

## СВЯЗАННЫЕ И РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДРА ${}^9\text{Li}$ С $NN$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ Daejeon16

© 2023 г. И. А. Мазур<sup>1),2)\*</sup>, А. И. Мазур<sup>3)</sup>, В. А. Куликов<sup>3)</sup>,  
А. М. Широков<sup>3)</sup>, И. Дж. Шин<sup>4)</sup>, Я. Ким<sup>4)</sup>, П. Марис<sup>5)</sup>, Дж. П. Вэри<sup>5)</sup>

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.; после доработки 21.09.2022 г.; принята к публикации 21.09.2022 г.

Представлены результаты для энергий связанных состояний и асимптотических нормировочных коэффициентов в них, а также для энергий и ширин резонансов ядра  ${}^9\text{Li}$ , полученные в методе SS-HORSE на основе расчетов *ab initio* в модели оболочек без инертного кора с нуклон-нуклонным взаимодействием Daejeon16.

DOI: 10.31857/S0044002723010348, EDN: RFFGRR

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, свойства ядра  ${}^9\text{Li}$  играют важную роль в понимании астрофизических процессов. Характеристики резонансных состояний этого ядра, проявляющихся в реакции  $n + {}^8\text{Li}$ , определяют сечение реакции быстрого радиационного захвата  ${}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}$  и в конечном счете определяют отношение двух конкурирующих цепочек синтеза элементов с  $A > 8$ , которые могут происходить после коллапса сверхновой типа II, а именно  ${}^7\text{Li}(n, \gamma){}^8\text{Li}(\alpha, n){}^{11}\text{B}(n, \gamma){}^{12}\text{B}(\beta^+){}^{12}\text{C}$  и  ${}^7\text{Li}(n, \gamma){}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}(\alpha, n){}^{12}\text{B}(\beta^+){}^{12}\text{C}$  [1]. Преодолеть “щель”  $A = 8$  в нуклеосинтезе возможно также посредством цепочки реакций  ${}^4\text{He}(2n, \gamma){}^6\text{He}(2n, \gamma){}^8\text{He}(\beta^-){}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}(\beta^-){}^9\text{Be}$  [2, 3], в которой опять же ключевую роль играют резонансные состояния ядра  ${}^9\text{Li}$ .

К сожалению, в настоящее время экспериментальная информация о спектре этого ядра достаточно скудна. Из эксперимента известны энергии основного  $J^\pi = 3/2^-$  и первого возбужденного связанного  $1/2^-$  состояний [4]. Анализ угловых распределений в рамках борновского приближения с искаженными волнами реакций  ${}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}$

[5] и  ${}^8\text{Li}(d, p){}^9\text{Li}$  [6] позволил извлечь асимптотические нормировочные коэффициенты (АНК) для основного [5, 6] и первого возбужденного [5] состояний. Значения АНК для основного состояния, представленные в работах [5, 6], практически одинаковы и несколько больше значения, полученного в работе [1] на основе анализа реакции  ${}^9\text{Be}({}^8\text{Li}, {}^9\text{Li}){}^8\text{Be}$ .

Что касается резонансных состояний, то в интервале энергий возбуждения до 10 МэВ из эксперимента известны лишь энергии трех резонансных уровней. Нижайший резонанс предположительно имеет  $J^\pi = 5/2^-$ , спин-четности остальных двух резонансов экспериментально не определены [4].

Таким образом, теоретическое исследование свойств связанных и резонансных состояний ядра  ${}^9\text{Li}$  является актуальной задачей.

Влияние резонансных состояний ядра  ${}^9\text{Li}$  на сечение и скорость реакции быстрого радиационного захвата  ${}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}$  исследовалось в различных подходах. Так, в работах [7, 8] анализ проводился на основе комбинации модели оболочек для описания спектров ядер  ${}^8\text{Li}$ ,  ${}^9\text{Li}$  и потенциального подхода к рассеянию нейтрона на ядре  ${}^8\text{Li}$ . Несмотря на схожесть подходов, предсказанные скорости реакции в них существенно различаются. Реакции  ${}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}$  и зеркальная к ней  ${}^8\text{B}(p, \gamma){}^9\text{C}$  изучались в модели прямого захвата [9] и кластерной модели с точным учетом принципа Паули [10]. Возможность описания экспериментальных данных для сечения радиационного захвата ядром  ${}^8\text{Li}$  тепловых нейтронов при астрофизических энергиях рассмотрена в рамках модифицированной потенциальной кластерной модели [11].

<sup>1)</sup>Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия.

<sup>2)</sup>Центр экзотических ядерных исследований, Институт фундаментальных наук, Тэджон, Республика Корея.

<sup>3)</sup>Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.

<sup>4)</sup>Научный проект по редким изотопам, Институт фундаментальных наук, Тэджон, Республика Корея.

<sup>5)</sup>Университет штата Айова, Эймс, США.

\*E-mail: mazuri@mail.ru

Единственное к настоящему моменту исследование реакции  ${}^8\text{Li}(n, \gamma){}^9\text{Li}$  в подходе *ab initio* реализовано в работе [12]. Энергии связанных и характеристики резонансных состояний ядра  ${}^9\text{Li}$ , а также сечение реакции в этой работе рассчитаны в рамках модели оболочек без инертного кора с континуумом (no-core shell model with continuum, NCSMC) с реалистическим киральным нуклон-нуклонным взаимодействием и с учетом трехчастичных сил. Результаты расчетов воспроизводят энергии связанных состояний и характеристики нижайшего резонанса  $5/2^-$ . Основываясь на результатах этой работы, можно заключить, что экспериментально наблюдаемый резонанс при энергии 5.38 МэВ имеет спин-четность  $J^\pi = 3/2^-$ , а очень узкий резонанс при энергии 6.43 МэВ —  $J^\pi = 7/2^-$ .

Исследование *ab initio* состояний ядра  ${}^9\text{Li}$  кроме работы [12] проводилось также в рамках метода Монте-Карло для функций Грина (Green's function Monte Carlo) [13] и в модели оболочек без инертного кора (МОБИК; в англоязычной литературе — no-core shell model, NCSM) [14]. В этих подходах, ориентированных на исследование связанных состояний, в отличие от [12] не учитывалась связь с континуумом и, следовательно, не могло быть сделано никаких заключений о ширинах резонансных состояний и не рассматривались АНК.

В настоящей работе поставлена цель исследовать характеристики связанных и резонансных состояний  ${}^9\text{Li}$  на основе расчетов *ab initio* в МОБИК [15] с реалистическим нуклон-нуклонным взаимодействием Daejeon16 [16] с учетом континуума в рамках метода SS-HORSE [17]. Отметим, что  $NN$ -взаимодействие Daejeon16 обеспечивает хорошее описание легких ядер без использования трехнуклонных сил. Мы получаем не только энергии состояний, но также даем оценку АНК для связанных состояний и рассчитываем ширины нижайших резонансных состояний  ${}^9\text{Li}$ .

Метод SS-HORSE разрабатывался и применялся в комбинации с МОБИК для описания резонансов в различных ядерных системах [17–22]. В дальнейшем этот подход мы применили и к описанию связанных состояний, рассматривая их как закрытые каналы [23].

МОБИК является одним из надежных методов получения энергий состояний многонуклонных систем. В этом подходе гамильтониан, описывающий ядро как систему  $A$  нуклонов, взаимодействующих посредством реалистических нуклон-нуклонных и, если требуется, трехнуклонных сил, раскладывается по многочастичному осцилляторному базису. Этот базис имеет параметр  $\hbar\Omega$ , который является разностью уровней энергии гармонического осциллятора. В реальных расчетах используется лишь

конечная часть этого базиса, который обрезается по некоторому числу многочастичных осцилляторных квантов возбуждения  $N_{\max}$ . С ростом  $N_{\max}$  размер базиса растет экспоненциально. На данный момент существует целый ряд методов, позволяющий осуществлять экстраполяции на бесконечный базис  $N_{\max} \rightarrow \infty$  результатов для связанных состояний, полученных в МОБИК [24–41]. Метод SS-HORSE в применении к связанным состояниям также позволяет осуществить экстраполяцию результатов на случай бесконечного базиса, в основе которой лежат аналитические свойства  $S$ -матрицы и расчет ее полюсов. SS-HORSE-экстраполяция, следовательно, является теоретически обоснованной [23], в отличие от других разработанных методов экстраполяций [24–41], основанных на феноменологических соображениях. Кроме того, метод SS-HORSE позволяет найти АНК, используя их связь с вычетами в полюсах  $S$ -матрицы. В применении же к резонансным состояниям расчет полюсов  $S$ -матрицы методом SS-HORSE позволяет получить энергии и ширины резонансов.

## 2. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Метод SS-HORSE, основанный на формализме HORSE (Harmonic Oscillator Representation of Scattering Equations) [42], позволяет рассчитать  $E_b$  — экстраполированные на случай бесконечного базиса энергии связанных состояний, полученные в МОБИК, и АНК  $|A_\ell|$  в этих состояниях путем численного определения положения полюсов  $S$ -матрицы и вычетов в них.

