

## ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХФЕРМИОННОЙ СОСТАВНОЙ СИСТЕМЫ

© 2023 г. Ю. Д. Черниченко<sup>1), 2)</sup>\*

Поступила в редакцию 15.12.2022 г.; после доработки 17.01.23 г.; принята к публикации 21.01.2023 г.

Получено новое релятивистское квазиклассическое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов как составной системы двух спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием. Проведено сравнение нового выражения с его релятивистским бесспиновым аналогом. Изучено влияние спиновых параметров векторных мезонов (масс кварков) на поведение их лептонных ширин распадов. Исследование проведено в рамках релятивистского квазипотенциального подхода, основанного на ковариантной гамильтоновой формулировке квантовой теории поля, путем перехода от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению для случая составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс.

DOI: 10.31857/S0044002723040116, EDN: EGRURU

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работы [1] и посвящена описанию лептонных ширин распадов векторных мезонов на основе знания волновых функций составной системы двух релятивистских фермионов (спинорных кварков) произвольных масс. С этой целью мы будем использовать релятивистский квазипотенциальный (РКП) подход, предложенный Кадышевским в работе [2], основанный на ковариантной гамильтоновой формулировке проблемы двух тел в квантовой теории поля [3] и совпадающий по форме с РКП-подходом Логунова–Тавхелидзе [4], предложенным в рамках одновременного описания системы двух тел в квантовой теории поля. При этом важно, что в РКП-подходе трехмерность заложена с самого начала, а все частицы даже в промежуточных состояниях являются физическими, т.е. лежат на массовых поверхностях. Тем самым двухчастичная задача сводится к одночастичной, описание которой ведется на языке волновой РКП-функции одной релятивистской частицы, удовлетворяющей полностью ковариантному трехмерному РКП-уравнению в импульсном пространстве с квазипотенциалом (см., например, работы [5–8]). Квазипотенциал в общем случае параметрически зависит от энергии составной системы и не является эрмито-

вым [2], а вся особенность, как и в нерелятивистской теории, которую вносит спин в волновую РКП-функцию составной системы, является следствием зависимости квазипотенциала от спина. Кроме того, РКП-подход [2] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц равных масс  $m_1 = m_2 = m$  позволяет перейти от импульсной формулировки в пространстве Лобачевского к трехмерному релятивистскому конфигурационному представлению ( $\mathbf{r}$ -представление), введенному в [9]<sup>3)</sup>.

Для нахождения лептонных ширин распадов векторных мезонов  $V$  широко используют нерелятивистскую формулу Матвеева, Струминского, Тавхелидзе [10] или Ван Роена–Вайскопфа [11] (см. также работы [12–14])

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) &= \\ &= \frac{16\pi\alpha^2 Q_V^2 N_c}{3M_n^2} |\varphi_{n,\ell=0}(0)|^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $Q_V$  — множители, обусловленные изотопической структурой векторных мезонов  $V$  и зарядами кварков, образующих их и выраженных в единицах электрического заряда  $e$ ,  $M_n$  — полная энергия связанного состояния двух спиновых кварков с числом цветов  $N_c = 3$ , массами  $m_1, m_2$  и относительным  $\mathcal{Z}$ -импульсом  $\mathbf{q}$ , т.е.  $e^+e^-$  (или  $q\bar{q}$ )-системы с

<sup>1)</sup>Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь.

<sup>2)</sup>Международный центр перспективных исследований, ГГТУ, Гомель, Беларусь.

\*E-mail: chyud@mail.ru; chern@gstu.by

<sup>3)</sup>Напомним, что в рамках рассматриваемого РКП-подхода как модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , так и  $\mathcal{Z}$ -импульс  $\mathbf{k}$  релятивистской частицы являются релятивистскими инвариантами [9].

относительным орбитальным моментом  $\ell = 0$  для данного уровня  $n$ , а  $\varphi_{n,\ell=0}(0)$  — волновая функция связанного состояния. Обычно в качестве нее используют нерелятивистскую волновую функцию  $\varphi_{n,\ell=0}^{\text{nr}}(r)$ , отвечающую нерелятивистскому уравнению Шредингера для случая двух частиц равных масс с несингулярным в нуле потенциалом запира- ния  $V_{\text{conf}}(r)$  путем добавления к нему кулоновского взаимодействия [15, 16]

$$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{\alpha_s}{r}, \quad (2)$$

где  $\alpha_s$  — сильная константа связи.

Релятивистская модификация формулы (1) для лептонной ширины распада векторного мезона в  $s$ -состоянии ( $\ell = 0$ ) на лептон-антилептонную пару была выполнена в работе [17]. Разработанный в [17] подход базируется на решении релятивистским квази- классическим (ВКБ) методом [18] модифицирован- ного уравнения Бете–Солпитера, не зависящего от относительного времени  $x_0$ . Это означает выпол- нение следующих предположений (одновременное взаимодействие): фоковское  $q\bar{q}$ -состояние дает до- минирующий вклад в функцию Бете–Солпитера двух заряженных частиц  $\chi_{\text{BS}}(x)$  при  $x = (x_0, \mathbf{r}) = 0$  в области  $r > m^{-1}$  ( $\hbar = c = 1$ );  $q\bar{q}$ -взаимодействие адекватно описывается одновременным кулонов- ским взаимодействием (2); возможные (дальнего порядка) спин-зависимые эффекты игнорируются. При этих предположениях доминирующий вклад в функцию Бете–Солпитера для  $s$ -состояния при  $x_0 = 0$  в области  $r \gg m^{-1}$  дает решение одновре- менного уравнения Солпитера для волновой функ- ции  $\Psi_{n,\ell=0}^{\text{rel}}(r)$   $q\bar{q}$ -системы, вычисленную в нуле, так что  $\chi_{\text{BS}}((0, \mathbf{r}))|_{\ell=0} = \Psi_{n,\ell=0}^{\text{rel}}(r)$ .

Иной подход для нахождения лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии осно- ван на применении РКП-подхода [2]. В рамках этого РКП-подхода для случая составной систе- мы двух релятивистских бесспиновых частиц рав- ных масс  $m$  релятивистская модификация фор- мулы (1) для лептонной ширины распада век- торного мезона в  $s$ -состоянии и с полной энер- гией  $M_n < 2mc^2$  на лептон-антилептонную пару была выполнена в работе [19] и состояла в за- мене функции Бете–Солпитера  $\chi_{\text{BS}}((0, \mathbf{r}))|_{\ell=0}$  на волновую РКП-функцию  $\psi_{M_n,\ell=0}(\mathbf{r})$  в трехмер- ном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении [9], вычис- ленную в нуле. Для этого РКП-уравнение для волновой РКП-функции  $\psi_{M_n,\ell=0}(\mathbf{r})$  с потенциалом  $V(r) = -\alpha_s/r + \sigma r^s$  ( $\sigma, s > 0$ ) было решено реля- тивистским аналогом модифицированного ВКБ- метода [18].

РКП-подход [2] для случая составной системы двух релятивистских фермионов равных масс  $m$

был применен в работах [20], чтобы получить в ВКБ-приближении выражения для лептонных ширин распадов векторных и псевдоскалярных мезонов с относительным орбитальным моментом  $\ell \geq 0$ , также заменяя функцию Бете–Солпитера  $\chi_{\text{BS},\ell}((0, \mathbf{r}))$  на волновую РКП-функцию  $\psi_{M_n,\ell}(\mathbf{r})$  в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении [9], вычисленную в нуле. При этом авторы огра- ничились предположением, что квазипотенциал является действительным и представляет собой сумму потенциала запира- ния  $V_{\text{conf}}(r)$  и куло- новской части образа однобозонного обменного потенциала  $V_c(r) = -\text{cth}(\pi mr)/r$  ( $\hbar = c = 1$ ) в  $\mathbf{r}$ -представлении, опуская функцию  $\text{cth}(\pi mr)$ , т.е. заменяя потенциал  $V_c(r) = -\text{cth}(\pi mr)/r$  на куло- новский (хромодинамический) потенциал (2), ко- торый в РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского воспроизводит главное поведение потенциала в КХД [21].

