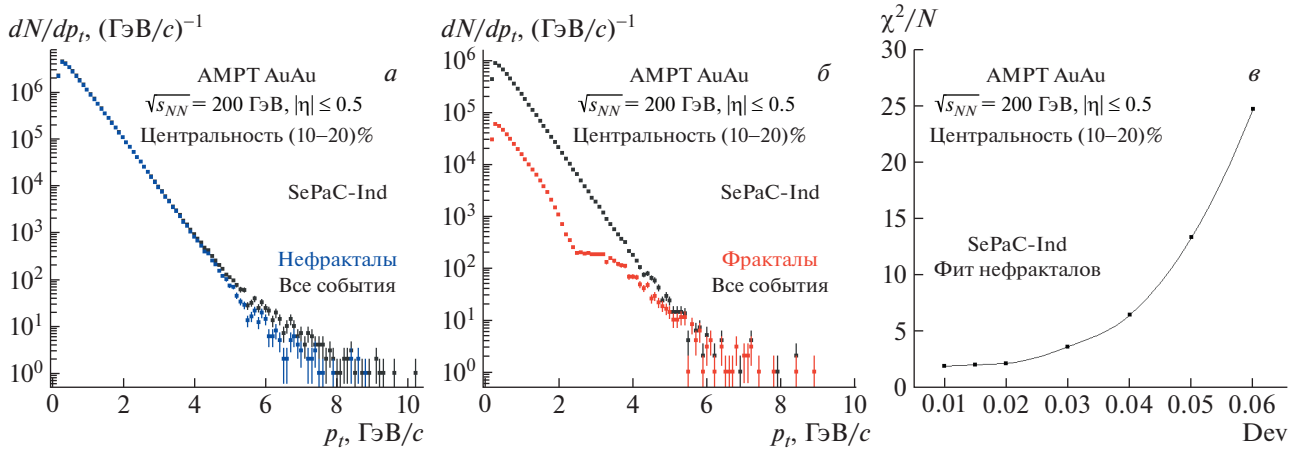


Рис. 8. Распределение по поперечному импульсу p_t для фрактальных (*a*) и нефрактальных (*b*) AMPT AuAu-событий с центральностью (10–20)%, выделенных с использованием гипотезы независимого деления. Зависимость χ^2 экспоненциального фита от параметра метода Dev для нефрактальных AMPT AuAu-событий с центральностью (10–20)% (*в*).