$S$ -матрица в SS-HORSE рассчитывается при дискретных энергиях  $E_i$ , которые являются собственными энергиями относительного движения нейтрона и ядра  ${}^8\text{Li}$  [17]:

$$S(E_i) = \frac{C_{N^i+2,\ell}^{(-)}(E_i)}{C_{N^i+2,\ell}^{(+)}(E_i)}. \quad (1)$$

Аналитический вид функций  $C_{nl}^{(\pm)} = C_{nl} \pm iS_{nl}$  известен (см., например, работы [42–44]). Каждая из собственных энергий  $E_i$  относительного движения нейтрона и ядра  ${}^8\text{Li}$  определяется на основе расчетов в МОБИК ядер  ${}^9\text{Li}$  и  ${}^8\text{Li}$  с числом осцилляторных квантов возбуждения  $N_{\max}^i$  и осцилляторным параметром  $\hbar\Omega^i$ :

$$E_i \equiv E(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i) = E^{9\text{Li}}(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i) - E^{8\text{Li}}(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i), \quad (2)$$

а  $N^i = N_{\max}^i + N_{\min}^i$  в выражении (1) — полное число осцилляторных квантов в расчете ядра  ${}^9\text{Li}$ .

Расчеты проводятся с набором значений параметров  $\{N_{\max}^i, \hbar\Omega^i\}$ , в результате мы получаем набор значений  $S$ -матрицы в некотором интервале энергий  $E$ . Отметим, что энергии относительного движения (2) по построению отсчитаны от порога  $n + {}^8\text{Li}$ , и далее мы везде приводим энергии, отсчитанные от этого порога, если иной отсчет энергий не оговорен в тексте (например, в случае энергий возбуждения они отсчитываются от основного состояния ядра).

Далее эти значения  $S$ -матрицы аппроксимируются непрерывными функциями энергии  $E$ , которые учитывают ее аналитические свойства. На основе опыта работы с модельными задачами [23] для связанных состояний мы будем использовать следующие параметризации:

$$S(E) = -e^{w_0\sqrt{|E|}+w_1(\sqrt{|E|})^3} \frac{\sqrt{|E|} + \sqrt{|E_b|}}{\sqrt{|E|} - \sqrt{|E_b|}}, \quad (3)$$

$$S(E) = e^{w_0\sqrt{|E|}} \times \frac{\sqrt{|E|} + \sqrt{|E_b|}}{\sqrt{|E|} - \sqrt{|E_b|}} \frac{\sqrt{|E|} - \sqrt{|E_v|}}{\sqrt{|E|} + \sqrt{|E_v|}}, \quad (4)$$

$$S(E) = \frac{D}{\sqrt{|E|} - \sqrt{|E_b|}} + B. \quad (5)$$

В перечисленных вариантах параметризаций искомая энергия связанного состояния  $E_b$ , а также энергия виртуального состояния  $E_v$  и константы  $B$ ,  $D$ ,  $w_0$  и  $w_1$  являются подгоночными параметрами.

В первую очередь рассмотрим основное состояние  $3/2_1^-$ . На рис. 1 показаны энергии относительного движения, полученные из результатов МОБИК для основных состояний ядер  ${}^8\text{Li}$  и  ${}^9\text{Li}$  по формуле (2). Видна следующая особенность: для энергий, полученных с  $\hbar\Omega \leq 20$  МэВ в модельных пространствах, начиная с  $N_{\max} = 10$ , энергии  $E$  растут с увеличением  $N_{\max}$ . Такое поведение в принципе возможно, так как для энергий, рассчитанных по формуле (2), не обязан соблюдаться вариационный принцип. Но в этом случае метод SS-HORSE неприменим. Поэтому мы исключили из дальнейшего рассмотрения энергии, полученные с  $\hbar\Omega \leq 22.5$  МэВ. При  $\hbar\Omega \geq 23$  МэВ поведение энергий в зависимости от  $N_{\max}$  вплоть до  $N_{\max} = 12$  становится подходящим для применения метода SS-HORSE. В анализе первого возбужденного и резонансных состояний, кроме того, используются результаты расчетов с  $N_{\max} = 14$  в пределах от 12.5 до 20 МэВ.

В рамках SS-HORSE мы определили энергии  $E_b$ , соответствующие полюсам  $S$ -матрицы, используя параметризации (3), (4) и (5). Для поиска  $E_b$  достаточно знать три значения энергии,

полученные при различных  $N_{\max}$  и/или  $\hbar\Omega$ . Опыт работы с модельными задачами [23] показал, что лучше всего выбрать энергии  $E$  в трех соседних по  $\hbar\Omega$  точках одного модельного пространства  $N_{\max}$ . Результаты подобной экстраполяции с разными вариантами параметризации для  $N_{\max} = 10$  и 12 представлены на рис. 2а.

Как видно, результаты экстраполяции SS-HORSE энергии зависят от  $\hbar\Omega$  (на рисунке каждая точка отображена со средним значением  $\hbar\Omega$  точек, взятых для экстраполяции). Но в области  $25 \leq \hbar\Omega \leq 32.5$  МэВ эта зависимость достаточно слабая, и, что важно, результаты, полученные с различными параметризациями, близки друг к другу. Кроме того, кривые, рассчитанные в модельных пространствах  $N_{\max} = 10$  и 12, тоже близки друг к другу, что свидетельствует о хорошей сходимости результатов.

Кривая с косыми крестиками на рис. 2а представляет разность результатов экспоненциальной экстраполяции для энергий основного состояния ядра  ${}^9\text{Li}$  и  ${}^8\text{Li}$ :

$$E_{\infty}(\hbar\Omega) = E_{\infty}^{9\text{Li}}(\hbar\Omega) - E_{\infty}^{8\text{Li}}(\hbar\Omega), \quad (6)$$

где  $E_{\infty}^{A\text{Li}}(\hbar\Omega)$  определяется на основе экстраполяции В [25] при данном  $\hbar\Omega^i$  по трем модельным пространствам  $N_{\max}$ ,  $N_{\max} - 2$ ,  $N_{\max} - 4$ :

$$E^{A\text{Li}}(N_{\max}, \hbar\Omega^i) = E_{\infty}^{A\text{Li}}(\hbar\Omega^i) + a_i e^{-b_i N_{\max}}, \quad (7)$$

где для каждого значения  $\hbar\Omega^i$  мы используем  $N_{\max} = 12$ . Отметим, что экстраполяция В является стандартным методом уточнения результатов МОБИК. Если использовать оптимальные значения  $\hbar\Omega$  [25] для оценки энергий основных состояний  ${}^8\text{Li}$  и  ${}^9\text{Li}$ , то получим для  $N_{\max} = 12$  (в скобках указана оценка погрешности экстраполяции):  $E_{\infty}^{8\text{Li}} = -41.33(6)$  МэВ и  $E_{\infty}^{9\text{Li}} = -44.93(5)$  МэВ. Сравнение с соответствующими экспериментальными значениями  $E_{\text{exp}}^{8\text{Li}} = -41.278$  МэВ и  $E_{\text{exp}}^{9\text{Li}} = -45.342$  МэВ [4] подтверждает высокую точность реалистического  $NN$ -взаимодействия Daejeon16 в описании легких ядер.

На рис. 2б представлены соответствующие АНК, которые могут быть определены из вычета  $S$ -матрицы как функции волнового числа  $S(k)$  в полюсе  $k_b$ , соответствующем связанному состоянию [45]:

$$|A_{\ell}| = \sqrt{|\text{Res}[S(k), k_b]|}. \quad (8)$$

Здесь  $k = i \frac{\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar}$ ,  $k_b = i \frac{\sqrt{2\mu|E_b|}}{\hbar}$  — положение полюса  $S$ -матрицы, отвечающее связанному

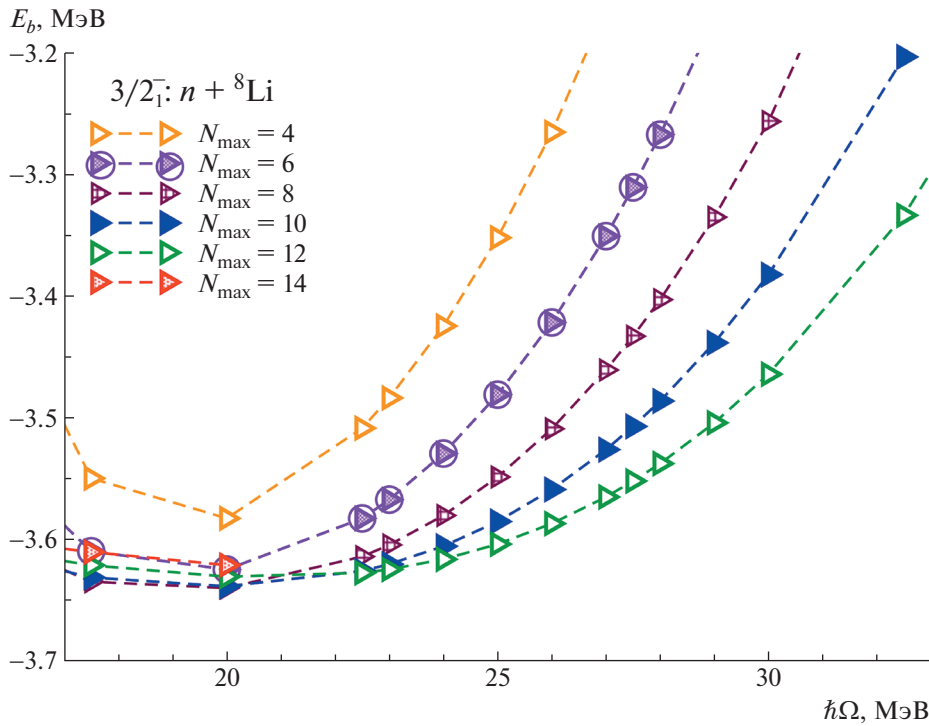


Рис. 1. Энергии относительного движения нейтрона и  ${}^8\text{Li}$ , полученные на основе расчетов в МОБИК в различных модельных пространствах.