Возможность применимости формулы (1) для описания лептонных ширин распадов векторных мезонов в рамках РКП-подхода [2, 9] обусловле- на тем, что функция Бете–Солпитера при  $x = 0$  для случая взаимодействия двух релятивистских частиц равных масс  $m$  будет, в отличие от нереля- тивистского случая и релятивистского подхода, предложенного в работе [17], связана с волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве Ло- бачевского,  $\Psi_{M_Q}(\mathbf{k})$ , и в трехмерном релятивист- ском  $\mathbf{r}$ -представлении,  $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$ , не в нуле, как это делалось в работах [19, 20], а в соответствии с преобразованиями Шапиро [22]

$$\begin{aligned} \psi_{M_Q}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \Psi_{M_Q}(\mathbf{k}), \\ \Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) &= \int d\mathbf{r} \xi^*(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \psi_{M_Q}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

при  $r = i\lambda$  соотношением

$$\begin{aligned} \chi_{\text{BS}}(x = 0) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \Psi_{M_Q}(\mathbf{k}) = \quad (3) \\ &= \lim_{r \rightarrow i\lambda} \psi_{M_Q}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda = \hbar/mc$  — комптоновская длина волны релятивистской частицы массы  $m$ , функции

$$\xi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \left( \frac{k_0 - c\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{mc^2} \right)^{-1-ir/\lambda}$$

образуют полную и ортогональную систему функ- ций, соответствуют главной серии унитарных неприводимых представлений группы Лоренца и выполняют роль “плоских” волн в пространстве Лобачевского, а  $d\Omega_{\mathbf{k}} = mc^2 d\mathbf{k}/E_k$  — релятивист- ский трехмерный элемент объема в пространстве

Лобачевского, которое реализуется на верхней полё массового гиперболоида

$$E_q^2 - c^2 \mathbf{q}^2 = m^2 c^4,$$

где  $E_q = q_0 = c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{q}^2}$  — энергия релятивистской частицы с массой  $m$  и 3-импульсом  $\mathbf{q}$  и связана с полной энергией  $M_Q = \sqrt{(q_1 + q_2)^2}$  в с.ц.и. соотношением [9]

$$\sqrt{s} = M_Q = 2c\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{q}^2} = 2E_q.$$

Таким образом, соотношение (3) обеспечивает правильную связь между функцией Бете–Солпитера и волновыми РКП-функциями в импульсном пространстве Лобачевского и в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении.

Выражение для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в состоянии с энергией  $M_Q = M_n$  для данного уровня  $n$  и с относительным орбитальным моментом  $\ell \geq 0$  на лептон-антилептонную пару было получено в работе [23]. Развитый в [23] подход базируется на РКП-подходе [2], обобщенном в работах [24, 25] для случая составных систем двух релятивистских частиц произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$ . С этой целью РКП-уравнение в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении для волновой РКП-функции  $\psi_{M_Q}(\mathbf{r})$  двух релятивистских бесспиновых частиц произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$ , взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала вида

$$V(r) = V_{\text{conf}}(r) - \frac{\alpha_s}{r}, \alpha_s > 0, \quad (4)$$

было решено релятивистским аналогом модифицированного ВКБ-метода [18, 19]. Это решение приводит, с учетом модификации формулы (1) соотношением (3), к следующему выражению для лептонной ширины распада векторного мезона:

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell}(V \rightarrow e^+ e^-) &= \quad (5) \\ &= \frac{2\alpha^2 Q_V^2 (\hbar c)^3 \Gamma^2(\ell + 1)}{\pi \lambda'^3 g' m' c^2 \Gamma^2(2\ell + 2) M_n^2} \left( \frac{u'_{\text{rel},n}}{g'} \right)^{2\ell+1} \times \\ &\times L_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel},n}) \frac{dM_n}{dn}. \end{aligned}$$

Здесь для бесспиновых кварков  $Q_V = e_q$ , где  $e_q$  — заряд кварка в единицах электрического заряда  $e$ ,  $\lambda' = \hbar/m'c$  — комптоновская длина волны эффективной релятивистской частицы массы  $m' = \sqrt{m_1 m_2}$ , выступающей в качестве двухчастичной связанной системы, фактор  $g'$  определяется выражением

$$g' = \frac{m'}{2\mu} = \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{m_1 m_2}}, \quad (6)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса двух частиц произвольных масс,

$$u'_{\text{rel}} = \frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} \quad (7)$$

— относительная скорость эффективной релятивистской частицы массы  $m'$ , где скорость  $u$  дается выражением

$$u = \sqrt{1 - \frac{4m'^2 c^4}{M^2 - (m_1 - m_2)^2 c^4}}, \quad (8)$$

а релятивистские бесспиновые кулоноподобные ресуммирующие пороговые  $L$ - и  $S$ -факторы как функции быстроты  $\chi'$ , которые появляются в рассматриваемом РКП-подходе, даются выражениями [26–29]<sup>4)</sup>

$$\begin{aligned} L_{\text{RQP}}(\chi') &= \quad (9) \\ &= \prod_{n=1}^{\ell} \left[ 1 + \left( \frac{\tilde{\alpha}_s}{2n \text{sh } \chi'} \right)^2 \right] S_{\text{RQP}}(\chi'), \\ S_{\text{RQP}}(\chi') &= \frac{X_{\text{RQP}}(\chi')}{1 - \exp[-X_{\text{RQP}}(\chi')]}, \quad (10) \\ X_{\text{RQP}}(\chi') &= \frac{\pi \tilde{\alpha}_s}{\text{sh } \chi'}. \end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s / g' \hbar c$ , величина  $\text{sh } \chi'$  выражается через относительную скорость в (7) как

$$\text{sh } \chi' = u'_{\text{rel}} / 2g', \quad (11)$$

а быстрота  $\chi'$  связана с относительным 3-импульсом  $\mathbf{q}'$ , энергией  $E_{q'}$  эффективной релятивистской частицы массы  $m'$  и полной энергией взаимодействующих частиц  $M_Q$  соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= m' c \text{sh } \chi' \mathbf{n}_{q'}, \quad |\mathbf{n}_{q'}| = 1, \\ E_{q'} &= m' c^2 \text{ch } \chi', \quad M_Q = \frac{m'^2 c^2}{\mu} \text{ch } \chi'. \end{aligned}$$

Выражение (5) можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (4), т.е. при  $\alpha_s = 0$ . В частности, при  $\ell = 0$  выражение (5) переходит в соотношение [33]

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+ e^-) &= \quad (12) \\ &= \frac{2\alpha^2 Q_V^2 (\hbar c)^3 u'_{\text{rel},n}}{\pi \lambda'^3 g'^2 m' c^2 M_n^2} S_{\text{RQP}}(u'_{\text{rel},n}) \frac{dM_n}{dn}. \end{aligned}$$

<sup>4)</sup>Напомним, что пороговые  $L$ - и  $S$ -факторы в (9) и (10) имеют правильные релятивистские ( $u \rightarrow 1$ ) и ультрарелятивистские ( $m' \rightarrow 0$ ) пределы, равные единице, в отличие от релятивистских пороговых  $S$ -факторов, представленных в работах [30–32] (подробности см. в работах [26–29]).

План дальнейшего изложения следующий. В разд. 2 полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении для радиальной волновой РКП-функции  $\varphi_\ell(r, \chi')$  двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$ , полученное в [34] в рамках РКП-подхода [2, 24, 25], будет решено релятивистским ВКБ-методом. Условие применимости ВКБ-приближения будет установлено. В разд. 3 в рамках применимости ВКБ-приближения будет получено выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии на лептон-антилептонную пару. Векторные мезоны рассматриваются как составная система двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$ , взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоновского (хромодинамического) потенциала. В разд. 4 будет выполнено исследование влияния спина и масс кварков (фактор  $g'$ ) на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Для этого будет проведено сравнение поведения нового спинового выражения для лептонных ширин распадов векторных мезонов с их релятивистским бесспиновым аналогом. В этом же разделе будут вычислены значения лептонных ширин распадов основного уровня  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов. В Заключение будет подведен итог проведенному исследованию.