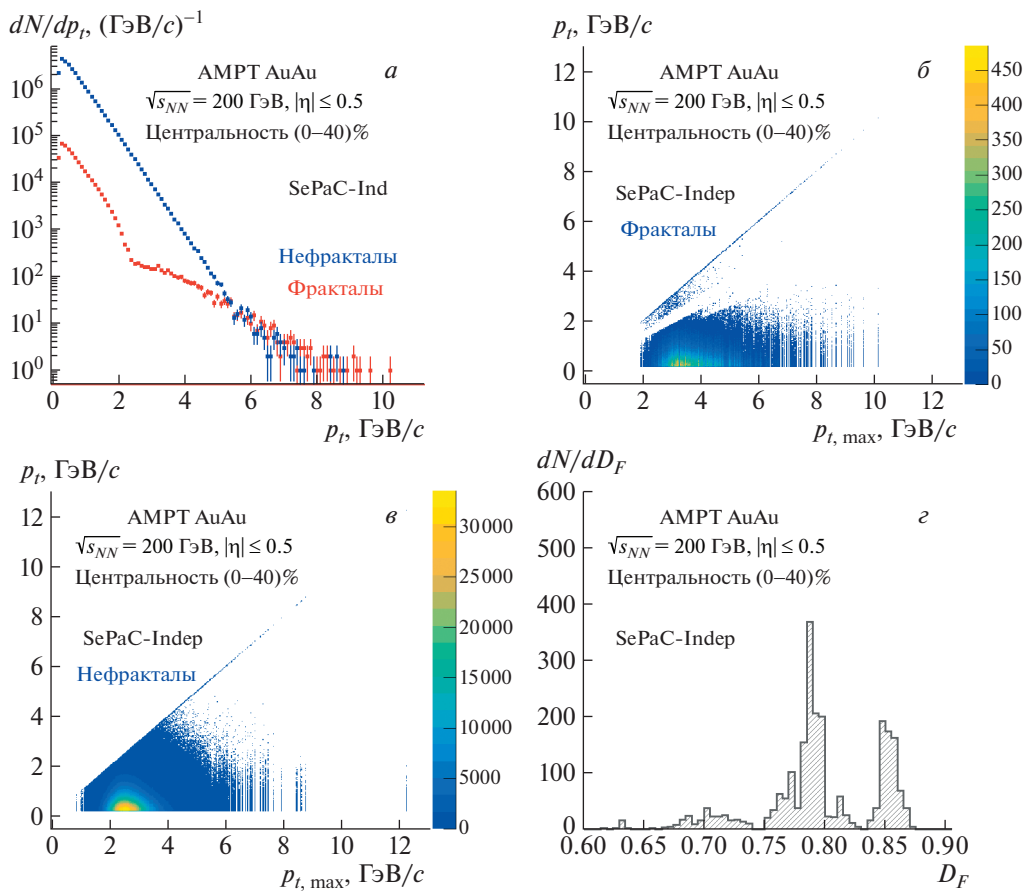


Рис. 9. Характеристики фрактальных и нефрактальных AMPT AuAu-событий всех классов центральности, выделенных SePaC-методом с использованием гипотезы независимого деления. Распределение по p_t для фрактальных и нефрактальных событий (*a*), распределение в $\{p_t, p_{t,max}\}$ плоскости для фрактальных (*b*) и нефрактальных (*в*) событий, распределение по D_F для фрактальных событий (*г*).

Таблица 2. Результаты аппроксимации p_t -спектра экспоненциальной зависимостью в диапазоне $p_t = 1.2\text{--}6.2$ ГэВ/с для нефрактальных АМРТ AuAu-событий, реконструируемых с использованием гипотезы независимого деления

Центральность, %	Dev	χ^2/N	Наклон
0–5	0.02	7.9	-2.33 ± 0.01
5–10	0.02	2.5	-2.38 ± 0.01
10–20	0.02	2.1	-2.38 ± 0.01
20–30	0.03	1.8	-2.36 ± 0.01
30–40	0.03	1.8	-2.35 ± 0.01

бытия, имеющие многорежимный спектр по p_t (рис. 9а). Такое поведение p_t -спектра отражается в двумерном распределении $\{p_t, p_{t,\max}\}$ (рис. 9б). Во фрактальных событиях, в отличие от нефрактальных (рис. 9в), явно выделяется группа лидирующих частиц, в том числе в событиях, имеющих малые значения максимального поперечного импульса частиц. Распределение по размерности D_F имеет несколько пиков (рис. 9г).

Таким образом, фрактальные и нефрактальные события, выделенные с использованием гипотезы независимого деления, имеют существенные различия в распределении по p_t , размерности D_F и на плоскости $\{p_t, p_{t,\max}\}$. Установлена зависимость размерности АМРТ AuAu-событий от центральности.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты анализа фрактальных, Монте-Карло АМРТ AuAu и случайных событий, проведенного SePaC-методом. Показаны различия в поведении зависимостей $\text{Prtn}(P_{\text{Max}})$ для исследуемых наборов данных, и найдено оптимальное значение параметра метода $\text{Dev} = 0.05$. Отмечается зависимость доли событий Prtn , восстанавливаемых как фракталы, от центральности и множественности в AuAu и случайных событиях соответственно. Установлено, что зависимости размерности D_F от параметра P_{Max} для АМРТ AuAu и случайных событий имеют разные формы. Наблюдается незначительное изменение формы распределения по D_F для разных классов центральности и множественности АМРТ AuAu-событий, в отличие от случайных. Показано, что фрактальные АМРТ AuAu-события разделяются на два типа. Первый имеет большую размерность и восстанавливается при использовании гипотезы независимого деления с