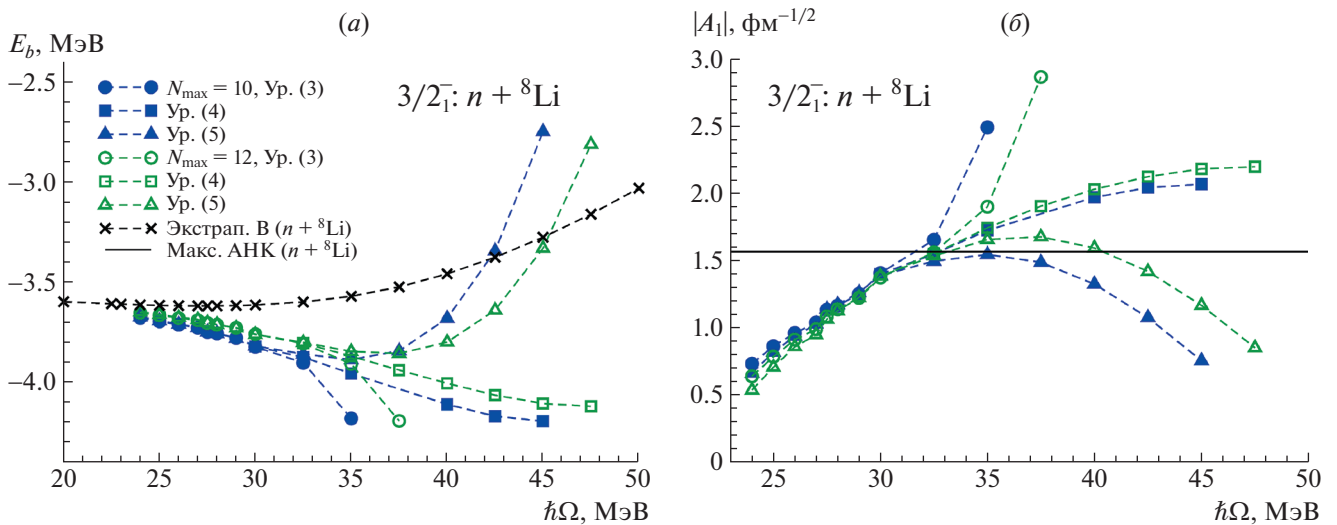


Рис. 2. Экстраполяция SS-HORSE в канале  $n + {}^8\text{Li}$  для основного состояния ядра  ${}^9\text{Li}$ . *a* — Энергии  $E_b$ , полученные на основе параметризаций (3)–(5) в модельных пространствах  $N_{\text{max}} = 10, 12$ . Кривая с косыми крестиками — результаты экстраполяции В [25]. *б* — Соответствующие АНК. Горизонтальная линия соответствует  $|A_\ell|_{\text{max}}$ .

состоянию,  $\mu$  — приведенная масса системы  $n + {}^8\text{Li}$ . Выражение для вычета  $S$ -матрицы в полюсе  $k_b$  легко получить для каждой из формул (3)–(5).

канале  $n + {}^8\text{Li}$ . Его можно оценить по формуле [45]

$$|A_\ell| \leq |A_\ell|_{\text{max}} = \kappa e^{\kappa R} \sqrt{\frac{2R}{\kappa R + 2}}. \quad (9)$$

Горизонтальной линией на правой панели рисунка показано максимальное значение АНК в

Здесь  $R$  — радиус взаимодействия, а величина  $\kappa$  определяется энергией связи. Для оценки  $\kappa =$

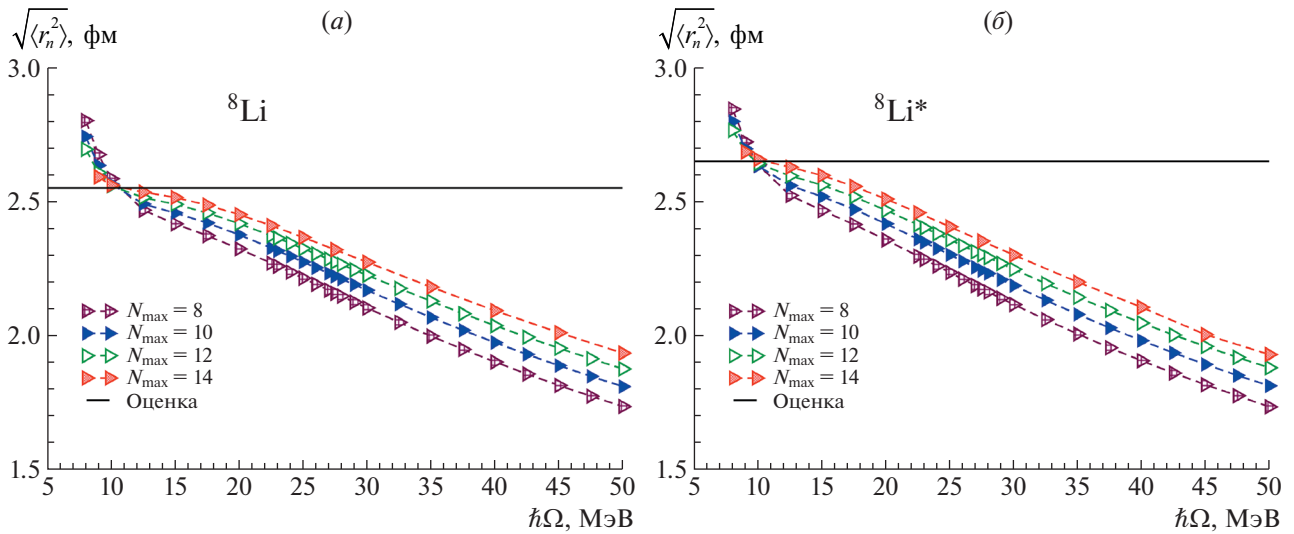


Рис. 3. Результаты расчета в МОБИК средневзвешенного радиуса распределения точечных нейтронов  $\mathfrak{R} = \sqrt{\langle r_n^2 \rangle}$  в основном (а) и возбужденном  $1^+$  (б) состояниях ядра  ${}^8\text{Li}$ .

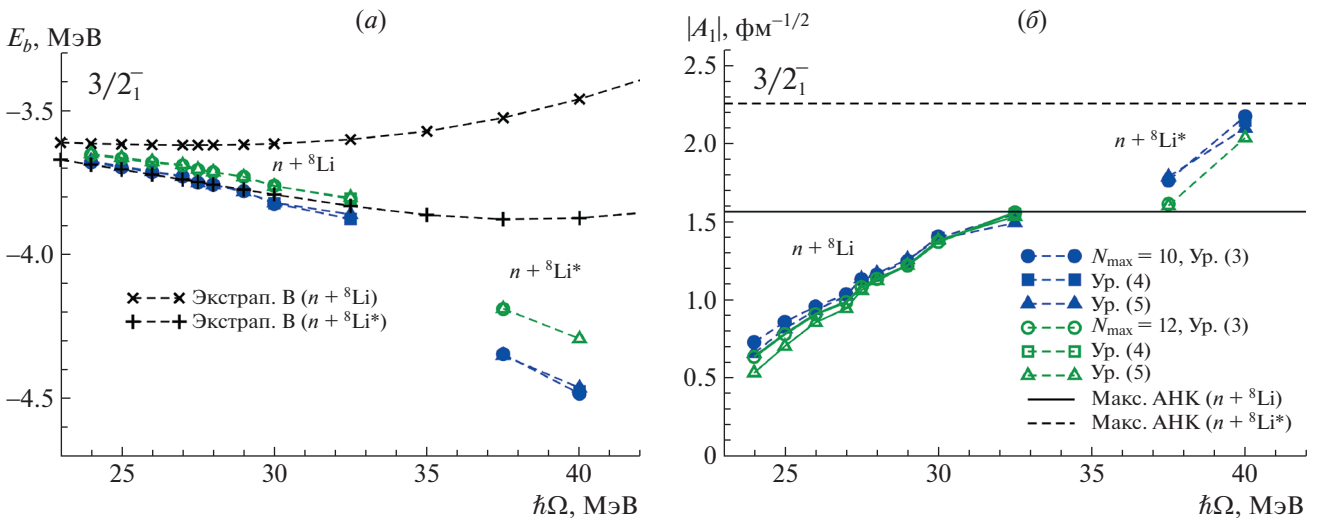


Рис. 4. Экстраполяция SS-HORSE для основного состояния ядра  ${}^9\text{Li}$  в каналах  $n + {}^8\text{Li}$  и  $n + {}^8\text{Li}^*$ . Обозначения аналогичны рис. 2. Кривая с косыми (прямыми) крестиками — результаты экстраполяции В энергии основного состояния ядра  ${}^9\text{Li}$  в канале  $n + {}^8\text{Li}$  ( $n + {}^8\text{Li}^*$ ). Сплошная (штриховая) кривая на нижней панели соответствует значению  $|A_\ell|_{\max}$  в канале  $n + {}^8\text{Li}$  ( $n + {}^8\text{Li}^*$ ).