## 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ РКП-УРАВНЕНИЯ

Основой нашего рассмотрения является полностью ковариантное РКП-уравнение в  $\mathbf{r}$ -представлении в конечно-разностной форме для радиальной волновой РКП-функции  $\varphi_\ell(r, \chi')$  составной системы двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс  $m_1, m_2$  с относительным орбитальным моментом  $\ell \geq 0$ , взаимодействующих посредством сферически симметричных квазипотенциалов, которое имеет вид [34]

$$\begin{aligned} (\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} - \text{ch } \chi') \varphi_\ell(r, \chi') &= \\ &= -V(r) \hat{A} \left( \hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right) \varphi_\ell(r, \chi'). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} = \text{ch} \left( i\lambda' \frac{d}{dr} \right) + \frac{\lambda'^2 \ell(\ell+1)}{2r(r+i\lambda')} \exp \left( i\lambda' \frac{d}{dr} \right)$$

— радиальная часть оператора свободного гамильтониана

$$\hat{H}_0 = 2m'c^2 \left[ \text{ch} \left( i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{i\lambda'}{r} \text{sh} \left( i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda'^2}{2r^2} \Delta_{\theta,\varphi} \exp \left( i\lambda' \frac{\partial}{\partial r} \right) \right],$$

являющегося конечно-разностным оператором, построенным из операторов сдвига  $\exp(\pm i\lambda' \partial/\partial r)$ , в то время как  $\Delta_{\theta,\varphi}$  — его угловая часть, оператор  $\hat{A}$  определяется выражением

$$\hat{A} \left( \hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right) = \frac{1}{4} \left[ a' \left( \hat{H}_{0,\ell}^{\text{rad}} \right)^2 + b' \right],$$

в котором спиновые параметры  $a'$  и  $b'$  для векторных мезонов выражаются через фактор (6) формулой

$$a' = \frac{1}{2}g'^2, \quad b' = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}g'^2 \quad (14)$$

при  $\hat{O} = \gamma_\mu$  (вектор),

причем значение спиновых параметров  $a'$  и  $b'$  в (14) при  $m_1 = m_2 = m$  совпадает со значением их аналогов  $a$  и  $b$ , которые были получены в [35] для векторных мезонов; квазипотенциал  $V(r)$  является локальным в смысле геометрии Лобачевского и для простоты считается не зависящим от энергии  $M_Q$ , а  $\chi'$  — быстрота, которая параметризует импульс и энергию<sup>5)</sup>:

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q} = m'c \text{sh } \chi' \mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}, \quad (15)$$

$$|\mathbf{n}_{\Delta_{q',m'\lambda_Q}}| = 1, \quad M_Q = \frac{m'}{\mu} \Delta_{q',m'\lambda_Q}^0,$$

$$\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0 = m'c^2 \text{ch } \chi'.$$

Отметим, что для простоты рассмотрения в работе [34], как и в работах [36, 35], считалось, что квазипотенциал имеет биспинорную структуру вида  $\hat{O} \otimes \hat{O}$ , а вершинная функция также имеет спинорную структуру, пропорциональную матрице  $\hat{O}$ , не зависящую от импульсных переменных, а шпур  $\text{Sp}[\hat{O}^+ \hat{O}] \neq 0$ , где в качестве  $\hat{O}$  выбирались матрицы Дирака  $\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Разложение же вершинной функции по полной системе  $I, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} P^\nu$ -матриц приводит к системе зацепляющихся уравнений. Такое представление квазипотенциала и вершинной функции позволило, используя условия ортонормированности и полноты для дираковских спиноров, провести свертку спиновых частей этих величин, а затем, применяя

<sup>5)</sup>Напомним, что здесь  $\lambda_Q = (\lambda_Q^0; \lambda_Q) = Q/\sqrt{Q^2}$  — 4-вектор скорости составной частицы с 4-импульсом  $Q = q_1 + q_2$ , причем все 4-импульсы принадлежат верхним полам массовых гиперболоидов  $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = \Delta_{q',m'\lambda_Q}^{02} - c^2 \Delta_{q',m'\lambda_Q}^2 = m'^2 c^4$ , где  $\Delta_{q',m'\lambda_Q}^0, \Delta_{q',m'\lambda_Q}$  — временная и пространственная компоненты 4-вектора  $\Lambda_{\lambda_Q}^{-1} q' = \Delta_{q',m'\lambda_Q}$  из пространства Лобачевского (подробности см. в работе [34]).

преобразование Лоренца, разделить временные и пространственные переменные в аргументах четырехмерных  $\delta$ -функций и выполнить интегрирование по этим переменным, что в конечном итоге и приводит к уравнению (13) (подробности см. в работе [35]). Этот подход позволил найти точные решения РКП-уравнения (13) с кулоноподобным (хромодинамическим) потенциалом (2), который в случае взаимодействия  $\gamma_\mu \otimes \gamma^\mu$  является определяющим [36, 37], а возможность его использования как образа кулоновской части фейнмановского матричного элемента (квазипотенциала), содержащего все спиновые эффекты, была детально рассмотрена в работах [1, 20].

Решение уравнения (13) в ВКБ-приближении ищется в виде [1, 18–20, 23]

$$\varphi_\ell(r, \chi') = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} g(r) \right], \quad (16)$$

$$g(r) = g_0(r) + \frac{\hbar}{i} g_1(r) + \left( \frac{\hbar}{i} \right)^2 g_2(r) + \dots$$

Для первых двух членов представления (16) находим

$$g_0(r) = m'c \int dr \chi_\pm(r) + \frac{\hbar}{i} \phi, \quad (17)$$

$$g_1(r) = -\frac{1}{4} \ln([\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)] \times [1 + a'V(r)X(r)]) + c_\pm,$$

где

$$\chi_\pm(r) = \ln \left[ \mathcal{X}(r) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)} \right], \quad (18)$$

$$\mathcal{X}(r) = \frac{2X(r)}{1 + \sqrt{1 + a'V(r)X(r)}},$$

$$X(r) = \text{ch } \chi' - \frac{b'}{4} V(r),$$

$$R(r) = \sqrt{1 + \frac{\lambda'^2 \Lambda^2}{r^2}}, \quad \Lambda = \ell + 1/2.$$

Учет выражений в (17) для первых двух членов представления (16) позволяет получить ВКБ-решения с левой  $r_L$  и правой  $r_R$  точками поворота в области  $r_L \leq r \leq r_R$ :

$$\begin{aligned} & \varphi_\ell^{L,R}(r, \chi') = \quad (19) \\ & = \frac{C_{L,R}}{2\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} \times \\ & \times \left\{ \exp \left[ i\alpha_+^{L,R}(r) \mp \frac{i\pi}{4} \right] + \right. \\ & \left. + \exp \left[ i\alpha_-^{L,R}(r) \pm \frac{i\pi}{4} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha_\pm^{L,R}(r) = \frac{1}{\lambda'} \int_{r_{L,R}}^r dr' \chi_\pm(r'), \quad (20)$$

$C_{L,R}$  — нормировочные константы, а левая  $r_L$  и правая  $r_R$  точки поворота определяются как точки ветвления корня в (20):

$$\mathcal{X}(r_{L,R}) = R(r_{L,R}). \quad (21)$$

Условие применимости релятивистского ВКБ-метода в спиновом случае, основанное на выражениях в (17) для первых двух членов представления (16), дается неравенством

$$\lambda' \left| \frac{\text{ch } \chi_{\text{eff}}(r)}{\chi_+(r) \text{sh } \chi_{\text{eff}}(r)} \frac{d\chi_+(r)}{dr} \right| \ll 1, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\text{eff}}(r) &= \text{arch } \mathcal{X}_{\text{eff}}(r) = \\ &= \ln \left( \mathcal{X}_{\text{eff}}(r) + \sqrt{\mathcal{X}_{\text{eff}}^2(r) - 1} \right), \\ \mathcal{X}_{\text{eff}}(r) &= \text{ch } \chi_{\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{X}(r)}{R(r)}. \end{aligned}$$

В случае  $\ell = 0$  условие (22) преобразуется в неравенство

$$\lambda' \left| \frac{\text{ch } \chi_S(r)}{\chi_S(r) \text{sh } \chi_S(r)} \frac{d\chi_S(r)}{dr} \right| \ll 1,$$

где величина

$$\chi_S(r) = \text{arch } \mathcal{X}(r) = \ln \left[ \mathcal{X}(r) + \sqrt{\mathcal{X}^2(r) - 1} \right]$$

имеет смысл быстроты эффективной релятивистской частицы массы  $m'$ , движущейся в поле потенциала  $V(r)$ , в терминах которой измеряется расстояние между двумя точками импульсного пространства Лобачевского.