максимальным основанием $P_{\text{Max}} = 10$. Второй имеет меньшую размерность и выделяется при использовании гипотезы зависимого деления с $P_{\text{Max}} > 10$. Найдено, что фрактальные и нефрактальные события, выделенные с использованием гипотезы независимого деления, имеют существенные различия в распределениях по размерности D_F , на плоскости $\{p_t, p_{t,\max}\}$ и в p_t -спектре. Для всех классов центральности фрактальные события имеют несколько режимов поведения в спектре поперечных импульсов p_t , а нефрактальные — демонстрируют экспоненциальный закон поведения. Наблюдается зависимость размерности АМРТ AuAu-событий от центральности.

Авторы выражают благодарность А.О. Кечеча-ну за полезные и плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Akkermans, G. V. Dunne, and A. Teplyaev, Phys. Rev. Lett. **105**, 230407 (2010).
2. D. G. Moore and V. H. Satheeshkumar, Phys. Rev. D **90**, 024075 (2014).
3. P. V. Buividovich, T. Kalaydzhyan, and M. I. Polikarpov, Phys. Rev. D **86**, 074511 (2012).
4. M. K. Ghosh, P. K. Haldar, S. K. Manna, A. Mukhopadhyay, and G. Singh, DAE Symp. Nucl. Phys. **54**, 590 (2009).
5. A. Deppman, Phys. Rev. D **93**, 054001 (2016).
6. N. G. Antoniou, N. Davis, and F. K. Diakonou, Phys. Rev. C **93**, 014908 (2016).
7. I. Zh. Bunzarov, N. Y. Chankova-Bunzarova, and O. V. Rogachevsky, Phys. Part. Nucl. Lett. **11**, 404 (2014).
8. J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **45**, 4077 (1992).
9. Z.-W. Lin and C. M. Ko, Phys. Rev. C **65**, 034904 (2002).
10. Z.-W. Lin, C. M. Ko, B.-A. Li, B. Zhang, and S. Pal, Phys. Rev. C **72**, 064901 (2005).
11. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **10**, 481 (2013).
12. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **10**, 491 (2013).
13. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **13**, 169 (2016).
14. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **9**, 552 (2012).
15. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **13**, 178 (2016).
16. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **14**, 865 (2017).
17. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **16**, 240 (2019).
18. T. G. Dedovich and M. V. Tokarev, Phys. Part. Nucl. Lett. **18**, 93 (2021).
19. F. Hausdorff, Math. Ann. **79**, 157 (1918).

FRACTAL ANALYSIS OF MONTE-CARLO AuAu EVENTS AT ENERGY $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV

T. G. Dedovich^{1),2)}, M. V. Tokarev^{1),2)}

¹⁾Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 141980, Russia

²⁾Dubna State University, Dubna, 141980, Russia

Results of fractal analysis of AuAu events at the energy of $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV/ c by the method of the equation systems of P-basic coverings (SePaC) are presented. A Multi-Phase Transport (AMPT) model to generate events in relativistic heavy ion collisions was used. In Event-by-Event analysis a distribution on the transverse momentum p_t of negatively charged particles produced in the pseudo-rapidity interval $|\eta| < 0.5$ in the events with different centrality from (0–5)% to (30–40)% was studied. Comparison of the Monte Carlo fractals, random events and AMPT AuAu events was performed. The optimal values of the parameters for the analysis of AMPT AuAu events are found. The dependence of the portion Prtn of events reconstructed as fractals on centrality and multiplicity in AuAu and random events, respectively, is noted. Insignificant differences in the behavior of distributions with respect to the dimension D_F for different centrality classes are established. In AMPT AuAu events, two classes were extracted, which differ in the shape of the transverse momentum spectra.