$= \frac{\sqrt{2\mu |E_{\text{Extr.}B}|}}{\hbar}$  мы используем разность энергий основных состояний ядер  ${}^9\text{Li}$  и  ${}^8\text{Li}$ , рассчитанных методом экспоненциальной экстраполяции (6), (7).

Для оценки радиуса взаимодействия  $R$  нейтрона с ядром  ${}^8\text{Li}$  мы, учитывая, что  ${}^8\text{Li}$  является нейтронно-избыточным ядром, используем радиус распределения нейтронной материи в  ${}^8\text{Li}$ . Для этого мы сначала рассчитываем средневзвешенный радиус  $\mathfrak{R} = \sqrt{\langle r_n^2 \rangle}$  распределения нейтронов в  ${}^8\text{Li}$ , считая их точечными частицами. Значение  $\mathfrak{R}$ , полученное в расчетах  ${}^8\text{Li}$ , сильно зависит от

параметров МОБИК  $N_{\max}$  и  $\hbar\Omega$ , однако, как видно из рис. 3, кривые, описывающие зависимость  $\mathfrak{R}$  от  $\hbar\Omega$ , полученные с разными  $N_{\max}$ , пересекаются приблизительно в одной точке. Как было показано в работах [46, 16], значение  $\mathfrak{R}$ , соответствующее этой точке пересечения, представляет собой экстраполированное значение этой величины на случай бесконечного базиса. Радиус распределения нейтронной материи в ядре  $\sqrt{\langle r_{nm}^2 \rangle}$  и, соответственно, радиус взаимодействия нейтрона с ядром  $R$ , учитывающий неточность нуклонов, определяется выражением (см. работу [47], где

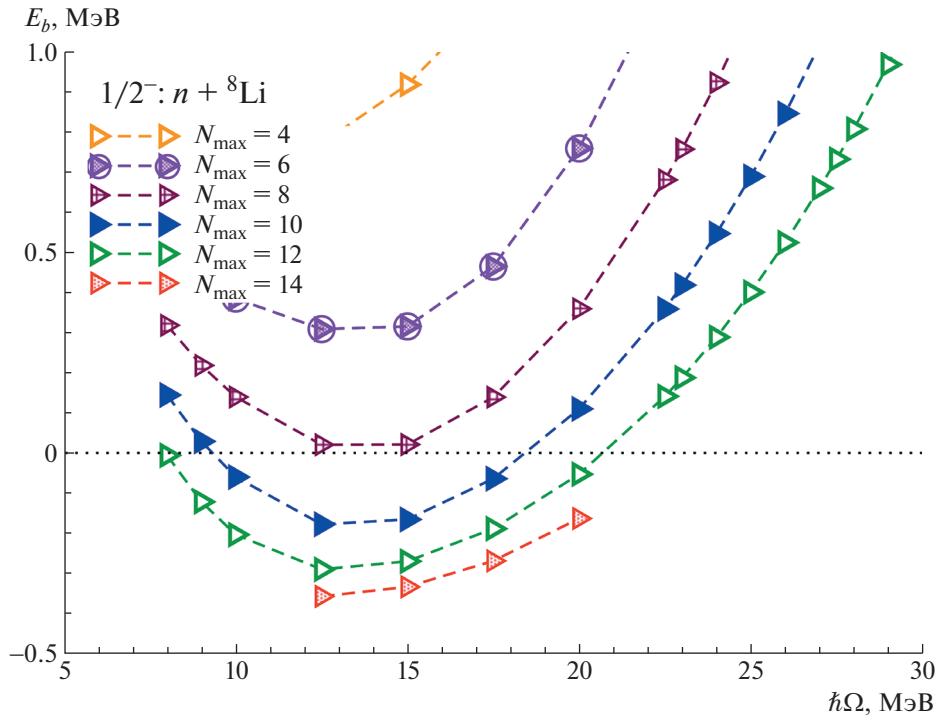


Рис. 5. Энергии относительного движения нейтрона и ядра  ${}^8\text{Li}$  в первом возбужденном состоянии  $1/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$ , полученные на основе расчетов в МОБИК в различных модельных пространствах.

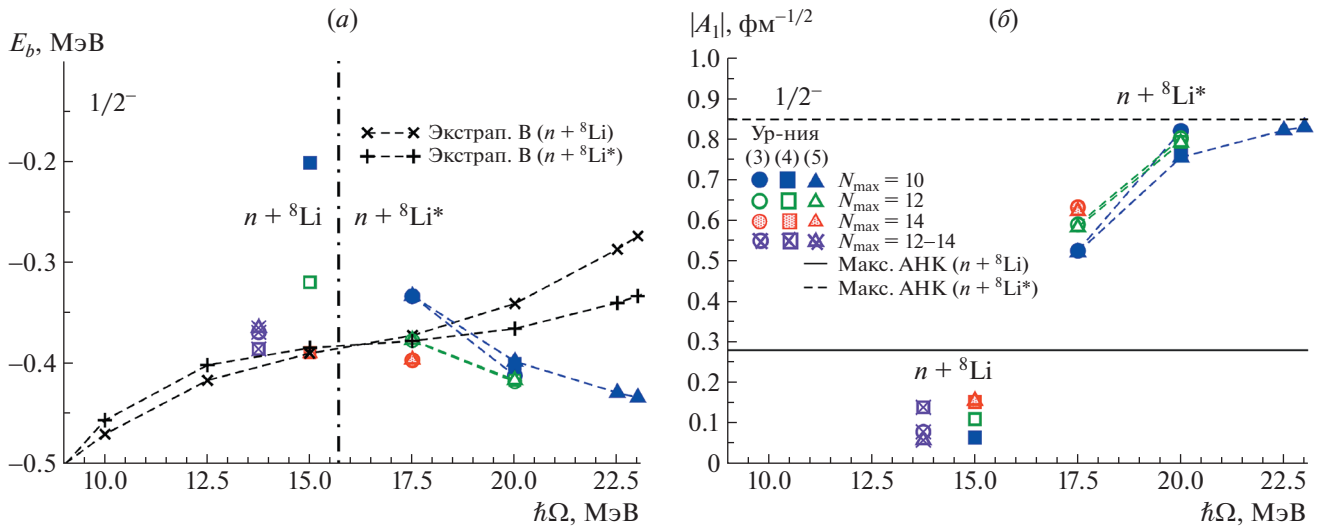


Рис. 6. Экстраполяция SS-HORSE для возбужденного состояния  $1/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$  в каналах  $n + {}^8\text{Li}$  и  $n + {}^8\text{Li}^*$ . Обозначения аналогичны рис. 2. Дополнительные символы, обозначенные в легенде  $N_{\text{max}} = 12-14$ , соответствуют расчетам с  $N_{\text{max}} = 12$ ,  $\hbar\Omega = 12.5$  МэВ и с  $N_{\text{max}} = 14$ ,  $\hbar\Omega = 12.5$  МэВ и 15 МэВ. Вертикальная штрихпунктирная кривая на левой панели разделяет результаты, полученные в каналах  $n + {}^8\text{Li}$  и  $n + {}^8\text{Li}^*$ .

приводится аналогичное выражение для радиуса распределения заряда)

$$R^2 = \langle r_{nm}^2 \rangle = \langle r_n^2 \rangle + \langle R_n^2 \rangle + \langle R_p^2 \rangle \frac{Z}{N}, \quad (10)$$

где  $\sqrt{\langle R_p^2 \rangle} = 0.851$  фм и  $\sqrt{\langle R_n^2 \rangle} = 0.864$  фм —

соответственно радиусы протона и нейтрона [48], а  $Z = 3$  и  $N = 5$  — соответственно числа протонов и нейтронов в ядре  ${}^8\text{Li}$ .