В заключение этого раздела приведем условие квантования уровней энергий в ВКБ-приближении [38]

$$\begin{aligned} & \int_{r_L}^{r_R} dr [\chi_+(r) - \ln R(r)] = \quad (23) \\ & = \pi \lambda' \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ & n = 0, 1, \dots, \ell \geq 0, \end{aligned}$$

которое, как и в бесспиновом случае [23], находится из условия совпадения волновых функций в (19) в точке  $r \in (r_L; r_R)$ . Для этого необходимо положить

$$C_L = C_\ell \exp \left[ -\frac{i}{\lambda'} \int_{r_L}^r dr' \ln R(r') \right],$$

$$C_R = C_\ell (-1)^n \exp \left[ -\frac{i}{\chi'} \int_{r_R}^r dr' \ln R(r') \right],$$

где  $C_\ell$  — произвольная постоянная. При  $a' = 0$ ,  $b' = 2/g'm'c^2$  ВКБ-условие квантования уровней энергий (23) совпадает с аналогичным выражением, которое было получено в работе [23] для случая двух бесспиновых частиц произвольных масс. В случае равных масс  $m_1 = m_2 = m$  ( $g' = 1$ ) выражение (23) переходит в ВКБ-условие квантования уровней энергий, полученное в случае спиновых частиц равных масс в работе [39].

### 3. ЛЕПТОННЫЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ МЕЗОНОВ В РКП-ПОДХОДЕ

Релятивистская модификация формулы (1) в РКП-подходе для лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии и с энергией  $M_Q = M_n$ , ( $\chi' = \chi_n$ ) как связанной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$  состоит, согласно соотношению (3) и обоснованию к нему, в замене  $|\chi_{BS}(x=0)|^2|_{\ell=0} = |\psi_{M_Q}(r=i\lambda)|^2|_{\ell=0}$  и введения квадрата формфактора кварка  $f_1(t)$ , который в нерелятивистском случае в работе Ван Роена–Вайскопфа [11] принимался равным 1. Тогда лептонная ширина распада векторного мезона в  $s$ -состоянии и с энергией  $M_n$  определяется также, как и в случае связанной системы двух спиновых кварков равных масс  $m$  [1], через решение (19) равенством

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) &= \quad (24) \\ &= \frac{16\pi\alpha^2 Q_V^2 f_1^2(t)}{M_n^2} \times \\ &\times \lim_{r \rightarrow i\lambda'} \left| e^{-\pi\tilde{\rho}'/2} \Gamma(1+i\tilde{\rho}') \frac{\varphi_0^L(r, \chi_n)}{r} \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{\rho}' = \frac{\tilde{\alpha}'_s a' \operatorname{ch} \chi'}{4}, \quad \tilde{\alpha}'_s = \frac{\alpha_s}{\chi'},$$

формфактор кварка  $f_1(t)$  в выражении оператора тока кварка как функция квадрата 4-вектора передачи импульса  $t = (p' - p)^2 = 2M_Q^2 c^4 (1 - \operatorname{ch} \chi_\Delta)$ , где  $p, p'$  — начальный и конечный импульсы, а  $\chi_\Delta$  — соответствующая быстрота, зависит от аномального магнитного момента кварка  $\mu_{\text{аном}}$  в отличие от формфактора кварка  $f_2(t)$ , который не дает вклада в магнитный момент кварка. В случае нерелятивистских кварков аномальный магнитный момент  $\mu_{\text{аном}}$  в работе Ван Роена–Вайскопфа [11] принимался равным нулю, а, следовательно, формфактор  $f_1(t)$  выбирался равным 1 (подробности см.

в [11]). В случае релятивистских кварков формфактор  $f_1(t)$  выберем в виде

$$f_1(t) = \frac{\operatorname{sh} \chi_\Delta}{\chi_\Delta}, \quad (25)$$

где  $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$  — релятивистский геометрический фактор в РКП-подходе [2], который впервые обоснованно появился в работе [40] для инвариантного описания пространственной структуры частиц в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении [9]. Такой выбор формфактора  $f_1(t)$  имеет ясный физический смысл, поскольку, как было показано в работе [40], фактор  $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$  описывает величину вклада в формфактор нуклона от его центральной сферы, внутри которой движутся кварки с радиусом, равным его комптоновской длине волны ( $r_0 = \hbar/Mc$ ). В нерелятивистском пределе ( $\chi_\Delta \rightarrow 0$ ) фактор  $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta \rightarrow 1$ , что отвечает точечной частице. Следовательно, в нерелятивистском пределе формфактор  $f_1(t)$  не дает вклада в (24). Таким образом, фактор  $\chi_\Delta / \operatorname{sh} \chi_\Delta$  служит мерой вклада релятивистских эффектов, обусловленных динамикой кварков.

Отметим, что дополнительный фактор  $\exp(-\pi\tilde{\rho}'/2)\Gamma(1+i\tilde{\rho}')$  в формуле (24) обеспечивает не только правильный релятивистский предел порогового редуцирующего  $S$ -фактора составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс при  $\chi' \rightarrow +\infty$  ( $u \rightarrow 1$ ), равный 1, но и переход к бесспиновому случаю при  $a' = 0$  и  $b' = 2/g'm'c^2$  (подробности см. в работе [34]). Таким образом, в рассматриваемом спиновом случае функция

$$\psi_0(r, \chi') = e^{-\pi\tilde{\rho}'/2} \Gamma(1+i\tilde{\rho}') \varphi_0^L(r, \chi')$$

представляет собой физическую волновую РКП-функцию  $s$ -состояния составной системы двух релятивистских спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала вида (4).

Подчеркнем также, что формула (24) справедлива (как это имело место и в работах [1, 17, 20, 23]) в приближении одновременного взаимодействия, ограничиваясь в дальнейшем учетом лишь образа кулоновской части однобозонного обменного квазипотенциала,  $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$  ( $\hbar = c = 1$ ), опуская функцию  $\operatorname{cth}(\pi mr)$ , т.е. заменой потенциала  $V_c(r) = -\operatorname{cth}(\pi mr)/r$  на кулоновский (хромодинамический) потенциал (2). В РКП-подходе в импульсном пространстве Лобачевского потенциал (2) отвечает пропагатору, обладающему КХД-подобным (хромодинамическим) поведением [21]. Таким образом, внутри адрона взаимодействие двух релятивистских спиновых

кварков произвольных масс осуществляется в  $\mathbf{r}$ -представлении посредством сингулярного воронкообразного потенциала запираания (4), в котором  $V_{\text{conf}}(0) = 0$ . В поле такого потенциала уровни энергии  $M_n = (m'^2 c^2 / \mu) \text{ch } \chi_n$  для данного уровня  $n$  могут быть определены из ВКБ-условия квантования (23).