В дальнейшем мы будем отбрасывать расчеты, которые не удовлетворяют условию  $|A_\ell| \leq |A_\ell|_{\text{max}}$ . Кроме того, в варианте параметризации (4) мы не

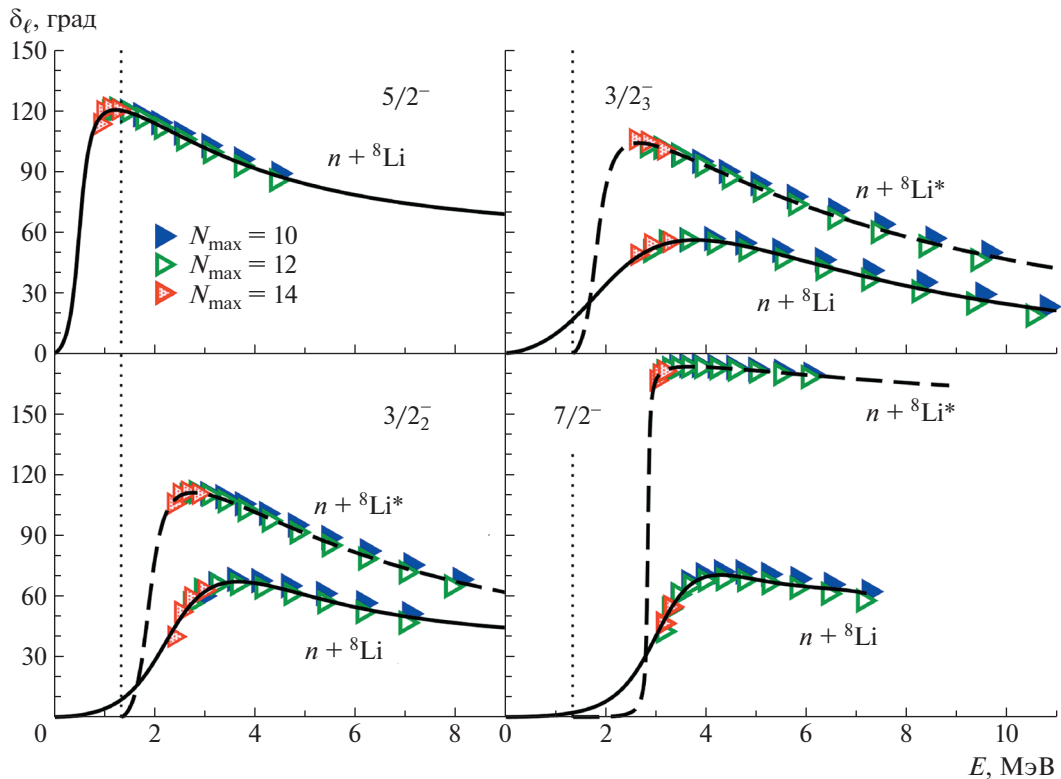


Рис. 7. Сдвиги фаз рассеяния в разных состояниях в каналах  $n + {}^8\text{Li}$  и  $n + {}^8\text{Li}^*$ . Вертикальная точечная линия отмечает порог канала  $n + {}^8\text{Li}^*$ .

будем использовать результаты с  $\hbar\Omega \geq 30$  МэВ, так как в этой области велико влияние виртуального полюса.

Результаты экстраполяции SS-HORSE энергий основного состояния и соответствующие АНК для отобранных данных представлены на рис. 4.

Как отмечалось выше, результаты экстраполяции энергий основного состояния в SS-HORSE с различными параметризациями  $S$ -матрицы (формулы (3)–(5)) имеют слабую зависимость от  $\hbar\Omega$  и находятся в разумном согласии с результатами экстраполяции В в области  $22.5 \leq \hbar\Omega \leq 32.5$  МэВ. Вместе с тем АНК сильно зависят от  $\hbar\Omega$ . Довольно резкая зависимость  $A_1(\hbar\Omega)$  приводит к большой погрешности. В качестве оценки последней, как для энергий, так и для АНК, мы брали разброс полученных результатов в отобранном для расчетов диапазоне  $\hbar\Omega$ . Средние значения энергий и АНК в соответствующих диапазонах  $\hbar\Omega$  представлены в табл. 1 как результаты для данного канала. Оценки погрешностей приведены в круглых скобках.

Отметим, что результаты как для  $E_b$ , так и для  $|A_1|$ , полученные в пространствах  $N_{\max} = 10$  и 12, практически совпадают, что говорит о достигнутой сходимости результатов.

На рис. 4 также приведены результаты экстраполяции SS-HORSE энергий основного состояния

и соответствующие АНК, полученные в закрытом канале упругого рассеяния нейтрона на ядре  ${}^8\text{Li}^*(1^+)$  в возбужденном состоянии  $1^+$ . В этом случае используются результаты МОБИК в интервале  $35 \leq \hbar\Omega \leq 42.5$  МэВ в силу того, что при меньших значениях  $\hbar\Omega$  собственные энергии относительного движения (2) растут (убывают по абсолютной величине) с ростом  $N_{\max}$ , т.е. нарушаются условия применимости SS-HORSE. Верхний предел по  $\hbar\Omega$  для канала  $n + {}^8\text{Li}^*$  выбран, как и прежде, из условия  $|A_\ell| \leq |A_\ell|_{\max}$  (на рис. 4 результаты экспоненциальной экстраполяции (6), (7) для энергии в этом канале представлены кривой с прямыми крестиками, а максимальное значение  $|A_\ell|_{\max}$  — штриховой линией). Как следствие того, что интервал  $\hbar\Omega$ , в котором находятся отобранные значения, более узкий, число отобранных данных и число полученных результатов существенно меньше. Отметим, что при расчете  $S$ -матрицы в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  используются энергии относительного движения, полученные с помощью уравнения (2), где  $E^{8\text{Li}}(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i)$  заменено на  $E^{8\text{Li}^*}(N_{\max}^i, \hbar\Omega^i)$ , отсчитанные относительно порога  $n + {}^8\text{Li}^*$ , однако на рис. 4 и в табл. 1 для удобства сравнения результатов в разных каналах мы приводим энергии во всех каналах, отсчитанные

**Таблица 1.** Энергии  $E_b$  и АНК  $|A_\ell|$  связанных состояний, энергии  $E_r$  и ширины  $\Gamma$  резонансных состояний ядра  ${}^9\text{Li}$ , полученные методом SS-HORSE с взаимодействием Daejeon16 в каналах  $n + {}^8\text{Li}$  и  $n + {}^8\text{Li}^*$  с ядром  ${}^8\text{Li}$  соответственно в основном  $2^+$  или возбужденном  $1^+$ -состояниях и предсказание для энергий и ширин на основе результатов в обоих каналах в сравнении с результатами NCSMC [12] и извлеченными из эксперимента (значения  $E_b$ ,  $E_r$ ,  $\Gamma$  приведены в МэВ, а  $|A_\ell|$  — в  $\text{fm}^{-1/2}$ , энергии связи и резонансные энергии отсчитаны от порога реакции  $n + {}^8\text{Li}$ )

$J^\pi({}^9\text{Li})$	$J^\pi({}^8\text{Li})$		Настоящая работа	NCSMC	Эксперимент
$3/2_1^-$	$2^+$	$E_b$	-3.77(11)		1.12 [5]; 1.15(14) [6]; 0.96(7) [1]
		$ A_1 $	1.0(5)		
	$1^+$	$E_b$	-4.33(15)		
		$ A_1 $	1.9(3)		
	Предсказание	$E_b$	-4.1(4)	-2.81	-4.0639 [4]
$1/2^-$	$2^+$	$E_b$	-0.31(10)		0.40[5]
		$ A_1 $	0.11(5)		
	$1^+$	$E_b$	-0.38(5)		
		$ A_1 $	0.67(15)		
	Предсказание	$E_b$	-0.32(12)	-1.14	-1.373(5) [4]
$5/2^-$	$2^+$	$E_r$	0.50(5)	0.67	0.232(15)[4]
		$\Gamma$	0.37(4)	0.56	0.10(3) [4]
$3/2_2^-$	$2^+$	$E_r$	1.8(4)		
		$\Gamma$	2.9(3)		
	$1^+$	$E_r$	1.79(13)		
		$\Gamma$	0.50(20)		
	Предсказание	$E_r$	1.8(4)	1.41	
		$\Gamma$	2.9(3)	0.59	
$3/2_3^-$	$2^+$	$E_r$	2.25(22)		
		$\Gamma$	1.9(5)		
	$1^+$	$E_r$	1.88(8)		
		$\Gamma$	0.50(7)		
	Предсказание	$E_r$	2.2(3)	2.65	
		$\Gamma$	1.9(5)	2.5(4)	
$7/2^-$	$2^+$	$E_r$	3.03(4)		
		$\Gamma$	1.66(3)		
	$1^+$	$E_r$	2.838(11)		
		$\Gamma$	0.056(5)		
	Предсказание	$E_r$	2.95(12)		
		$\Gamma$	1.66(3)		



от порога  $n + {}^8\text{Li}$ , т.е. к энергиям в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  прибавляется разность пороговых энергий  $E_{\text{Tr}} = E_{\infty}^{{}^8\text{Li}^*} - E_{\infty}^{{}^8\text{Li}} = 1.34$  МэВ, полученное экстраполяцией В с оптимальными значениями  $\hbar\Omega$  расчетов в МОБИК энергий основного и возбужденного состояний  ${}^8\text{Li}$ . Экспериментальное значение энергии возбуждения состояния  $1^+$  в ядре  ${}^8\text{Li}$  и соответственно разности пороговых энергий — 0.9808 МэВ [4].

Отметим, что сходимость энергий и АНК в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  явно хуже, чем в канале рассеяния нейтрона на ядре  ${}^8\text{Li}^*$  в основном состоянии. Как следствие, в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  зависимость от  $\hbar\Omega$  энергии и АНК для основного состояния более сильная, чем в канале  $n + {}^8\text{Li}$ . В результате, несмотря на более узкий по  $\hbar\Omega$  интервал, погрешности расчетов в обоих каналах сравнимы (см. табл. 1).

Результаты экстраполяции энергии связи ядра  ${}^9\text{Li}$  в обоих каналах в идеале должны совпадать, так как  $S$ -матрица должна иметь полюсы при одной и той же энергии во всех каналах. Но в наших расчетах энергии  $E_b$  в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  отличаются от результатов, полученных в канале  $n + {}^8\text{Li}$ , примерно на 0.6 МэВ. Для оценки погрешности энергии на основе всего подхода мы использовали разброс полученных значений  $E_b$  в обоих каналах, а значение энергии в середине этого разброса мы приводим в строке “Предсказание” в табл. 1.

Энергия основного состояния  $3/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$ , полученная в наших расчетах в SS-HORSE-МОБИК с  $NN$ -взаимодействием Daejeon16, совпадает с экспериментальным значением в отличие от предсказания NCSMC [12], в соответствии с которым состояние  $3/2^-$  лежит выше и, соответственно, ближе к порогу  $n + {}^8\text{Li}$  на 1.3 МэВ.

Наши предсказания для АНК в основном состоянии в канале  $n + {}^8\text{Li}$  в пределах оцененной погрешности согласуются со значениями, полученными на основе анализа экспериментальных данных, которые приводятся в табл. 1. Оценки АНК в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  на основе эксперимента отсутствуют.

На рис. 5 представлены собственные энергии МОБИК относительного движения нуклона и ядра  ${}^8\text{Li}$  в канале  $n + {}^8\text{Li}$ , полученные по формуле (2) для связанного первого возбужденного состояния  $1/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$ . В соответствии с условиями, которые мы обсуждали выше, а также учитывая дополнительно, что для применимости метода SS-HORSE можно использовать только интервалы  $\hbar\Omega$ , где собственные энергии относительного движения для данного  $N_{\text{max}}$  растут с ростом  $\hbar\Omega$ , и что для экстраполяции в рамках SS-HORSE энергий связанных состояний разумно использовать только

отрицательные энергии относительного движения, полученные в МОБИК, в данном случае мы имеем крайне ограниченный набор результатов МОБИК. К этим результатам относятся расчеты в МОБИК в модельных пространствах  $N_{\text{max}} = 10, 12$  и  $14$  в диапазоне значений  $\hbar\Omega$  от 12.5 до 20 МэВ.

Результаты, для которых выполняется условие  $|A_\ell| \leq |A_\ell|_{\text{max}}$ , представлены на рис. 6. Видно, что результаты с  $N_{\text{max}} = 12$  и/или  $N_{\text{max}} = 14$  близки, что говорит о достигнутой сходимости. В связи с ограниченным набором результатов для энергий мы также использовали для нахождения трех параметров в параметризациях  $S$ -матрицы (3)–(5) три результата из разных модельных пространств МОБИК, а именно полученные с  $N_{\text{max}} = 12$ ,  $\hbar\Omega = 12.5$  МэВ и с  $N_{\text{max}} = 14$ ,  $\hbar\Omega = 12.5$  МэВ и 15 МэВ. На рис. 6 видно, что эти результаты, обозначенные в легенде как  $N_{\text{max}} = 12-14$ , фактически совпадают с результатами из индивидуальных модельных пространств как для энергии, так и для АНК.

Относительный разброс значений  $|A_1|$  достаточно велик, что отражается в большой неопределенности результата (см. табл. 1).

Мы также произвели расчеты для первого возбужденного состояния  $1/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$  в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$ . В этом случае мы действовали так же, как и в предыдущем случае канала  $n + {}^8\text{Li}$ . Результаты представлены на рис. 6. Результаты для  $E_b$  для двух каналов согласуются между собой и с результатами экстраполяции В для данных значений  $\hbar\Omega$ . Окончательный результат представлен в табл. 1 с погрешностью, обусловленной разбросом результатов в разных каналах, полученных с различными  $\hbar\Omega$  и  $N_{\text{max}} = 12$  и  $14$ . В отличие от основного состояния  ${}^9\text{Li}$ , наши предсказания энергии первого возбужденного состояния хуже воспроизводят экспериментальные данные по сравнению с расчетами NCSMC: в соответствии с нашими расчетами состояние  $1/2^-$  лежит выше и гораздо ближе к порогу  $n + {}^8\text{Li}$ , чем на эксперименте, в то время как NCSMC предсказывает это состояние немного ниже эксперимента. Если же сравнивать энергии возбуждения состояния  $1/2^-$ , то у нас она оказывается равной 3.7 МэВ, в расчетах NCSMC — 1.67 МэВ, а в эксперименте — 2.691 МэВ. Таким образом, мы примерно на 1 МэВ завышаем, а NCSMC примерно на 1 МэВ занижает энергию возбуждения этого состояния.

Для АНК в канале  $n + {}^8\text{Li}$  состояния  $1/2^-$  мы получили несколько меньшее значение, чем полученное из анализа экспериментальных данных.

### 3. РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Перейдем к исследованию резонансных состояний ядра  ${}^9\text{Li}$  в подходе SS-HORSE, который раньше успешно применялся для изучения резонансных состояний в ядрах  ${}^5\text{He}$  и  ${}^5\text{Li}$  [17–21],  ${}^7\text{He}$  [49], а также в тетранейтроне [22]. Как отмечалось выше, эта задача актуальна в силу того, что на данный момент экспериментальная информация крайне скудна.

Для исследования резонансных состояний в SS-HORSE мы используем параметризацию функции эффективного радиуса

$$K_\ell(E) = k^{2\ell+1} \cot \delta_\ell, \quad (11)$$

где  $k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$ , сдвиг фазы рассеяния  $\delta_\ell$  связан с  $S$ -матрицей:

$$S_\ell = e^{2i\delta_\ell}. \quad (12)$$

В SS-HORSE функция эффективного радиуса для энергий, полученных в МОБИК, может быть рассчитана по формуле [17]:

$$K_\ell(E_i) = -k^{2\ell+1} \frac{C_{N^i+2,\ell}(E_i)}{S_{N^i+2,\ell}(E_i)}. \quad (13)$$

В качестве энергий  $E_i$  для каждого из резонансных состояний мы по-прежнему должны использовать собственные энергии относительного движения, рассчитанные по формуле (2).

Как и в случае связанных состояний, для применения SS-HORSE необходимо провести отбор результатов, и только после этого функцию эффективного радиуса можно параметризовать с учетом аналитических свойств амплитуды рассеяния [19–21]. Как известно (см., например, [45]), функция  $K_\ell(E)$  может быть представлена в виде ряда по четным степеням импульса  $k$  или в виде ряда по целым степеням энергии  $E$ . Однако параметризация  $K_\ell(E)$  в виде ряда опасна, так как при ненулевых энергиях, в которых фаза  $\delta_\ell$  принимает значения  $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ , функция  $K_\ell(E)$  принимает бесконечные значения и не может быть описана конечным рядом. Поэтому мы параметризовали функцию эффективного радиуса Паде-аппроксимантом:

$$K_\ell(E) = \frac{v_0 + v_1 E + v_2 E^2}{1 + q_1 E}. \quad (14)$$

Здесь величины  $v_0, v_1, v_2$  и  $q_1$  являются параметрами подгонки. Как видно из уравнений (11) и (12),  $S$ -матрицу можно легко выразить через  $K_\ell(E)$ , и, рассчитав подгоночные параметры в выражении (14), мы получаем простое аналитическое выражение для  $S$ -матрицы. Это выражение можно использовать в комплексной плоскости импульса  $k$  и

провести численный поиск положения полюсов  $S$ -матрицы. Действительная и мнимая части импульса в полюсе  $S$ -матрицы в нижней полуплоскости комплексных импульсов задают энергию и ширину резонанса.

В таком подходе были рассмотрены резонансные состояния  $5/2^-, 3/2_2^-, 3/2_3^-$  и  $7/2^-$ . Рассчитанные энергии и ширины приведены в табл. 1, а соответствующие сдвиги фаз резонансного рассеяния представлены на рис. 7.

Нижайший резонанс  $5/2^-$  может наблюдаться только в упругом канале рассеяния  $n + {}^8\text{Li}$ . Канал с возбужденным состоянием ядра  ${}^8\text{Li}^*$  закрыт. Рассчитанные значения энергии и ширины резонанса близки к экспериментальным значениям, но несколько больше их; отметим, что исследование в NCSMC [12] привело к еще немного большей энергии и ширине этого резонанса.