В области  $r \in (r_L; r_R)$  ВКБ-решение (19) с левой точкой поворота  $r_L$  и с данным фиксированным значением энергии  $M_n$ , отвечающее потенциалу (4), запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_\ell^L(r, \chi_n) &= \\ &= \frac{C_\ell(\chi_n)}{\sqrt[4]{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} \times \\ &\times \sin \left\{ \frac{1}{\lambda'} \int_{r_L}^r dr' [\chi_+(r') - \ln R(r')] + \frac{\pi}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где нормировочный множитель  $C_\ell(\chi_n)$  находится из условия нормировки

$$4\pi \int_0^\infty dr |\varphi_\ell^L(r, \chi_n)|^2 = 1, \quad \ell \geq 0. \quad (27)$$

Заметим, что в области применимости ВКБ-приближения (22) аргумент синуса в решении (26) является быстро осциллирующей функцией. Поэтому после подстановки решения (26) в условие нормировки (27) квадрат синуса, как обычно, можно заменить его средним значением, равным  $1/2$  [1, 23]. Тогда вместо (27) имеем условие

$$\begin{aligned} 2\pi |C_\ell(\chi_n)|^2 \times \\ \times \int_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} = 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Дифференцируя по полной энергии  $M_n = (m'^2 c^2 / \mu) \text{ch } \chi_n$  условие квантования (23) при  $\ell \geq 0$ , где потенциал  $V_{\text{conf}}(r)$  не зависит от энергии  $M_n$ , и принимая во внимание определения (18) и условие (21) для точек поворота  $r_{L,R}$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{r_L}^{r_R} \frac{dr}{\sqrt{[\mathcal{X}^2(r) - R^2(r)][1 + a'V(r)X(r)]}} = \\ = \frac{\pi \lambda' m'^2 c^2}{\mu} \frac{dn}{dM_n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из выражений (28) и (29) находим

$$|C_\ell(\chi_n)|^2 = \frac{\mu}{2\pi^2 \lambda' m'^2 c^2} \frac{dM_n}{dn}. \quad (30)$$

Далее, поступая как, например, в работах [1, 15, 23], волновую РКП-функцию (26) полного потенциала (4) при  $\ell = 0$  в области достаточно больших  $\rho = r/\lambda', r \in (r_L; r_R)$ , но таких, где все же в потенциале (4) доминирует кулоновское (хромодинамическое) взаимодействие (2), аппроксимируем радиальной  $s$ -волновой РКП-функцией  $\varphi_0^{\text{Coul}}(r, \chi')$ , отвечающей потенциалу (2), точный вид которой можно представить через гипергеометрическую функцию в виде [34]

$$\begin{aligned} \varphi_0^{\text{Coul}}(\rho, \chi') &= \\ &= 2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi') e^{iB'\chi' - \chi' + i(\rho - \tilde{\rho}')\chi'} (\rho - \tilde{\rho}') \times \\ &\times F(1 - iB', 1 - i(\rho - \tilde{\rho}'); 2; 1 - e^{-2\chi'}), \\ &\rho = r/\lambda'. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь  $C_0(\chi')$  — произвольная функция от  $\chi'$ , параметр  $B'$  определяется как

$$B' = \frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \text{ch}^2 \chi' + b')}{4 \text{sh } \chi'}, \quad (32)$$

причем параметр  $B'$  при  $\chi' = i\kappa_n$  связан с условием квантования энергетических уровней в спиновом случае для потенциала (2) выражением [34]

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}'_s(a' \cos^2 \kappa_n + b')}{4 \sin \kappa_n} = n, \quad \ell = 0, \\ n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \kappa_n < \pi/2. \end{aligned}$$

Сравнивая асимптотическое выражение для кулоновской функции в (31)

$$\begin{aligned} \varphi_0^{\text{Coul}}(\rho, \chi_n)|_{\rho \gg 1} \sim \frac{2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi_n) e^{-\pi B'/2}}{\text{sh } \chi_n |\Gamma(1 - iB')|} \times \\ \times \sin [\rho \chi_n + \delta_0^{\text{Coul}, S}(\chi_n)], \end{aligned}$$

с асимптотикой ВКБ-решения в (26), взятого при  $\ell = 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_0^L(\rho, \chi_n)|_{\rho \gg 1} \sim \\ \sim \frac{C_0(\chi_n)}{\sqrt{\text{sh } \chi_n}} \sin [\rho \chi_n + \delta_0^{\text{Coul}, \text{WKB}, S}(\chi_n)], \end{aligned}$$

находим связь между нормировочными множителями

$$\begin{aligned} |2\pi C_0^{\text{Coul}}(\chi_n)|^2 = \\ = \text{sh } \chi_n e^{\pi B'} |\Gamma(1 - iB')|^2 |C_0(\chi_n)|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\delta_0^{\text{Coul}, S}(\chi') = B' \ln(2\rho \text{sh } \chi') - \tilde{\rho}' \chi' + \arg \Gamma(1 - iB')$$

— точная фаза волновой РКП-функции для кулоновского потенциала (2), а

$$\delta_0^{\text{Coul}, \text{WKB}, S}(\chi') = B' \ln(2\rho \text{sh } \chi') - \tilde{\rho}' \chi' - B' \ln B'$$

– ее выражение в ВКБ-приближении [38].

Наконец, принимая во внимание определение (24) и соотношения (30), (31) и (33), получим ВКБ-выражение для лептонной ширины распада векторного мезона в  $s$ -состоянии и с энергией  $M_n$  как составной системы двух спиновых кварков произвольных масс, взаимодействующих посредством воронкообразного потенциала (4) с кулоновским (хромодинамическим) взаимодействием (2):

$$\Gamma_{n,\ell=0}(V \rightarrow e^+e^-) = \quad (34)$$

$$= \frac{4\alpha^2 Q_V^2 f_1^2(t) (\hbar c)^3 \operatorname{sh} \chi_n}{\pi \lambda^3 g' m' c^2 M_n^2} S_{\text{RQP},S}(\chi_n) \frac{dM_n}{dn}.$$

Здесь

$$S_{\text{RQP},S}(\chi') = \frac{X_{\text{RQP},S}(\chi')}{1 - \exp[-X_{\text{RQP},S}(\chi')]} \times \quad (35)$$

$$\times e^{-\pi\tilde{\rho}'} \left| \Gamma(2 + i\tilde{\rho}') F(1 + iB', -i\tilde{\rho}'; 2; 1 - e^{-2\chi'}) \right|^2$$

– релятивистский кулоноподобный ресуммирующий пороговый  $S$ -фактор для случая составной системы, состоящей из двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс  $m_1$  и  $m_2$  [34]. В рассматриваемом РКП-подходе  $S$ -фактор (35) воспроизводит как известный нерелятивистский результат в нерелятивистском пределе ( $v \ll 1$ ) в бесспиновом случае, когда  $m_1 = m_2 = m$ ,  $a' = a = 0$  и  $b' = b = 2/mc^2$ , так и ожидаемые релятивистский ( $u \rightarrow 1$ ) и ультрарелятивистский ( $m' \rightarrow 0$ ) пределы для значения параметров  $a'$  и  $b'$  в (14) (подробности см. в работах [34, 41, 42]). Величина  $X_{\text{RQP},S}(\chi')$  связана с параметром  $B'$  в (32) выражением

$$X_{\text{RQP},S}(\chi') = 2\pi B' = \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s (a' \operatorname{ch}^2 \chi' + b')}{2 \operatorname{sh} \chi'},$$

которое может быть представлено с помощью (11) в терминах скоростей (7) и (8) в виде

$$X_{\text{RQP},S}(u) = \quad (36)$$

$$= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s \sqrt{1 - u^2}}{2g'u} \left[ g'^2(a' + b') + \frac{a'u^2}{1 - u^2} \right] =$$

$$= \frac{\pi \tilde{\alpha}'_s}{g'u'_{\text{rel}}} \left[ g'^2(a' + b') + \frac{a'}{4} u'^2_{\text{rel}} \right].$$