Следующими состояниями в МОБИК являются  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$ , которые достаточно близки по энергиям. Эти резонансы получились довольно широкими в канале  $n + {}^8\text{Li}$ . В канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  мы получили весьма близкие энергии этих резонансов, но существенно меньшую ширину. Это неудивительно, так как эти резонансы лежат при энергии, близкой к порогу данного канала. Таким образом, фаза рассеяния в этих состояниях при уменьшении энергии (см. рис. 7) в районе резонанса должна быстро опускаться к нулю на пороговом значении энергии. Следовательно, по поведению фазы и связанной с ней  $S$ -матрицы в данном канале невозможно сделать вывод о ширинах этих резонансов. Поэтому в строке “Предсказание” табл. 1 для ширин резонансов  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$  мы игнорируем результаты, полученные в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$ , и приводим ширины на основе расчетов в канале  $n + {}^8\text{Li}$ . Отметим, что аналогичную ситуацию мы наблюдали для резонанса  $1/2^-$  в ядре  ${}^7\text{He}$  [49]. Этот резонанс с шириной более 4 МэВ в канале  $n + {}^6\text{He}^*$  с ядром  ${}^6\text{He}$  в возбужденном состоянии  $2^+$  лежит при энергии меньше 1 МэВ от порога этого канала. Соответственно в данном канале невозможно описать ширину этого резонанса, и в качестве окончательного результата мы приводили в работе [49] ширину этого резонанса, полученную в канале  $n + {}^6\text{He}$  с ядром  ${}^6\text{He}$  в основном состоянии.

Отметим, что полученные нами резонансные состояния  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$  имеют энергии возбуждения соответственно 5.9(4) МэВ и 6.3(3) МэВ, что близко по энергии к наблюдавшемуся на эксперименте резонансу с энергией возбуждения 5.38 МэВ [4], ширина которого  $600 \pm 100$  кэВ, впрочем, существенно меньше наших предсказаний. В расчетах в NCSMC получен резонанс  $3/2_2^-$ , который имеет

ширину 590 кэВ. Отсчитанный от порога  $n + {}^8\text{Li}$ , он лежит при энергии примерно на 0.8 МэВ ниже нашего. Однако энергия возбуждения этого резонанса в расчетах NCSMC существенно меньше, так как основное состояние в NCSMC лежит на 1.3 МэВ выше нашего.

Мы получили также в канале  $n + {}^8\text{Li}$  сравнительно широкий низколежащий резонанс  $7/2^-$ , перекрывающийся с резонансами  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$  (см. рис. 7 и табл. 1). В канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  ширина этого резонанса поджата не только близким порогом, но и центробежным барьером, обусловленным орбитальным моментом  $\ell = 3$ . Поэтому в строке “Предсказание” табл. 1 для ширины этого резонанса мы также игнорируем результат, полученный в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$ . Отметим, впрочем, что в эксперименте наблюдался узкий резонанс с энергией возбуждения 6.43(15) МэВ и шириной  $40 \pm 20$  кэВ, а энергия возбуждения резонанса  $7/2^-$  в наших расчетах 7.1(4) МэВ оказывается близкой к этому значению. Ширина же этого резонанса в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  составляет 56(5) кэВ, что хорошо согласуется с шириной резонанса 6.43(15) МэВ. В расчетах в NCSMC также наблюдался очень узкий резонанс  $7/2^-$  при близких энергиях, параметры которого не приводятся в работе [12].

В исследовании состояний положительной четности ядра  ${}^9\text{Li}$  мы не обнаружили низколежащих резонансов.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методе SS-HORSE на основе расчетов *ab initio* ядер  ${}^9\text{Li}$  и  ${}^8\text{Li}$ , выполненных в МОБИК с нуклон-нуклонным взаимодействием Daejeon16, исследованы связанные и резонансные состояния ядра  ${}^9\text{Li}$ .

В основе метода SS-HORSE лежат аналитические свойства  $S$ -матрицы, что позволяет осуществить расчет ее полюсов. Это дает возможность осуществить для энергий связанных состояний экстраполяцию результатов МОБИК на случай бесконечного базиса, причем SS-HORSE-экстраполяция, в отличие от других разработанных методов экстраполяций, является теоретически обоснованной. Кроме этого, метод SS-HORSE позволяет определить АНК в связанных состояниях.

Энергия основного состояния  $3/2^-$  ядра  ${}^9\text{Li}$ , полученная в наших расчетах, совпадает с экспериментальным значением в отличие от предсказания подхода NCSMC [12] с межнуклонными взаимодействиями киральной эффективной теории поля, в котором состояние  $3/2^-$  лежит выше и, соответственно, ближе к порогу  $n + {}^8\text{Li}$  на 1.25 МэВ.

Наше предсказание для АНК в основном состоянии в канале  $n + {}^8\text{Li}$  согласуется в пределах погрешности со значениями, полученными на основе анализа экспериментальных данных. Оценки АНК в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  на основе эксперимента отсутствуют.

В отличие от основного состояния  ${}^9\text{Li}$ , наши предсказания энергии первого возбужденного состояния  $1/2^-$  по сравнению с расчетами NCSMC хуже воспроизводят экспериментальные данные: энергия возбуждения состояния  $1/2^-$  в наших расчетах равна 3.7 МэВ, в расчетах NCSMC — 1.67 МэВ, а экспериментальное значение — 2.691 МэВ. Таким образом, мы примерно на 1 МэВ завышаем, а NCSMC примерно на 1 МэВ занижает энергию возбуждения этого состояния.

Для АНК в канале  $n + {}^8\text{Li}$  состояния  $1/2^-$  мы получили несколько меньшее значение, чем полученное из анализа экспериментальных данных.

Нижайший резонанс  $5/2^-$  может наблюдаться только в упругом канале рассеяния  $n + {}^8\text{Li}$ . Канал с возбужденным состоянием ядра  ${}^8\text{Li}^*$  закрыт. Рассчитанные значения энергии и ширины резонанса близки к экспериментальным, но несколько больше их, а энергия и ширина этого резонанса, полученные в NCSMC, еще немного больше.

Бликие по энергиям перекрывающиеся резонансы  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$  получились довольно широкими. Они существенно превосходят по ширине наблюдавшийся в той же области энергий резонанс неизвестной спин-четности с энергией возбуждения 5.38 МэВ и шириной  $600 \pm 100$  кэВ [4]. В NCSMC получен резонанс  $3/2_2^-$  с близкой к эксперименту шириной 590 кэВ, однако энергия возбуждения этого резонанса в расчетах NCSMC оказалось существенно меньше.

В канале  $n + {}^8\text{Li}$  мы получили сравнительно широкий резонанс  $7/2^-$ , перекрывающийся с резонансами  $3/2_2^-$  и  $3/2_3^-$ . В канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  с ядром  ${}^8\text{Li}$  в возбужденном состоянии  $1^+$  этот резонанс поджат как близким порогом, так и центробежным барьером, поэтому ширина этого резонанса, полученная в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$ , нам представляется существенно заниженной. Отметим, впрочем, что в эксперименте наблюдается узкий резонанс с энергией возбуждения 6.43(15) МэВ и шириной  $40 \pm 20$  кэВ. Энергия возбуждения резонанса  $7/2^-$  в наших расчетах 7.1(4) МэВ близка к этому значению, как и его ширина, для которой в канале  $n + {}^8\text{Li}^*$  мы получили значение 56(5) кэВ. В расчетах в NCSMC также наблюдался очень узкий резонанс  $7/2^-$  при близких энергиях.

В исследованиях состояний положительной четности ядра  ${}^9\text{Li}$  мы не обнаружили низколежащих резонансов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-02-00357) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 0818-2020-0005) с использованием ресурсов ЦКП “Центр данных ДВО РАН”.

Исследование также была частично поддержано Министерством энергетики США в рамках грантов DE-FG02-87ER40371 и DE-SC0023495 (SciDAC5/NUCLEI), а также Министерством науки и ИКТ и Национальным исследовательским фондом Кореи (2013M7A1A1075764).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. Guimarães, O. Camargo, R. Lichtenthäler, *et al.*, PoS (NIC-IX), 108 (2010).
2. J. Görres, H. Herndl, I. J. Thompson, and M. Wiescher, Phys. Rev. C **52**, 2231 (1995).
3. V. D. Efros, W. Balogh, H. Herndl, R. Hofinger, and H. Oberhummer, Z. Phys. A **355**, 101 (1996).
4. D. R. Tilley, J. H. Kelley, J. L. Godwin, D. J. Milener, J. E. Purcell, C. G. Sheu, and H. R. Weller, Nucl. Phys. A **745**, 155 (2004).
5. J. T. Huang, C. A. Bertulani, and V. Guimarães, At. Data Nucl. Data Tables **96**, 824 (2010).
6. B. Guo, Z. H. Li, W. P. Liu, X. X. Bai, G. Lian, S. Q. Yan, B. X. Wang, S. Zeng, J. Su, and Y. Lu, Nucl. Phys. A **761**, 162 (2005).
7. Z. Mao and A. Champagne, Nucl. Phys. A **522**, 568 (1991).
8. H.-L. Ma, B.-G. Dong, Y.-L. Yan, and X.-Z. Zhang, Eur. Phys. J. A **48**, 125 (2012).
9. P. Mohr, Phys. Rev. C **67**, 065802 (2003).
10. P. Descouvemont, Astrophys. J. **405**, 518 (1993).
11. S. B. Dubovichenko and A. V. Dzhazairov-Kakhramanov, Astrophys. J. **819**, 78 (2016).
12. C. McCracken, P. Navrátil, A. McCoy, S. Quaglioni, and G. Hupin, Phys. Rev. C **103**, 035801 (2021).
13. M. Piarulli, A. Baroni, L. Girlanda, A. Kievsky, A. Lovato, E. Lusk, L. E. Marcucci, S. C. Pieper, R. Schiavilla, M. Viviani, and R. B. Wiringa, Phys. Rev. Lett. **120**, 052503 (2018).
14. A. M. Shirokov, V. A. Kulikov, P. Maris, and J. P. Vary, in *NN and 3N Interactions*, Ed. by L. D. Blokhintsev and I. I. Strakovsky (Nova Science, Hauppauge, NY, 2014), Chap. 8, p. 231; <https://novapublishers.com/wp-content/uploads/2019/05/Bindings-and-Spectra-of-Light-Nuclei-with-JISP16.pdf>
15. B. R. Barrett, P. Navrátil, and J. P. Vary, Prog. Part. Nucl. Phys. **69**, 131 (2013).
16. A. M. Shirokov, I. J. Shin, Y. Kim, M. Sosonkina, P. Maris, and J. P. Vary, Phys. Lett. B **761**, 87 (2016).
17. A. M. Shirokov, A. I. Mazur, I. A. Mazur, and J. P. Vary, Phys. Rev. C **94**, 064320 (2016).
18. I. A. Mazur, A. M. Shirokov, A. I. Mazur, and J. P. Vary, Phys. Part. Nucl. **48**, 84 (2017).
19. Л. Д. Блохинцев, А. И. Мазур, И. А. Мазур, Д. А. Савин, А. М. Широков, ЯФ **80**, 102 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 226 (2017)].
20. Л. Д. Блохинцев, А. И. Мазур, И. А. Мазур, Д. А. Савин, А. М. Широков, ЯФ **80**, 619 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 1093 (2017)].
21. A. M. Shirokov, A. I. Mazur, I. A. Mazur, E. A. Mazur, I. J. Shin, Y. Kim, L. D. Blokhintsev, and J. P. Vary, Phys. Rev. C **98**, 044624 (2018).
22. A. M. Shirokov, G. Papadimitriou, A. I. Mazur, I. A. Mazur, R. Roth, and J. P. Vary, Phys. Rev. Lett. **117**, 182502 (2016).
23. А. М. Широков, А. И. Мазур, В. А. Куликов, ЯФ **84**, 111 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 131 (2021)].
24. H. Zhan, A. Nogga, B. R. Barrett, J. P. Vary, and P. Navrátil, Phys. Rev. C **69**, 034302 (2004).
25. P. Maris, J. P. Vary, and A. M. Shirokov, Phys. Rev. C **79**, 014308 (2009).
26. S. A. Coon, M. I. Avetian, M. K. G. Kruse, U. van Kolck, P. Maris, and J. P. Vary, Phys. Rev. C **86**, 054002 (2012).
27. S. A. Coon, in *Proceedings of the International Conference “Nuclear Theory in the Supercomputing Era — 2012” (NTSE-2012)*, Khabarovsk, Russia, June 18–22, 2012, Ed. by A. M. Shirokov and A. I. Mazur (Pacific National University, Khabarovsk, 2013), p. 171; [http://ntse.khb.ru/files/uploads/2012/proceedings/S\\_Coon.pdf](http://ntse.khb.ru/files/uploads/2012/proceedings/S_Coon.pdf)
28. R. J. Furnstahl, G. Hagen, and T. Papenbrock, Phys. Rev. C **86**, 031301(R) (2012).
29. S. N. More, A. Ekström, R. J. Furnstahl, G. Hagen, and T. Papenbrock, Phys. Rev. C **87**, 044326 (2013).
30. M. K. G. Kruse, E. D. Jurgenson, P. Navrátil, B. R. Barrett, and W. E. Ormand, Phys. Rev. C **87**, 044301 (2013).
31. R. J. Furnstahl, S. N. More, and T. Papenbrock, Phys. Rev. C **89**, 044301 (2014).
32. D. Sääf and C. Forssén, Phys. Rev. C **89**, 011303(R) (2014).
33. S. König, S. K. Bogner, R. J. Furnstahl, S. N. More, and T. Papenbrock, Phys. Rev. C **90**, 064007 (2014).
34. R. J. Furnstahl, G. Hagen, T. Papenbrock, and K. A. Wendt, J. Phys. G **42**, 034032 (2015).
35. K. A. Wendt, C. Forssén, T. Papenbrock, and D. Sääf, Phys. Rev. C **91**, 061301(R) (2015).
36. S. A. Coon and M. K. G. Kruse, Int. J. Mod. Phys. E **25**, 1641011 (2016).
37. D. Odell, T. Papenbrock, and L. Platter, Phys. Rev. C **93**, 044331 (2016).
38. I. J. Shin, Y. Kim, P. Maris, J. P. Vary, C. Forssén, J. Rotureau, and N. Michel, J. Phys. G **44**, 075103 (2017).
39. G. A. Negroita, G. R. Luecke, J. P. Vary, P. Maris, A. M. Shirokov, I. J. Shin, Y. Kim, E. G. Ng, and C. Yang, in *Proceedings of the Ninth International Conference on Computational Logics, Algebras, Programming, Tools, and Benchmarking (COMPUTATION TOOLS 2018)*,

- Feb. 18–22, 2018, Barcelona, Spain* (IARIA, 2018), p. 20; arXiv: 1803.03215 [physics.comp-ph].
40. G. A. Negoita, J. P. Vary, G. R. Luecke, P. Maris, A. M. Shirokov, I. J. Shin, Y. Kim, E. G. Ng, C. Yang, M. Lockner, and G. M. Prabhu, *Phys. Rev. C* **99**, 054308 (2019).
  41. W. G. Jiang, G. Hagen, and T. Papenbrock, *Phys. Rev. C* **100**, 054326 (2019).
  42. J. M. Bang, A. I. Mazur, A. M. Shirokov, Yu. F. Smirnov, and S. A. Zaytsev, *Ann. Phys. (NY)* **280**, 299 (2000).
  43. A. M. Shirokov, Yu. F. Smirnov, and S. A. Zaytsev, in *Modern Problems in Quantum Theory*, Ed. by V. I. Savrin and O. A. Khrustalev (Moscow State University, Moscow, 1998), p. 184.
  44. С. А. Зайцев, Ю. Ф. Смиронов, А. М. Широков, *ТМФ* **117**, 227 (1998) [*Theor. Math. Phys.* **117**, 1291 (1998)].
  45. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971).
  46. A. G. Negoita, PhD Thesis (Iowa State University, 2010), ProQuest 3418277; <http://gradworks.umi.com/3418277.pdf>
  47. L.-B. Wang, P. Mueller, K. Bailey, G. W. F. Drake, J. P. Greene, D. Henderson, R. J. Holt, R. V. F. Janssens, C. L. Jiang, Z.-T. Lu, T. P. O'Connor, R. C. Pardo, K. E. Rehm, J. P. Schiffer, and X. D. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 142501 (2004).
  48. R. L. Workman *et al.* (Particle Data Group), *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022**, 083C01 (2022).
  49. I. A. Mazur, A. M. Shirokov, I. J. Shin, A. I. Mazur, Y. Kim, P. Maris, and J. P. Vary, *Phys. Rev. C* **106**, 064320 (2022); arXiv: 2207.0736.

## **<sup>9</sup>Li BOUND AND RESONANT STATES WITH *NN* INTERACTION**

### **Daejeon16**

**I. A. Mazur<sup>1),2)</sup>, A. I. Mazur<sup>1)</sup>, V. A. Kulikov<sup>3)</sup>, A. M. Shirokov<sup>3)</sup>, I. J. Shin<sup>4)</sup>, Y. Kim<sup>4)</sup>,  
P. Maris<sup>5)</sup>, J. P. Vary<sup>5)</sup>**

<sup>1)</sup>*Pacific National University, Khabarovsk, Russia*

<sup>2)</sup>*Center for Exotic Nuclear Studies, Institute for Basic Science, Daejeon, Republic of Korea.*

<sup>3)</sup>*Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>4)</sup>*Rare Isotope Science Project, Institute for Basic Science, Daejeon, Republic of Korea*

<sup>5)</sup>*Department of Physics and Astronomy, Iowa State University, Ames IA, USA*

Presented are the results for <sup>9</sup>Li bound state energies and asymptotic normalization coefficients as well as for energies and widths of the low-lying <sup>9</sup>Li resonances. These studies were performed within the SS-HORSE method based on *ab initio* No-Core Shell Model calculations with nucleon-nucleon interaction Daejeon16.