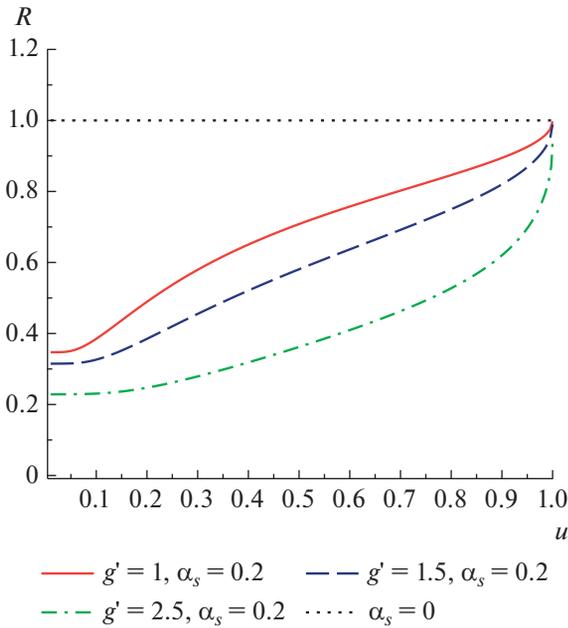
Подчеркнем, что выражение (34) для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в  $s$ -состоянии включает в себя спиновый  $S$ -фактор (35), а его бесспиновый аналог (12) содержит бесспиновый  $S$ -фактор (10), поведение которых было детально исследовано в работах [34, 41–43] и [26–29] соответственно. При этом выражение (34) можно применять и при отсутствии кулоновского взаимодействия в потенциале (4), т.е.

при  $\alpha_s = 0$ , а при  $a' = 0, b' = 2/g'm'c^2$  и  $f_1(t) = 1$  оно переходит в выражение (12) для бесспинового случая. Соответствующие нерелятивистские или релятивистские пороговые  $L$ - и  $S$ -факторы появляются и в других выражениях для лептонных ширин распадов векторных мезонов как составных систем двух спиновых (или бесспиновых) частиц равных масс  $m$ . Однако не все пороговые  $L$ - и  $S$ -факторы, появляющиеся в лептонных ширинах распадов векторных мезонов, имеют правильные релятивистские пределы [26–29], что существенно влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в этой области. Этот вопрос для случая двух частиц равных масс был подробно исследован в работе [1].

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СПИНОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ НА ПОВЕДЕНИЕ ИХ ЛЕПТОННЫХ ШИРИН РАСПАДОВ

Для исследования влияния спина и масс кварков на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии были построены графики функции  $R = R(u)$  (рис. 1) как функции скорости  $u$ , определенной как отношение релятивистской спиновой лептонной ширины распада векторного мезона в  $s$ -состоянии, представленной выражениями (34), (35) и (36), к ее релятивистскому бесспиновому аналогу, представленному выражениями (10) и (12), которые берутся при  $f_1(t) = 1$ ,  $Q_V = e_q$ ,  $\hbar = c = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}'_s = \alpha_s = 0.2$  и отвечают различным значениям фактора  $g'$ :  $g' = 1$  — сплошная кривая,  $g' = 1.5$  — штриховая кривая и  $g' = 2.5$  — штрихпунктирная кривая; точечная кривая соответствует значению  $\alpha_s = 0$ . При построении графиков функции  $R$  были также использованы соотношения (7) и (11) как функции скорости  $u$  и учтены выражения для спиновых параметров  $a'$  и  $b'$  для векторных мезонов в (14) как функции фактора  $g'$ .

Из рис. 1 видно, что в нерелятивистской области значений скорости  $u$  ( $u \ll 1$ ) значение функции  $R < 0.4$ . Следовательно, в этой области значений скорости  $u$  учет спина и масс кварков, формирующих спиновые параметры  $a'$  и  $b'$  векторных мезонов, существенно влияет на поведение функции  $R$ , а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Этот эффект связан с влиянием значений спиновых параметров  $a'$  и  $b'$  как функций фактора  $g'$  на поведение порогового  $S$ -фактора (35) в области малых значений скорости  $u$  по сравнению с его релятивистским (10) бесспиновым аналогом. Это влияние спиновых параметров на поведение порогового  $S$ -фактора в области малых значений скорости  $u$  было детально исследовано в работах [34, 41–43]. Это так называемый



**Рис. 1.** Поведение функции  $R$  как функции скорости  $u$ , равной отношению релятивистского выражения (34) для лептонных ширин распадов векторных мезонов к его релятивистскому бесспиновому аналогу (12), взятых при  $f_1(t) = 1$ ,  $Q_V = e_q$ ,  $\hbar = c = 1$ ,  $\tilde{\alpha}_s = \tilde{\alpha}'_s = \alpha_s = 0.2$  и отвечающих различным значениям фактора  $g'$ . Кривые: сплошная —  $g' = 1$ , штриховая —  $g' = 1.5$ , штрихпунктирная —  $g' = 2.5$ , точечная —  $\alpha_s = 0$ .

эффект Зоммерфельда [44, 45]. Однако с ростом скорости  $u$  влияние значений спиновых параметров  $a'$  и  $b'$  на поведение функции  $R$  уменьшается, но продолжает зависеть, и достаточно существенно, от значений фактора  $g' \geq 1$ . В релятивистском пределе ( $u \rightarrow 1$ ), как видно из рис. 1, функция  $R \rightarrow 1$  для всех трех значений фактора  $g'$ , т.е. это влияние становится исчезающе малым. Такое поведение функции  $R$  в релятивистском пределе ( $u \rightarrow 1$ ) обусловлено тем, что релятивистские пороговые  $S$ -факторы (10) и (35) имеют правильный релятивистский предел, равный 1 (см. соответственно работы [26–29] и [34, 41–43]). В заключение данного абзаца подчеркнем, что различие масс кварков (фактор  $g'$ ), образующих составную систему, существенно влияет на поведение функции  $R$ , а значит, и на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов.

В качестве примера применения выражения (34), где  $\hbar = c = 1$ , проведем вычисление лептонных ширин распадов основного уровня ( $n = 1$ )  $s$ -состояния ( $\ell = 0$ ) векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, образованных соответствующими парами релятивистских  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков, взаимодействующих посредством суммы линейного и кулоновского (хромодинамического) потенциалов.

Массы векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов были выбраны равными [46]:  $M_{\rho_0} = 775.26$  МэВ,  $M_{\omega} = 782.65$  МэВ и  $M_{\phi} = 1019.461$  МэВ. Значения фактора  $g'$ , который определяется формулой (6) через отношения масс  $m_u, m_d, m_s$  кварков, образующих векторные  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезоны, принимаются равными:  $g'_{\rho_0} = g'_{\omega} = 1.0012$  (как и в работе [38] для  $\pi^{\pm}$ -мезона), а  $g'_{\phi} = 1$  (из-за равных масс). Значения масс  $m_u, m_d, m_s$  для  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварков были найдены в работе [38] при исследовании спектра масс псевдоскалярных  $\pi^{\pm}$ -,  $K^{\pm}$ - и  $K_0$ -мезонов:  $m_u = 62.57$  МэВ,  $m_d = 69.00$  МэВ,  $m_s = 262.29$  МэВ. Тогда, принимая во внимание определение массы  $m' = \sqrt{m_1 m_2}$  эффективной релятивистской частицы, были вычислены массы  $m'_{\rho_0} = m'_{\omega} = 65.71$  МэВ (как и в работе [38] для  $\pi^{\pm}$ -мезона) и  $m'_{\phi} = m_s = 262.29$  МэВ для векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов. Значения быстроты  $\chi' = \chi$ , соответствующие выбранным значениям масс  $M$ ,  $m'$  и фактора  $g'$  для  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, находятся согласно формулам (6) и (15) из выражений

$$M_{\rho_0} = 2m'_{\rho_0} g'_{\rho_0} \operatorname{ch} \chi_{\rho_0}, \quad (37)$$

$$M_{\omega} = 2m'_{\omega} g'_{\omega} \operatorname{ch} \chi_{\omega}, \quad M_{\phi} = 2m'_{\phi} g'_{\phi} \operatorname{ch} \chi_{\phi}.$$

Значения множителя  $Q_V$ , обусловленные изотопической структурой векторных мезонов  $V$  и зарядами кварков, образующих их и выраженных в единицах электрического заряда  $e$ , для векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов были взяты из работ [10, 11]:  $Q_{\rho_0} = 1/\sqrt{2}$ ,  $Q_{\omega} = 1/3\sqrt{2}$ ,  $Q_{\phi} = -1/3$ . Значения линейной ( $\tilde{\sigma}' = \sigma$ ) и кулоновской ( $\tilde{\alpha}'_s = \alpha_s$ ) констант взаимодействия для основного уровня  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов в  $s$ -состоянии, а также значения спектральной плотности  $dM_n/dn = 2m'g' \operatorname{sh} \chi'_n d\chi'_n/dn$  для них были вычислены с помощью условия квантования уровней энергий для векторных мезонов ( $a' = g'^2/2$ ,  $b' = 3/4 - a'$ ) [38]

$$\begin{aligned} & \frac{4}{a' \tilde{\sigma}'} \left[ \frac{\operatorname{ch} \chi'}{\sqrt{b'/a'} \sqrt{1+b'/a'}} \times \right. \\ & \quad \times \operatorname{arth} \left( \frac{\operatorname{th} \chi' \sqrt{b'/a'}}{\sqrt{1+b'/a'}} \right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1+b'/a'}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{sh} \chi'}{\sqrt{1+b'/a'}} \right) \right] = \\ & = \pi \left( n + \frac{\ell}{2} + \frac{3}{4} \right) - \delta_{\ell}^{\operatorname{Coul}, \operatorname{WKB}, S}(\chi'), \\ & \quad n = 0, 1, \dots, \quad \ell \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

используя выбранные значения фактора  $g'$  и найденные значения быстроты  $\chi'$  посредством соотно-

**Таблица 1.** Значения лептонных ширин распадов и параметров  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов

Мезоны	$M, \text{МэВ}$	$m_u, \text{МэВ}$	$m_d, \text{МэВ}$	$m_s, \text{МэВ}$	$m', \text{МэВ}$	$g'$	$\chi'$	$Q_V$	$\sigma$	$\alpha_s$
$\rho_0$	775.26	62.57	69.00		65.71	1.0012	2.4595	$1/\sqrt{2}$	5.3135	0.3290
$\omega$	782.65	62.57	69.00		65.71	1.0012	2.4691	$1/3\sqrt{2}$	5.3806	0.3261
$\phi$	1019.461			262.29	262.29	1	1.2836	-1/3	0.7517	0.7793
Мезоны	$\chi_\Delta$	$-t, \text{ГэВ}^2$	$u$	$\Gamma_{\text{теор}}, \text{кэВ}$	$\Gamma_{\text{эксп}}, \text{кэВ}$					
$\rho_0$	3.2042	13.63	0.9855	7.04	$7.04 \pm 0.06$					
$\omega$	3.0081	11.21	0.9858	0.60	$0.60 \pm 0.02$					
$\phi$	2.4054	9.53	0.8574	1.251	$1.251 \pm 0.021$					

шений (37), где

$$\delta_\ell^{\text{Coul,WKB,S}}(\chi') = B' \ln \left( \frac{2\rho_+ \text{sh } \chi'}{\sqrt{\Lambda^2 + B'^2}} \right) - \chi' \tilde{\rho}'$$

– фаза релятивистской кулоновской волновой РКП-функции в ВКБ-приближении, взятой в точке поворота  $\rho_+ = 4(\text{ch } \chi' - 1)/\tilde{\sigma}'(a' + b')$ .

Значения быстроты  $\chi_\Delta$ , параметризующей формфактор  $f_1(t)$  в (25), были выбраны равными:  $\chi_{\Delta\rho_0} = 3.2042$ ,  $\chi_{\Delta\omega} = 3.0081$  и  $\chi_{\Delta\phi} = 2.4054$ . Они соответствуют теоретическим значениям лептонных ширин распадов основного уровня  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, которые принадлежат доверительным интервалам их экспериментальных значений [46].

Значения всех величин для основного уровня  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, включая значения линейной и кулоновской констант взаимодействия кварков, скорости  $u$ , быстроты  $\chi_\Delta$  и квадрата 4-вектора передачи импульса  $t$ , а также теоретические и экспериментальные значения лептонных ширин распадов для них, приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что кварки, образующие основной уровень  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, являются релятивистскими (для них скорость  $u > 0.85$ ).

Подчеркнем, что результаты вычислений учитывают релятивистский характер связанной системы, поскольку как лептонные ширины распадов векторных мезонов (34), так и условие квантования уровней энергий (38) были получены в рамках полностью ковариантного РКП-подхода в квантовой теории поля. При этом остается неоднозначность определения параметров взаимодействия. Для устранения этой неоднозначности необходимо использовать другие физические характеристики для рассматриваемых связанных систем, либо зафиксировать некоторые параметры взаимодействия, например, мы фиксировали значения фактора  $g'$  (см. табл. 1).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках РКП-подхода в релятивистском квазиклассическом приближении получено новое релятивистское выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии на лептон-антилептонную пару. Рассмотрение проводится для случая, когда релятивистские спиновые кварки произвольных масс  $m_1, m_2$ , составляющие векторные мезоны, взаимодействуют посредством воронкообразного потенциала, включающего в себя несингулярную чисто запирающую часть и сингулярную часть в виде кулоновского (хромодинамического) потенциала. Для этой цели было использовано полностью ковариантное конечно-разностное РКП-уравнение в трехмерном релятивистском  $\mathbf{r}$ -представлении, полученное в [34] в рамках РКП-подхода [2, 24, 25] для случая взаимодействия двух релятивистских спиновых частиц произвольных масс. РКП-уравнение решено релятивистским ВКБ-методом. Установлено условие применимости ВКБ-приближения. Проведено сравнение нового выражения с его релятивистским бесспиновым аналогом. Исследовано влияние спина и масс кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии. Выполнено вычисление лептонных ширин распадов основного уровня  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов.

Показано, что новое выражение для лептонных ширин распадов векторных мезонов (34) при  $a' = 0, b' = 2/g'm'c^2$  и  $f_1(t) = 1$  переходит в его релятивистский бесспиновый аналог. Для исследования влияния спина и масс кварков на лептонные ширины распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии были построены графики функции  $R$  как функции скорости  $u$ , определенной как отношение нового выражения для релятивистской лептонной ширины распада векторного мезона в  $s$ -состоянии, к ее релятивистскому бесспиновому аналогу (рис. 1). Поведение функции  $R$  на рис. 1 показывает, что

учет спина и масс кварков влияет на поведение лептонных ширин распадов векторных мезонов. Это влияние особенно существенно в нерелятивистской области значений скорости  $u$  ( $u \ll 1$ ), где значение функции  $R < 0.4$ , и обусловлено различным поведением в области малых значений скорости  $u$  релятивистских бесспиновых и спиновых пороговых  $S$ -факторов, параметризующих лептонные ширины распадов векторных мезонов.

Поведение функции  $R$ , а значит, и лептонных ширин распадов векторных мезонов также существенно зависит от поведения пороговых  $S$ -факторов в релятивистской области значений скорости  $u$  ( $u \rightarrow 1$ ). Установлено, что с ростом скорости  $u$  влияние спина и масс кварков, формирующих спиновые параметры  $a'$  и  $b'$  векторных мезонов, на поведение функции  $R$  (рис. 1) уменьшается и в релятивистском пределе ( $u \rightarrow 1$ ) это влияние становится исчезающе малым ( $R \rightarrow 1$ ), поскольку релятивистские бесспиновые и спиновые пороговые  $S$ -факторы (10) и (35) в  $R$  имеют правильный релятивистский предел, равный 1.

Полученная в настоящей работе формула (34) может быть использована для описания лептонных ширин распадов векторных мезонов в  $s$ -состоянии, в частности, она была применена к вычислению лептонных ширин распадов основного уровня  $s$ -состояния векторных  $\rho_0$ -,  $\omega$ - и  $\phi$ -мезонов, значения которых находятся в доверительном интервале их экспериментальных значений.

Выражение для релятивистских квазиклассических лептонных ширин распадов векторных мезонов было получено в рамках полностью ковариантного метода и имеет правильную связь с функцией Бете—Солпитера, а следовательно, можно ожидать, что оно более полно учитывает как релятивистский характер частиц, образующих векторные мезоны, так и их массы и спины.

Автору приятно выразить искреннюю благодарность О.П. Соловцовой за обсуждение полученных результатов, ценные замечания и техническую поддержку, Ю.А. Курочкину и В.В. Андрееву за обсуждение полученных результатов, их комментарии и стимулирующие дискуссии.

Работа выполнена при поддержке программы международного сотрудничества Республики Беларусь с ОИЯИ и Государственной программы научных исследований на 2021–2025 гг. “Конвергенция-2025”, подпрограмма “Микромир, плазма и Вселенная”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **85**, 159 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 205 (2022)].
2. V. G. Kadyshesky, Nucl. Phys. B **6**, 125 (1968).

3. В. Г. Кадышевский, ЖЭТФ **46**, 654, 872 (1964) [Sov. Phys. JETP **19**, 443, 597 (1964)]; Докл. АН СССР **160**, 573 (1965) [Sov. Phys. Dokl. **10**, 46 (1965)].
4. A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze, Nuovo Cimento **29**, 380 (1963).
5. R. N. Faustov, Ann. Phys. (N.Y.) **78**, 176 (1973).
6. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11727, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **30**, 1079 (1979) [Sov. J. Nucl. Phys. **30**, 562 (1979)].
7. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-11678, JINR (Dubna, 1978); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **41**, 205 (1979) [Theor. Math. Phys. **41**, 977 (1979)].
8. А. Д. Линкевич, В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, ТМФ **53**, 20 (1982) [Theor. Math. Phys. **53**, 955 (1982)].
9. V. G. Kadyshesky, R. M. Mir-Kasimov, and N. B. Skachkov, Nuovo Cimento A **55**, 233 (1968).
10. В. А. Матвеев, Б. В. Струминский, А. Н. Тавхелидзе, Препринт Р-2524, ОИЯИ (Дубна, 1965).
11. R. Van Royen and W. F. Weisskopf, Nuovo Cimento A **50**, 617 (1967).
12. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Phys. Lett. B **57**, 455 (1975).
13. R. Barbieri, R. Gatto, R. Kögerler, and Z. Kunszt, Nucl. Phys. B **105**, 125 (1976).
14. E. Etim and L. Schülke, Nuovo Cimento A **77**, 347 (1983).
15. J. S. Bell and J. Pasupathy, Z. Phys. C **2**, 183 (1979).
16. N. Fröman and P. O. Fröman, J. Phys. France **42**, 1491 (1981).
17. B. Durand and L. Durand, Phys. Rev. D **30**, 1904 (1984).
18. А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, в сб.: *Труды IV международного симпозиума по нелокальным теориям поля, Алушта, 20–28 апреля 1976*, Д2-9788, ОИЯИ (Дубна, 1976), с. 36.
19. Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ЯФ **31**, 1332 (1980) [Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 686 (1980)].
20. А. В. Сидоров, Н. Б. Скачков, ТМФ **46**, 213 (1981) [Theor. Math. Phys. **46**, 141 (1981)]; Препринт Р2-80-45, ОИЯИ (Дубна, 1980); V. I. Savrin, A. V. Sidorenko, and N. B. Skachkov, Hadronic J. **4**, 1642 (1981).
21. V. I. Savrin and N. B. Skachkov, Lett. Nuovo Cimento **29**, 363 (1980).
22. И. С. Шапиро, Докл. АН СССР **106**, 647 (1956) [Sov. Phys. Dokl. **1**, 91 (1956)]; ЖЭТФ **43**, 1727 (1963) [Sov. Phys. JETP **16**, 1219 (1963)].
23. В. В. Кондратюк, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **81**, 40 (2018) [Phys. At. Nucl. **81**, 51 (2018)].
24. В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, ЯФ **11**, 692 (1970) [Sov. J. Nucl. Phys. **11**, 388 (1970)].
25. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, ЭЧАЯ **2**, 635 (1972) [Sov. J. Part. Nucl. **2**, 69 (1972)].
26. Ю. Д. Черниченко, Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук **4**, 81 (2009).

27. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ЯФ **73**, 1658 (2010) [Phys. At. Nucl. **73**, 1612 (2010)].
28. О. П. Соловцова, Ю. Д. Черниченко, ТМФ **166**, 225 (2011) [Theor. Math. Phys. **166**, 194 (2011)].
29. Ю. Д. Черниченко, *Релятивистский квазипотенциальный подход в задачах рассеяния*, (Изд. центр УО ГГТУ им. П. О. Сухого, Гомель, 2011).
30. A. H. Hoang, Phys. Rev. D **56**, 7276 (1997).
31. J.-H. Yoon and Ch.-Y. Wong, Phys. Rev. C **61**, 044905 (2000); J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **31**, 149 (2005).
32. A. V. Arbuzov, Nuovo Cimento A **107**, 1263 (1994).
33. Yu. D. Chernichenko and O. P. Solovtsova, in *Proceedings of the XI International School-Seminar on the Actual Problems of Microworld Physics, August 1–12, 2011, Gomel, Belarus*, Preprint No. E1,2-2013-23, JINR (Dubna, 2013), p. 61.
34. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **84**, 262 (2021) [Phys. At. Nucl. **84**, 339 (2021)].
35. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **80**, 396 (2017) [Phys. At. Nucl. **80**, 707 (2017)].
36. N. B. Skachkov and I. L. Solovtsov, Preprint No. E2-81-760, JINR (Dubna, 1981); Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, ТМФ **54**, 183 (1983) [Theor. Math. Phys. **54**, 116 (1983)].
37. Н. Б. Скачков, ТМФ **22**, 213 (1975) [Theor. Math. Phys. **22**, 149 (1975)]; Preprint No. P2-12152, ОИЯИ (Дубна, 1979).
38. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **85**, 353 (2022) [Phys. At. Nucl. **85**, 488 (2022)].
39. Ю. Д. Черниченко, ЯФ **83**, 270 (2020) [Phys. At. Nucl. **83**, 488 (2020)].
40. Н. Б. Скачков, ТМФ **25**, 313 (1975) [Theor. Math. Phys. **25**, 1154 (1975)].
41. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptari, Nonlin. Phen. Compl. Syst. **23**, 449 (2020).
42. Yu. D. Chernichenko, L. P. Kaptari, and O. P. Solovtsova, Eur. Phys. J. Plus. **136**, Art. 132 (2021) [arXiv: 2012.13128v1 (hep-ph)].
43. Yu. D. Chernichenko, O. P. Solovtsova, and L. P. Kaptari, in *Proceedings of the XXVIII Anniversary Seminar "Nonlinear Phenomena in Complex Systems", NPCS'2021, May 18–21, 2021, Minsk, Belarus* (Nonlinear Dynamics and Applications, Minsk, 2021), Vol. 27, p. 101.
44. A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien* (Vieweg, Braunschweig, 1939), Vol. 2.
45. G. Gamov, Z. Phys. **51**, 204 (1928).
46. K. A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).

## LEPTONIC DECAY WIDTHS FOR THE COMPOSITE SYSTEM OF TWO RELATIVISTIC FERMIONS

Yu. D. Chernichenko<sup>1),2)</sup>

<sup>1)</sup> *Sukhoi State Technical University of Gomel, Belarus*

<sup>2)</sup> *International Center for Advanced Studies, Gomel, Belarus*

The new relativistic semiclassical leptonic decay widths of vector mesons as the relativistic systems of two quarks with arbitrary masses interacting by means of the funnel-type potentials with Coulomb interaction are obtained. The behavior of the relativistic leptonic decay widths of vector mesons was investigated. Comparison of the behavior for new expression with its relativistic spinless analog is given. Consideration is conducted within the framework of completely covariant quasipotential approach in the Hamiltonian formulation of quantum field theory via a transition to the relativistic configurational representation in the case of two relativistic spin particles of arbitrary masses.